Digitized by the Internet Archive
in 2025

https://archive.org/details/elementa_1942

Q
4
E42
v. 25-26
1942
WARE

ELEMENTA

Tidskrift för elementär matematik, fysik och kemi

UTGIVEN AV

C. E. BLOM G. BORELIUS S. BÅGMAN

G. STARCK A. WAHLGREN

TJUGUFEMTE ÅRGÅNGEN

1942

REDAKTION OCH EXP.: Karlbergsv. 16[4] STOCKHOLM

LUND
HÅKAN OHLSSONS BOKTRYCKERI
1 9 4 2

Tjugufemte årgångens innehåll.

1942.

Sid.

AGRELIUS, R. och G. FUNKE, Magnetismen från elektroteknikens synpunkt 75

ALM, E. m. fl. Skrivelse från kommittén för Georgimåttsystemet till Tekniska Högskolans lärarkollegium 205

BERGHOLM, C. Anm. av H. Faxén, Mekanik 156

BERGSTRÖM, H. Anm. av S. Bundgaard, Tallene og den abstrakte Algebras Grundbegreber 212

BLOM, C. E. Anm. av Fra Fysikkens Verden (45), Internationella bokstavsbeteckningar för fysikaliska storheter och måttenheter (158).

BROSSET, C. Elektrokemisk och röntgenkristallografisk undersökning av komplexa aluminiumfluorider (ref. av gradualavh.) 161

BÄCKSTRÖM, H. Från infrarödfotografiens område 11

COMÉT, S. Anm. av J. Jeans, Välljud och missljud 155

DANVER, C.-G. A Morphological Investigation of Some Near Galaxies (ref. av gradualavh.) 159

EDQVIST, T. Den skenbara formen av en strålkastares ljusbana 99

ENGLUND, B. Till frågan om begreppen syra och bas. II och III .. 94, 200

FLEMBERG, H. Optical Spectra within the Ordinary X-ray Region Recorded with Curved Crystal (ref. av gradualavh.) 221

FUNKE, G. och R. AGRELIUS, Magnetismen från elektroteknikens synpunkt 75

GUSTAVER, B. Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning: Årsmötet i jan. 1942. Styrelseberättelse för 1941 38

— — Om fortbildnings-kursen i fysik sommaren 1942 153

GÅRDING, L. Kägelsnitt inskrivna i en triangel behandlade med komplexa tal 1
HAGLUND, PH. An Experimental Investigation into L-Emission Spectra (ref. av gradualavh.) 109
HEDLUND, I. Die Geschwindigkeit der spontanen Hydrolyse einiger Sulfonsäurechloride (ref. av gradualavh.) 222
HENRIKSON, H. Något om segelflygning och dess energikällor i atmosfären. I 191
HULTHÉN, L. Anm. av N. Ryde, Atomstrålning och atomstruktur .. 44
INGELSTAM, E. Anm. av E. S. Johansen, Mekanisk Fysik I. (214), H. M. Hansen, Lærebog i Fysik (213).
JENVALL, A. Några synpunkter på astronomiundervisningen i skolan 91
JURINGIUS, N. Några formler för en fyrsidings yta 129
LINDBLOM, S.-G. Anm. av K. Hultman, Om livförsäkringsteknik (45), E. von Hofsten, Praktisk statistik (216).
LINDHOLM, S. Principen för kilowattimmätaren för växelström 152
LUNELL, E. Anm. av E. Kasner och J. Newman, Matematiken och fantasien 217
LÖWENHAMN, E. En enkel kyvett 89
NILSSON, A. Parallaktisk förevisnings- och mätapparat för astronomiundervisningen 86
— — Arkimedes lag för flytande kroppar 136
NILSSON, G. Nya rön och problem i fotometrien 177
NORDEFELDT, E. Anm. av R. Kolkwitz und F. Tödt, Einfache Untersuchungen von Boden und Wasser (106), A. Mittasch, Kurze Geschichte der Katalyse in Praxis und Theorie (107), F. Getman and F. Daniels, Outlines of Theoretical Chemistry (156), H. Lux, Praktikum der quantitativen anorganischen Analyse (157).
NYBERG, A. Några exempel på adiabatpapperets användning inom väderlekstjänsten 67
QUENSEL, O. Untersuchungen über die Gerstenglobuline (ref. av gradualavh.) 223
RAMBERG, J. A Spectrophotometric Study of the Central Parts of the Regions of the Hyades and Praesepe (ref. av gradualavh.) 47
— — Anm. av N. Tamm och Å. Wallenquist, Amatörastronomen 104
RAMSTEDT, EVA. Anm. av H. Pettersson, Från atomkärnans explosion till universums 43
RINDE, H. Jonvandring och elektrofores 143
RYDE, N. Anm. av Kosmos, band 19 103
SILLÉN, L. G. Begreppet kemisk potential i kemiundervisningen 27

STARCK, G. John S. Hedström † 65
— — Demonstration av monoklint svavel 90
— — Anm. av K. Kobberø, Kemi for Mellemskolen (107), P. Nylén och N. Wigren, Elementära kemiska räkneuppgifter (108), H. Willstaedt och E. Virgin, Kemi och biokemi (157).
STOLT, H, Anm. av B. Lindwall, Övningsbok i fysik 220
SVENSSON, B. Beiträge zu den Studien über den Starkeffekt am Sauerstoffspektrum I (ref. av gradualavh.) 49
— — Föreningen i Lund för matematisk-naturvetenskaplig undervisning. Styrelseberättelse för 1940—41 41
— — Naturvetenskapliga dagar i Lund 6—7 april 1942 101
— — Sammanträde i Lund 8 nov. 1942 211
TALLQVIST, HJ. Om Mersennes tal och liknande tal 9
TANDBERG, J. Anm. av Bonniers Konversationslexikon, band V (46) och band VI (158), G. Gamow, Solens födelse och död (105); Cahier de Physique (221).
WERNBERG, G. A Spectrophotometric Investigation on Stars in Bright and Dark Regions in Cepheus (ref. av gradualavh.) 111
WIGREN, N. Moderna kopplingstavlor 137
ÖDBERG, G. Anm. av G. Funke, Elementär elektroteknik med laborationer 218

Uppsatser i läroverkens årsredogörelser 1941—1942 176
Föredrag under hösten 1941 och våren 1942 inom svenska matematiska, fysiska och kemiska föreningar 50, 128
Matematiska och fysikaliska uppgifter vid studentskrivningarna och fyllnadsprövningarna under 1942: jan. (57), mars (117), aug.-sept. (169) och nov. (231).
Provräkning i realexamen v.t. och h.t. 1942 ..... 123, 237
Praktisk realexamen: Uppg. i fysik v.t. och h.t. 1942 ..... 124, 238
» » : Uppg. i beskrivande maskin- och byggnadslära v.t. och h.t. 1942 ..... 125, 239
Problemavdelning: Matematiska uppgifter (red. av S. BÅGMAN) 53, 113, 162, 227
Not om lösningen av problem 1191 169
Resultat av pristävlan, lösningar till prisuppgifterna 165
Gradualavhandlingar (autoreferat): C. BROSSET (161), C.-G. DANVER (159), H. FLEMBERG (221), PH. HAGLUND (109), I. HEDLUND (222), J. RAMBERG (47), B. SVENSSON (49), O. QUENSEL (223), G. WERNBERG (111).
Tidskrifter, innehållsöversikt 51, 63, 116, 127, 175, 225

Bokanmälningar: PETTERSSON, Från atomkärnans explosion till universums; RYDE, Atomstrålning och atomstruktur; HULTMAN, Om livförsäkringsteknik; Fra Fysikkens Verden; Bonniers Konversationslexikon, band V 43
Kosmos, band 19; TAMM-WALLENQUIST, Amatörastronomen; GAMOW, Solens födelse och död; KOLKWITZ-TÖDT, Einfache Untersuchungen von Boden und Wasser; MITTASCH, Kurze Geschichte der Katalyse in Praxis und Theorie; KOBBERØ, Kemi for Mellemskolen; NYLÉN-WIGREN, Elementära kemiska räkneuppgifter.... 103
JEANS, Välljud och missljud; FAXÉN, Mekanik; GETMAN-DANIELS, Outlines of Theoretical Chemistry; LUX, Praktikum der quantitativen anorganischen Analyse; WILLSTAEDT-VIRGIN, Kemi och biokemi; Bonniers Konversationslexikon, band VI; Internationella bokstavsbeteckningar för fysikaliska storheter och måttenheter 155
BUNGSGAARD, Tallene og den abstrahte Algebras Grundbegreber; HANSEN, Lærebog i Fysik; JOHANSEN, Mekanisk Fysik I; von HOFSTEN, Praktisk statistik; KASNER-NEWMAN, Matematiken och fantasien; FUNKE, Elemtär elektroteknik med laborationer; LINDWALL, Övningsbok i Fysik; Cahiers de Physique. 212

Tidskr. utkommer med fyra häften årligen (mars, juni, sept., dec.) Pris per häfte 2: 50, per årgång kr. 8: —. Subskription genom inbetalning av kr. 8: — på postgirokonto n:r 527 55.

Redaktion och expedition: **C. E. BLOM, Karlbergsvägen 16[IV], Stockholm Va. Postgiro 527 55.**

Kägelsnitt inskrivna i en triangel behandlade med komplexa tal.[1]

Av LARS GÅRDING.

1. I triangelgeometrien har begreppet »inversa punkter» funnit stor användning. Om man speglar de tre räta linjerna från en punkt P till en triangels hörn i resp. hörns bissektriser, skära de speglade räta linjerna varandra i en punkt P', invers till P. Härvid förutsättes, att P ej ligger på någon av triangelns sidor.

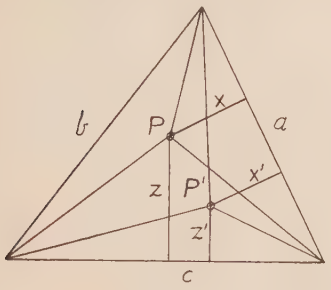


Fig. 1.

Kallas P:s avstånd till sidorna a, b, c, resp. x, y, z och P':s motsvarande avstånd x', y', z', får man tydligen (fig. 1) t. ex.

$$x' : z' = z : x \qquad (1)$$

eller

$$x' : y' : z' = \frac{1}{x} : \frac{1}{y} : \frac{1}{z}. \qquad (2)$$

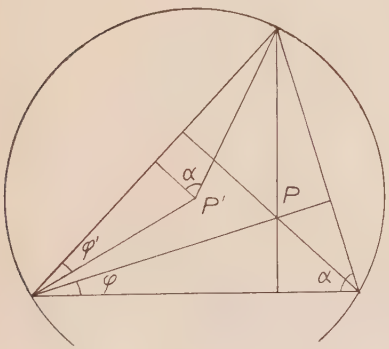


Fig. 2.

Eftersom det finns tre relationer (1) och vilken som helst av dem följer av de andra två, gå de tre speglade räta linjerna genom en och samma punkt P'. Det är tydligt, att den inversa av den inversa punkten är punkten själv.

Några exempel på inversa punkter må anföras. Det finns fyra punkter, som äro inversa till sig själva, nämligen medelpunkterna i den inskrivna och de vidskrivna cirklarna. Höjdernas skärningspunkt P och den om-

[1] Föredrag hållet vid sammanträde med matematiska seminariet vid universitetet i Lund den 25 februari 1941.

skrivna cirkelns medelpunkt P' (fig. 2) äro varandras inversa punkter, ty figurens vinklar α äro lika, alltså $\varphi = \varphi'$. Slutligen gäller för tyngdpunkten

$$x : y : z = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}.$$

Den inversa punkten, den s. k. LEMOINESka punkten, för vilken alltså

$$x : y : z = a : b : c,$$

är den punkt, vars avstånd till sidorna har minsta möjliga kvadratsumma. Om x, y, z avse en punkt, gäller nämligen $ax + by + cz = \text{konst.}$, och med detta bivillkor göres uttrycket $x^2 + y^2 + z^2$ till minimum för just $x : y : z = a : b : c$.

2. Ur den allmänna teorien för kägelsnitt vet man, att ett sådant är bestämt av fem tangenter eller av tre tangenter och en brännpunkt. Det existerar alltså en dubbel oändlighet kägelsnitt som tangera en given triangels sidor (inskrivna, eller där man kan skilja på sådana, inskrivna och vidskrivna kägelsnitt).

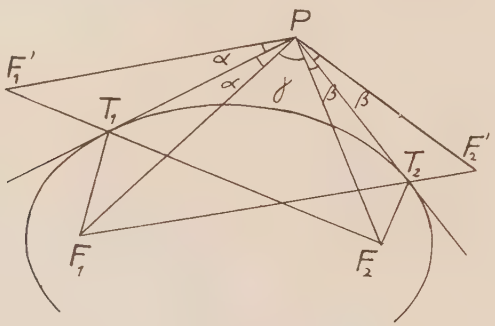


Fig. 3.

Ger man en brännpunkt som ej ligger på någon av triangelns sidor, är kägelsnittet fullt bestämt och ej urartat. Därmed är den andra brännpunkten bestämd. Motsvarigheten mellan brännpunkterna är omvändbart entydig.

Dessutom ha brännpunkterna de vinkelegenskaper som karakterisera inversa punkter och äro alltså inversa av varandra. Detta sista uttalande är grundat på en elementär sats om kägelsnitt, som emellertid torde vara mindre känd. Den skall därför här formuleras och bevisas för ellipsen.

Om man från en yttre punkt drar tangenterna till en ellips och räta linjer till brännpunkterna, ha dessa bägge par av linjer samma bissektriser.

Bevis (fig. 3): F_1' och F_2' äro spegelpunkter till brännpunkterna F_1 och F_2 med avseende på tangenterna PT_1 och PT_2; T_1 ligger på räta linjen F_2F_1' och T_2 på räta linjen F_1F_2'; $F_1F_2' = F_2F_1' =$ storaxeln. Trianglarna PF_1F_2' och $PF_1'F_2$ äro kongruenta och man får med figurens beteckningar

$$2\alpha + \gamma = 2\beta + \gamma \quad \text{eller} \quad \alpha = \beta,$$

varmed satsen är bevisad.

Motsvarande gäller nu för godtyckliga kägelsnitt, d. v. s. brännpunkterna till ett kägelsnitt som tangerar alla sidorna i en triangel äro verkligen inversa punkter. Omvänt kan man till två godtyckliga inversa punkter alltid finna ett inskrivet kägelsnitt, som har dem till brännpunkter.

3. De inskrivna kägelsnitten och deras brännpunkter kunna analytiskt behandlas med komplexa tal.

Om z_1, z_2, z_3 i det komplexa talplanet bilda en icke urartad triangel $\triangle$ och z' och z'' äro två godtyckliga komplexa tal, kan man genom partialbråksuppdelning skriva

$$\frac{(z - z')(z - z'')}{(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\beta_k}{z - z_k}, \tag{3}$$

där t. ex.

$$\beta_1 = \frac{(z_1 - z')(z_1 - z'')}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)}. \tag{4}$$

Man får även, om man på båda sidor utvecklar efter potenser av $\frac{1}{z}$,

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 1$$

och ur (4)

$$\arg(z' - z_1) + \arg(z'' - z_1) = \arg(z_2 - z_1) + \arg(z_3 - z_1) + \arg \beta_1.$$

Man ser omedelbart, att det nödvändiga och tillräckliga villkoret för att z' och z'' skola vara inversa av varandra är, att alla β_k äro reella, ty om t. ex. β_1 är reell, d. v. s. $\arg \beta_1 = 0$ eller π, äro vektorerna 2 och 3 (fig. 4), frånsett en eventuell vinkel π, lika lutade mot bissektrisen till vektorerna 1 och 4. Omvänt, om detta är uppfyllt, är $\arg \beta_1 = 0$ eller π. Detsamma gäller för övriga hörn.

Fallet $z'' = \infty$ med bestämt argument θ (resp. $\theta + \pi$) kan behandlas genom gränsövergång, i det man sätter $z'' = re^{i\theta}$ och

låter r gå mot oändligheten. Om man då betecknar $\lim \frac{\beta_k}{r}$ återigen med β_k, övergår (3) i

$$\frac{-e^{i\theta}(z-z')}{\prod_{k=1}^{3}(z-z_k)} = \sum_{k=1}^{3}\frac{\beta_k}{z-z_k},$$

och man får genom serieutveckling

$$\beta_1+\beta_2+\beta_3=0.$$

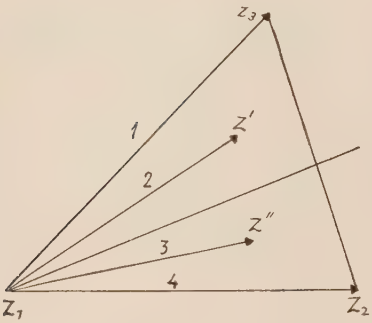


Fig. 4.

För att z' och den oändligt avlägsna z'' skola vara inversa är här återigen nödvändigt och tillräckligt, att alla β_k äro reella. Det kägelsnitt som har z' och z'' till brännpunkter motsvaras i detta fall av en parabel, vars axel har argumentet θ.

Vi observera, att z' och z'' äro nollställen till högra ledet av (3). Om vi i stället för β_k skriva $\alpha_k = \text{konst.}\cdot\beta_k$, kunna vi sammanfatta det ovan bevisade till satsen:

Rötterna z' och z'' till ekvationen

$$\sum_{k=1}^{3}\frac{\alpha_k}{z-z_k}=0 \tag{5}$$

äro då och endast då brännpunkter till ett bestämt, i triangeln $z_1z_2z_3$ inskrivet kägelsnitt, om alla förhållandena $\alpha_j:\alpha_k$ äro reella $(j,k=1,2,3)$.

4. α_1, α_2, α_3 bestämma kägelsnittets natur.

Ger man en brännpunkt, är den andra fullt bestämd; man kan tala om en avbildning av det komplexa talplanet på sig självt. Vi undersöka denna avbildning.

De utdragna sidorna i varje hörn av triangeln dela planet i 4 delar; z' och z'' ligga antingen i samma eller motstående delar. Härav får man (fig. 5):

1. Triangeln $\triangle$ avbildas på sig själv.

2. Vinkelrummet V avbildas på cirkelsegmentet S (C är den omskrivna cirkeln). Man får lätt (hjälpkonstruktion i fig. 5)

$$\alpha + \beta = \gamma + \pi > \pi .$$

3. Om en brännpunkt ligger i oändligheten, blir $\gamma = 0$ och $\alpha + \beta = \pi$, d. v. s. orten för de inskrivna parablernas brännpunkter är den omskrivna cirkeln, en känd sats.

4. Om en brännpunkt ligger i H utanför cirkeln (fig. 5), blir $\gamma < 0$ och $\alpha + \beta < \pi$, d. v. s. H avbildas på sig själv.

Motsvarande gäller för samtliga hörn.

I fall 1 och 4 skiljer ingen av tangenterna (sidorna i triangeln) brännpunkterna, och kägelsnittet är en ellips; i fall 2 skilja alla tangenterna brännpunkterna, och kägelsnittet är en hyperbel.

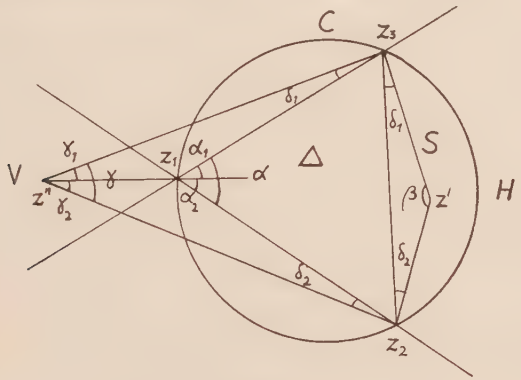


Fig. 5.

Genom att i motsvarande fall undersöka teckenfördelningen av alla β_k enligt (4), som blir 1) $+ + +$ 2) $- + +$ 4) $+ - -$, leds man till följande resultat:

Kägelsnittet är en ellips, parabel eller hyperbel allt eftersom

$$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \gtreqless 0,$$

varvid alla α_k förutsättas vara reella[1] *och* $\neq 0$.

Om något $\alpha_k = 0$, är kägelsnittet en dubbellinje genom hörnet z_k.

5. Talen $\alpha_j : \alpha_k$ ha även en enkel geometrisk betydelse.

Låt η_3 vara en tangeringspunkt. Sätt i (3) $z = \eta_3$ och $\beta_k = \frac{\alpha_k}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}$, där α_k kunna förutsättas reella, och skriv ekva-

[1] Deras event. imaginära, gemensamma faktor bortdivideras ur (5).

tionen i följande form

$$\left[(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\frac{(\eta_3-z')(\eta_3-z'')}{(\eta_3-z_1)(\eta_3-z_2)}-\alpha_3\right]\frac{1}{\eta_3-z_3}=\frac{\alpha_1}{\eta_3-z_1}+\frac{\alpha_2}{\eta_3-z_2}.$$

Vi skola visa, att båda membra $=0$.

[ ] är reell, ty de på fig. 6 markerade vinklarna äro lika.

Vore nu båda membra skilda från noll, så skulle argumentet för vänstra membrum *mod* π vara lika med

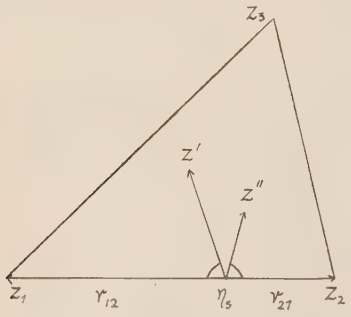


Fig. 6.

$$\arg\frac{1}{\eta_3-z_3}.$$

Högra membrums båda termer ha *mod* π lika argument, alltså skulle detta membrum *mod* π ha argumentet

$$\arg\frac{1}{z_2-z_1}.$$

Då triangeln icke är urartad, kunna dessa argument icke vara lika. Ekvationen är sålunda riktig endast, om båda membra $=0$.

Om figurens r_{12} och r_{21} införas, räknade med tecken, ger alltså högra membrum:

och analogt:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\alpha_1}{r_{12}}+\frac{\alpha_2}{r_{21}}&=0,\\ \frac{\alpha_2}{r_{23}}+\frac{\alpha_3}{r_{32}}&=0,\\ \frac{\alpha_3}{r_{31}}+\frac{\alpha_1}{r_{13}}&=0.\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

Dessa ekvationer möjliggöra uppställandet av brännpunktsekvationen (5) för ett kägelsnitt med givna tangeringspunkter, vilka enligt (6) böra uppfylla likheten

$$r_{12}r_{23}r_{31}=-r_{21}r_{32}r_{13}$$

(i överensstämmelse med Brianchons och Cevas satser). Speciellt:

1. Inskrivna cirkeln. Då är $r_{12}=-r_{13}=r_1$ etc. (elementära geometriens $p-a$ etc.), och alltså (på en gemensam faktor när):

$$\alpha_k=r_k.$$

2. En ellips som tangerar i sidornas mittpunkter. Då är

$$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3.$$

Detta är den s. k. Steinerska ellipsen. Den har sin medelpunkt i triangelns tyngdpunkt, som synes av (5), om man därur löser

$$\frac{z'+z''}{2}=\frac{z_1+z_2+z_3}{3}.$$

Vi återfå här följande kända sats: Sättes $f(z) = \prod_{k=1}^{3} (z - z_k)$, äro brännpunkterna till den STEINERska ellipsen identiska med rötterna till ekvationen $f'(z) = 0$.

6. Man kan även härleda en komplex form av ekvationen för det kägelsnitt vars brännpunkter äro givna genom (5).

Genom transformationen

$$\left.\begin{aligned} z &= x + iy \\ \bar{z} &= x - iy \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x &= \frac{z + \bar{z}}{2} \\ y &= \frac{z - \bar{z}}{2i} \end{aligned}\right\}$$

kan ett kägelsnitts ekvation skrivas i komplex form

$$\begin{aligned} &a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = \\ &= \frac{1}{4}\Big[(a_{11} - a_{22} - 2ia_{12})z^2 + 2z\bar{z}(a_{11} + a_{22}) + (a_{11} - a_{22} + 2ia_{12})\bar{z}^2 + \\ &+ 4(a_{13} - ia_{23})z + 4(a_{13} + ia_{23})\bar{z}\Big] + a_{33} = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Sätt

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \end{vmatrix} = (z\ z_1\ z_2).$$

Tydligen är $(z\ z_1\ z_2) = 0$ ekvationen för en rät linje genom z_1 och z_2. Om η_k är tangeringspunkt på den sida som står mot hörnet z_k, blir ($\varkappa$ är en konstant)

$$(z\ z_1\ z_2)(z\ z_3\ z_1) + \varkappa(z\ \eta_2\ \eta_3)^2 = 0 \tag{8}$$

enligt kända principer[1] ekvationen för ett kägelsnitt, som tangerar i η_2 och η_3.

Kägelsnittet skall gå genom η_1, varav

$$(\eta_1\ z_1\ z_2)(\eta_1\ z_3\ z_1) + \varkappa\,(\eta_1\ \eta_2\ \eta_3)^2 = 0. \tag{9}$$

Men enligt (6) får man t. ex.

$$\eta_3 = \frac{a_1 z_2 + a_2 z_1}{a_1 + a_2}.$$

[1] Se t. ex. BRIOT-BOUQUET, Leçons de géométrie analytique, kapitlet om Détermination des sections coniques.

Av detta erhålles genom någon räkning

$$\left.\begin{aligned}(\eta_1 z_3 z_1) &= \frac{\alpha_3}{\alpha_2+\alpha_3}(z_1 z_2 z_3),\\ (\eta_1 z_1 z_2) &= \frac{\alpha_2}{\alpha_2+\alpha_3}(z_1 z_2 z_3),\\ (\eta_1 \eta_2 \eta_3) &= \frac{2\alpha_1\alpha_2\alpha_3}{(\alpha_2+\alpha_3)(\alpha_3+\alpha_1)(\alpha_1+\alpha_2)}(z_1 z_2 z_3).\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Om man eliminerar z mellan (8) och (9) och utnyttjar ekvationerna (10), får man

$$-4\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3(z z_3 z_1)(z z_1 z_2)+(\alpha_1+\alpha_2)^2(\alpha_1+\alpha_3)^2(z\eta_2\eta_3)^2=0.$$

Men man verifierar att

$$(z\eta_2\eta_3)=\frac{\alpha_1}{(\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_1+\alpha_3)}\begin{vmatrix} z & \bar z & 1 & 0\\ z_1 & \bar z_1 & 1 & -\alpha_1\\ z_2 & \bar z_2 & 1 & \alpha_2\\ z_3 & \bar z_3 & 1 & \alpha_3\end{vmatrix}.$$

Om man så inför räknesymbolerna ε_j med egenskaperna

$$\varepsilon_j^2=1,\quad \varepsilon_j\varepsilon_k=-1\quad (j\neq k;\ j,k=1,2,3),$$

blir kägelsnittets ekvation slutligen[1]

$$\begin{vmatrix} z & \bar z & 1 & 0\\ z_1 & \bar z_1 & 1 & \alpha_1\varepsilon_1\\ z_2 & \bar z_2 & 1 & \alpha_2\varepsilon_2\\ z_3 & \bar z_3 & 1 & \alpha_3\varepsilon_3\end{vmatrix}^2=0. \tag{11}$$

Om $Z=\dfrac{z'+z''}{2}$ beräknas ur (5) och z i (11) ersättes med $z+Z$, antar (11) efter någon räkning formen

$$\begin{vmatrix} z & \bar z & 0 & 0\\ z_1 & \bar z_1 & 1 & \alpha_1\varepsilon_1\\ z_2 & \bar z_2 & 1 & \alpha_2\varepsilon_2\\ z_3 & \bar z_3 & 1 & \alpha_3\varepsilon_3\end{vmatrix}^2+16T^2\frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}=0, \tag{12}$$

där $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\neq 0$; T är ytan av triangeln $\triangle$.

[1] Determinanten själv får ej sättas $=0$, fastän dess kvadrat $=0$. Ett annat, enklare exempel för att belysa denna fråga: $\varepsilon_j+\varepsilon_k$ är ej $=0$, men $(\varepsilon_j+\varepsilon_k)^2=\varepsilon_j^2+2\varepsilon_j\varepsilon_k+\varepsilon_k^2=0$.

Identifierar man (11) med andra ledet av (7), erhålles för diskriminanten $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ värdet

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 256T^2 a_1 a_2 a_3 (a_1 + a_2 + a_3),$$

i överensstämmelse med föregående resultat angående kägelsnittets natur. Vid uträknandet måste man beakta, att multiplikation med räknesymbolerna ε_j ej är associativ.

Kallar man kägelsnittets halvaxlar E_1 och E_2, sidorna i triangeln a_1, a_2, a_3 och motstående vinklar A_1, A_2, A_3, får man ur (12)

$$E_1^2 E_2^2 = T^2 \frac{a_1 a_2 a_3}{(a_1 + a_2 + a_3)^3} \tag{13}$$

$$E_1^2 + E_2^2 = \frac{1}{4(a_1 + a_2 + a_3)^2} (a_1^2 a_1^2 + a_2^2 a_2^2 + a_3^2 a_3^2 +$$

$$+ 2a_2 a_3 a_2 a_3 \cos A_1 + 2a_3 a_1 a_3 a_1 \cos A_2 + 2a_1 a_2 a_1 a_2 \cos A_3).$$

Av (13) ser man, att $E_1 E_2$ för alla a_k av samma tecken når sitt maximum, om $a_1 = a_2 = a_3$. Den STEINERska ellipsen har av alla inskrivna ellipser den maximala ytan, en sats som bevisades redan av EULER.

Anm. De flesta av resultaten ovan ha säkerligen erhållits förut i en eller annan form. Litteraturen på detta område är emellertid omfångsrik och svåråtkomlig. Här skall endast hänvisas till en artikel av G. BERKHAN och W. F. R. MEYER: Neuere Dreiecksgeometrie, Encyklop. der Mathem. Wissenschaften, III. 1. II.

Om Mersennes tal och liknande tal.

Av **HJ. TALLQVIST.**

I fråga om Mersennes tal $M = 2^p - 1$ är mera känt än vad jag i en föregående uppsats (Elementa 1940, sid. 209) meddelat. I strid mot Mersennes påstående har man funnit, att M är primtal för $p = 61, 89$ och 107 men ej för $p = 67$ eller 257. Sålunda är M primtal för $p = 1, 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107$ och 127. Utöver de faktorer, som anges av Schmidt (Elementa 1928, sid. 10), har

man funnit följande faktorer P. (Där redan Schmidt givit en faktor, anges denna inom parentes.)

p	P	p	P
67	193 707 721; 761 838 257 287	163	150 287
71	228 479; 48 544 121; 212 885 833	173	730 753
113	(3391); 23279; 65993	239	(479); 1913; 5737
151	(18121); 55871	251	(503); 54217

Vidare har man bevisat, att M är ett sammansatt tal för $p = 101$, 103, 109, 137, 139, 149, 241 och 257. Outredda äro ännu fallen $p = 157$, 167, 193, 199, 227 och 229.

För Fermats tal $F = 2^{2^n} + 1$ känner man följande faktorer:

n	P	n	P
5	641; 6 700 417	18	$2^{20} \cdot 13 + 1$
6	274 177; 67 280 421 310 721	23	$2^{25} \cdot 5 + 1$
9	$2^{16} \cdot 37 + 1$	36	$2^{79} \cdot 5 + 1$
11	319 489; 974 849	38	$2^{41} \cdot 3 + 1$
12	$2^{14} \cdot 7 + 1$; $2^{16} \cdot 397 + 1$; $2^{16} \cdot 7 \cdot 139 + 1$	73	$2^{75} \cdot 5 + 1$

Även för $n = 7$ och 8 har man bevisat, att F är ett sammansatt tal.

För talen $N = \frac{1}{3}(2^p + 1)$ har jag funnit en del nya faktorer. De inom parentes stående ha förut angivits.

p	P	p	P
59	(2833); 37171	173	347; 4153
97	(971; 1553); 31817	181	1811
113	227	193	6563
131	1049	211	4643
137	1097; 15619	233	467; 27961
149	1193	239	1913
157	15073		

Utom dessa faktorer och de i 23 årg. sid. 211 och 214 och 24 årg. sid. 33 och 34 angivna finnes ingen faktor $< 100\,000$ till något tal N, för vilket $p \leq 257$. För $p = 31$ är N ett primtal. För $p = 29$, 37 och 41, där en faktor är resp. 59, 1777 och 83, är den andra faktorn ett primtal. Detsamma gäller om den tredje faktorn för $p = 59$.

Från infrarödfotografiens område.

Av **HELMER BÄCKSTRÖM.**

Om man bortser från de allra första decennierna, kan fotografiens hittillsvarande något mer än hundraåriga historia karakteriseras som en mödosam kamp om våglängderna. Medan ögat har sin största känslighet för gult ljus och känsligheten sedan avtager såväl åt det röda som det blå hållet i spektrum (fig. 1 översta diagrammet), visade sig det ursprungliga fotografiska materialet praktiskt taget okänsligt för de långvågiga strålarna och ägde endast känslighet för blått och violett ljus samt för den närmast därintill i spektrum belägna ultravioletta strålningen.[1] På grund härav fick man redan från början göra en »rabatt» på sina förhoppningar — som en författare uttryckte sig för hundra år sedan. Fotografien kunde ej alls komma till rätta med färgerna, ja ej ens översätta dem i en svart-vit tonskala, som något så när följde med färgernas ljushetsvärden. Blå färger återgåvos alltid för ljusa, röda och gula alltid för mörka. Jag kan i detta sammanhang erinra om de misslyckade bilder av svenska flaggan — ett mörkt kors på ljus botten — som man ibland än i dag kan få se och som då vittna om obotlig efterblivenhet hos resp. fotografer.

Länge trodde man, att halogensilverplåtens oförmåga att reagera för gulgrönt, gult och rött ljus — dess »färgblindhet» som man plägar uttrycka det — var obotlig. År 1873 visade emellertid professor H. W. Vogel vid Tekniska Högskolan i Berlin-Charlottenburg, att så ej var fallet. Om man infärgade ytan av bromsilverkristallerna i den fotografiska plåten med vissa färgämnen (s. k. *sensibilisatorer*), som absorbera de andra ljussorterna, så kan man i vissa fall få detta absorberade ljus att påverka även bromsilvret. Man har då utökat plåtens spektrala *egenkänslighets*område med det genom sensibilisatorn tillförda känslighetsområdet.

Vogel lyckades närmast bereda plåtar, som utöver den ursprung-

[1] Detta hänger samman därmed, att bromsilver såsom varande ett vit*gult* ämne är praktiskt taget fullständigt genomskinligt för ljus av större våglängder och först får en märkbar absorption i blått, violett och ultraviolett. Endast *absorberat* ljus kan utöva kemisk verkan (Grotthus-Drapers lag, 1817 och 1839 resp.).

liga känsligheten för blått, violett (och ultraviolett) även hade ett nytt känslighetsområde i gulgrönt (diagram *c* i fig. 1). Sådana plåtar kallades *ortokromatiska* — vilket betyder »färgriktiga» — en våldsam överdrift. I själva verket är ju gulkänsligheten (jämför figur 1 *c*) rätt ringa i förhållande till blåkänsligheten och någon tonriktig återgivning av färgernas ljushetsvärden kan det ej bli fråga om. Med tillhjälp av en *gulskiva* framför kamerans objektiv kunde man dock minska det blå ljusflödet och nå rätt så korrekta resultat — utom för rött.

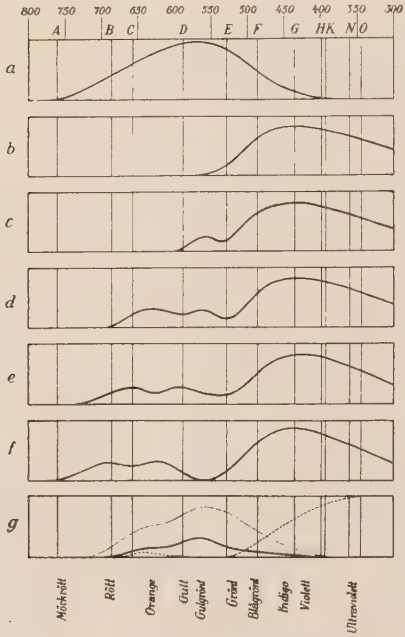


Fig. 1. Grafisk framställning av ögats och med olika färgämnen sensibiliserade bromsilverplåtars spektrala känslighet: *a* ögats känslighet; *b* bromsilver utan sensibilisering; *c* bromsilver sensibiliserat med erytrosin, *d* med pinakrom, *e* med pinakromviolett, *f* med dicyanin. Den heldragna kurvan i *g* visar spektrets inverkan på en med pinakrom sensibiliserad plåt vid upptagning genom ett »tonriktigt» kompensationsfilter, vars absorption angives av den streckade kurvan. Den prickade kurvan antyder effekten vid förlängd exponering.

Ett steg vidare togs av Vogels efterträdare i Berlin-Charlottenburg, professor A. Miethe 1902, vilken lyckades finna nya sensibiliserande färgämnen, som praktist taget utsträckte känsligheten över hela det synliga området. Dylikt material kallas *pankromatiskt*, d. v. s. känsligt för alla färger.

Det av Miethe funna sensibilisatorfärgämnet var etylrött men redan efter några år fann W. König (1905) ännu bättre sensibilisatorer i *dicyaniernas* färgämnesgrupp (senare ofta kallad polymetinfärgämnen). Denna grupp blev av utomordentlig betydelse ej endast för framställning av allt förstklassigare pankromatiskt material, utan även därför att den utgjorde utgångspunkten för det framgångsrika strävandet att bygga upp nya och mer komplicerade färgämnen, vilka kunde sensibilisera det fotografiska materialet för allt större våglängder ut över det synliga spektrums gräns.

Redan det ursprungliga dicyaninet, vars sensibiliseringsmaximum låg i rött och var mycket flackt, förlänade materialet en svag känslighet också för infrarött, och med detta material togs på sin tid spektrumbilder ända upp till 11 000 Å. Den nya utvecklingen satte emellertid in omkr. 1920. Början gjordes med sen-

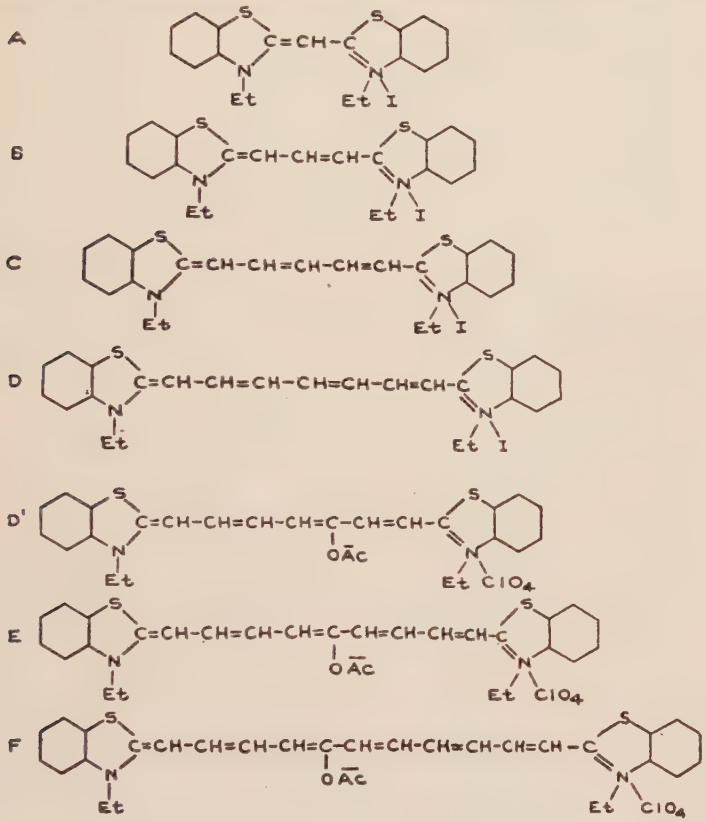


Fig. 2. Formler för sju sensibiliseringsfärgämnen av polymetinfärgämnenas klass. De cykliska kärnorna äro i figuren av benztiazoltyp, men åtskilliga andra möjligheter finnas; så kan exempelvis S-atomen ersättas med O, Se, C, etc.

sibilisatorämnet *kryptocyanin* (Adams & Haller 1919) och *neocyanin* (H. T. Clarke 1925), vilka ämnen från omkr. 1928 funnits i handeln. Senare kom *xenocyanin* 1932 och många andra färgämnen, varigenom sensibiliseringsmaximum skjutits fram åtskilligt över 10 000 Å.

Framstegen betingas därav, att man under de båda senaste decennierna lyckats klara cyaninernas (polymetinfärgämnenas) kemi och förmått syntetisera mer komplicerade ämnen av likartad typ (formlerna, fig. 2). Dessa ämnen karakteriseras därav, att deras molekyler bestå av två cykliska radikaler av visst slag (alkylerade kinolinringar, indoler, benztiazoler, etc., varav den ena ringen måste ha kinoid form), vilka cykliska radikaler förbindas av ett udda antal metingrupper (— CH =). Enligt engelsmannen Kendall skulle det överhuvudtaget vara karakteristiskt för alla kända sensibilisatorer, att deras byggnad är $R' — (CH = CH)_n — CH = R''$, där R′ är en positiv envärdig radikal, R″ en tvåvärdig negativ. Se vi nu närmast på dicyaningruppen, så var den ursprungliga pankromatiska sensibilisatorn (sensibiliseringsmax. i rött) med tre metin-grupper enklast byggd, likaså voro kryptocyaninet (från Kodak) och det därmed identiska rubrocyaninet (från Agfa) med sensibiliseringsmax. vid 7 400 Å av detta slag. Neocyaninet (från Kodak) och allocyaninet (från Agfa) hade redan fem metingrupper och sensibiliseringsmax. vid 8 300 Å. Senare ha sensibiliseringsämnen med 7, 9, 11 och 13 metingrupper framställts och kommit till användning. Ju längre polymetinkedjan är, desto längre ut i ultrarött förskjutes sensibiliseringsmaximum.

Det infrarödkänsliga materialet har tydligen två känslighetsområden, nämligen dels det för allt bromsilvermaterial gemensamma känslighetsområdet i blått, violett och ultraviolett (bromsilvrets egenkänslighetsområde), dels det speciella känslighetsområdet i infrarött. Däremellan finnes alltså en kraftig känslighetslucka. Då känsligheten alltid är vida starkare i egenkänslighetsområdet i violett och blått, så måste sådan strålning medelst ett lämpligt filter hindras från att komma till verkan, om tydlig infrarödeffekt skall ernås vid fotograferingen. Lämpligen kan filtrets absorptionsgräns ligga någonstädes i känslighetsluckan. Valet av filter är i allmänhet föga kinkigt. Man kan sålunda oftast mycket väl begagna ett filter, som genomsläpper rött ljus (s. k. *rödfilter*) och behöver som regel ej välja ett strängare *svartfilter*, som utestänger hela det synliga området. Endast om man icke önskar utnyttja hela sensibiliseringsområdet utan lägger vikt vid att endast de mer långvågiga strålarne komma till verkan, endast då måste ett noggrannare filterval ske.

Ju längre våglängder det ljuskänsliga materialet sensibiliserats för, desto mindre blir dess hållbarhet. Medan sålunda den saluförda filmen för det närmaste infraröda området kanske har 6 månaders hållbarhet, utgör denna mahända blott tva veckor för plåtar med känslighetsmax. vid 10 500 Å. Detta vid vanlig rums-

temperatur; genom förvaring i kylskåp eller ännu bättre på kolsyresnö kan samma material begagnas efter vida längre tid, t. o. m. efter flera månader.

Den ringa hållbarheten hos materialet utgör ett allvarligt hinder för ett längre inträngande inom det infraröda området med fotografiska hjälpmedel. Var gränsen för den fotografiska metoden ligger har varit föremål för livlig diskussion, och man har väl ej nått full enighet. Enligt M. Czerny skall gränsen emellertid ligga redan vid c:a 20 000 Å. Att sensibilisera för högre våglängder skulle redan vara olämpligt därför, att vid vanlig temperatur den svarta strålningen då skulle bli störande. Slöjningen av materialet skulle därför bliva så kraftig, att arbetet med materialet bleve illusoriskt. — Jag håller mig här till de *direkta* fotografiska me-

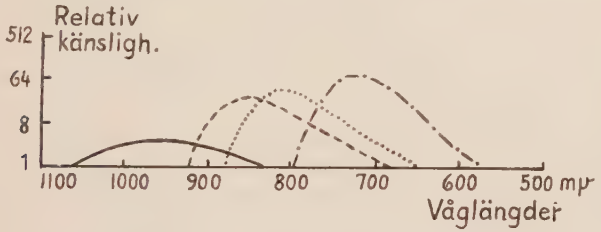


Fig. 3. Spektrala känsligheten för fyra ultrarödkänsliga Agfa-plåtar.

toderna. Det finnes emellertid även indirekta metoder, där man fotograferar något fenomen, som förorsakats av den långvågiga värmestrålningen. Då härvid »vanligt» fotografiskt material kan begagnas, vilket ju besitter stor hållbarhet, så föreligger därvid ej en sådan gräns. På dylika metoder skall jag likväl icke ingå i denna uppsats.

Det finnes emellertid även ett annat förhållande, som försvårar den direkta infrarödfotografiens framträngande mot längre våglängder. Med stor lagbundenhet har det nämligen visat sig, att *ju längre in i det infraröda området sensibiliseringsmaximum drives, desto svagare blir sensibiliseringen* (jämför fig. 3). *Därmed följer också, att exponeringstiderna komma att växa* och till slut bli så långa, att även härigenom en praktisk gräns för den fotografiska verksamheten nås. Så visade sig de erforderliga exponeringstiderna för fyra Agfaplåtar med sensibiliseringsmaximum i resp. rött, vid 7 100 Å, 8 550 Å och 9 600 Å förhålla sig som 1 : 10 : : 100 : 10 000.

För att något motverka de långa exponeringstiderna är det ganska vanligt att strax före användningen *hypersensibilisera*

materialet. Därmed menas, att plåtarna eller filmen badas i en lösning, som i möjligaste grad ökar känsligheten — på bekostnad av materialets hållbarhet. Då emellertid materialet redan vid sin tillverkning i någon mån hypersensibiliserats, kan den nya behandlingen ej höja känsligheten mer än 2—4 gånger (vid enstaka sorter kanske upp till 8 gånger). På sistone har det ryktats, att ett par av de stora fabrikerna av film lyckats framställa 10 gånger känsligare infraröda material än tidigare; det är möjligen därvid fråga om en hypersensibiliseringsmetod. Varken dylikt material eller ingående uppgifter om detsamma står emellertid att erhålla i vårt land i dessa tider.

Samtidigt med att den relativa känsligheten nedsättes, när sensibiliseringsmaximum skjutes längre ut i infrarött, sker en *förflackning av sensibiliseringskurvan* (se fig. 3). Känsligheten blir sålunda rätt ringa men spridd över ett större våglängdsområde och avtager särskilt långsamt åt det långvågiga området, vilket man med fördel begagnar sig av vid spektrografiska arbeten. Redan med hjälp av det ursprungliga dicyaninet (känslighetsmax. i rött) kunde man ju komma till rätta med spektrallinjer över 11 000 Å. Med de nyare plåtarne kan man givetvis nå vida längre.

Vid infrarödfotografering kan man använda vanlig glasoptik — såvida denna ej är specialkonstruerad, bör dock hänsyn tagas till fokusdifferensen. Av vikt är även att undersöka kamerans tillförlitlighet. Många material, varav kamerabälgar, kassetter o. d. tillverkas, äro nämligen ganska genomskinliga för infraröd strålning — även om de äro fullt säkra för vanligt ljus. Så gäller detta ofta för skinnet i bälgen samt för ebonit eller trä (jämför fig. 18).

Infrarödkänsligt material framkallas helst »på tid» i fullkomligt mörker, men givetvis kan man desensibilisera detsamma före framkallningen, som då kan ske vid rätt starkt ljus. Är mörkrumslampan säker mot infraröda strålar, skulle man f. ö. kunna framkalla materialet utan någon förbehandling — så plägar dock ej vara fallet.

Övergå vi nu till att diskutera infrarödfotografiens användningsområden, så äro dessa ganska många och omfatta såväl rena spektrografiska arbeten som användningar för avbildningsändamål. Jag skall särskilt uppehålla mig vid de senare. Ifråga om spektralarbetena skall jag icke säga stort mer än att det infrarödkänsliga materialet varit av stort värde, trots att det ej rår på fullt en oktav av det infraröda området. Som exempel må anföras, att man med infrarödfotografiens hjälp erhållit viktiga upplysningar om atmosfärens sammansättning på olika planeter. Vidare har

man genom studier över rotationsspektrum för syre vunnit kännedom om dess olika isotoper (atomvikterna 16, 17 och 18) och deras blandningsförhållanden.

Infrarödfotografiens egentliga användning är dock för avbildningsändamål. Då den infraröda strålningen är osynlig, kan ett rum verka fullkomligt mörkt för ögat även om det är rikligt »belyst» med infrarödstrålning. På grund härav har också, i synnerhet för ett tiotal år sedan, mycken reklam förekommit i dagspress och populärtidskrifter om de nya möjligheterna att »fotografera i mörker». I själva verket har dock dylik fotografering mest kuriositetsintresse.

Som exempel på en dylik fotografering visas här ett självporträtt från år 1932 av docent John Hertzberg (fig. 4). Belysningen utfördes med en mörkrumslykta, innehållande två glödlampor på resp. 40 och 25 watt bakom ett *svartfilter*. Bländaren var 1 : 4,5 och exponeringstiden 30 sekunder. Givetvis kan man med kraftigare strålkälla och ljusstarkare optik taga ögonblicksbilder. — Man har också föreslagit inmontering av automatiska anordningar av sådant slag på sådana passager exempelvis i en bank, som en eventuell tjuv måste passera; denne skulle i så fall fotograferas utan att veta om detsamma. Huruvida någon dylik anläggning kommit till användning är mig dock obekant.

Vi kunna i fig. 4 även lägga märke till gipsornamentet och det elektriska värmeelementet. Nästa bild (fig. 5) har utförts vid strålningen från detta värmeelement. — I förbigående kan nämnas, att man sökt bestämma temperaturen hos mer eller mindre svarta kroppar genom att fotografera dem i deras egen utstrålning samt efteråt uppmäta den erhållna svärtningen. Detta går också för sig, om temperaturen är någorlunda hög, men känsligheten är för ringa för att densamma skall kunna utnyttjas, när temperaturen sjunker.

Man kan även inmontera blixtlampor i svartglaslyktor. Dylika anordningar tillgrepos av de engelska pressfotograferna för att kunna få reportagebilder på mörklagda orter — speciellt under den stora flygoffensiven mot England år 1940.

Infrarödfotografiens kanske hittills största triumfer hava nåtts vid *fotografering på mycket stora avstånd*. Så ha ett stort antal utomordentligt detaljrika och tydliga bilder publicerats, visande bergskedjor o. d. avbildade på kanske 50 svenska mils avstånd eller mer. Som bekant kan man icke med blotta ögat iakttaga någonting alls på dylika avstånd, även om man befinner sig på tillräcklig höjd för att jordens krökning ej skall hindra sikten. Orsaken härtill ligger i *avståndsdiset*.

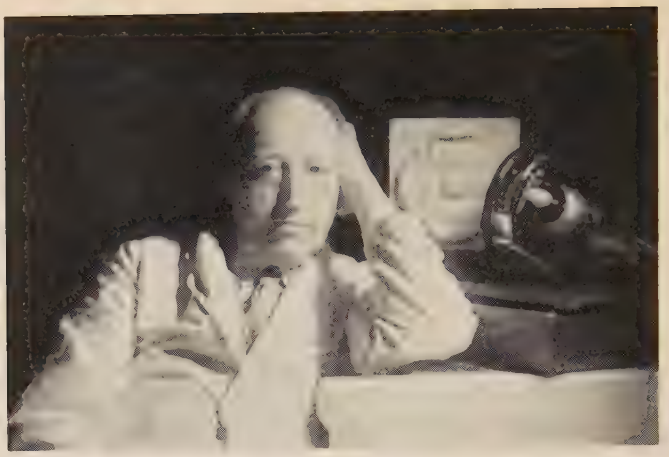


Fig. 4. Porträtt upptaget i infraröd strålning.

Fig. 5. Gipsornament fotograferat i »värmestrålningen» från en värmeplatta.

Dettas verkan beror därpå, att de små dispartiklarne sprida ljuset åt alla håll och därför tjänstgöra som sekundära ljuskällor (fig. 6). Diset verkar alltså på samma sätt som en tunn, ljus tyllgardin, vilken är inskjuten mellan iakttagaren och det föremål, som skall observeras. En dylik gardin minskar de observerade kontrasterna hos det iakttagna föremålet. Är disskiktet av stort

djup, utplånas kontrasterna helt, och det fjärran föremålet försvinner fullständigt i detsamma. — I fig. 6 tänkas två ytor hos objektet ha ljustätheterna I_1 och I_2 resp. Kontrasten karakteriseras då av $\log \frac{I_1}{I_2}$, om ingen disverkan förefinnes. Är emellertid disets ljustäthet I_3, blir kontrasten endast $\log \frac{I_1 + I_3}{I_2 + I_3}$, vilket vid stora värden på I_3 närmar sig värdet 0.

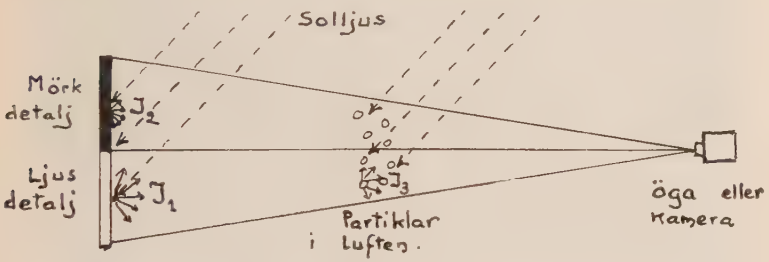


Fig. 6. Schematisk framställning av avståndsdisets uppkomst.

Enligt Rayleigh är nu ljusspridningen vid *mycket små* partiklar omvänt proportionell mot fjärde digniteten av ljusets våglängd. Disets ljus kommer sålunda att till alldeles övervägande grad vara kortvågigt (blått och violett ljus). Då det röda ljuset har c:a dubbelt så stor våglängd som det violetta, så betyder detta, att det röda ljusets spridning endast är ungefär $^1/_{16}$ av det violettas. Ännu mindre bör spridningen bliva i infrarött. Redan genom fotografering på pankromatiskt material med användning av rödfilter eller ännu bättre genom infrarödkänsligt material och svartfilter kan diseffekten salunda starkt nedsättas. Detta framgår tydligt av bildserien fig. 7—9, som är upptagen av firman Ilford i England på resp. osensibiliserat material, pankromatiskt material och infrarödkänsligt sådant.

Infrarödfotografering har fått mycket stor användning överallt, där det gäller att få klara och tydliga bilder trots dis och stora avstånd, exempelvis för geografiska eller militära ändamål. Ett märkligt exempel på dylik fotografering (fig. 10) utfördes för en del år sedan i Argentina av kapten A. W. Stevens i amerikanska flygvapnet. Denne steg per flygmaskin upp till 6 500 m höjd, vände kameran åt det håll, där han visste Anderna vara belägna, och fotograferade. Ej ett spår kunde direkt iakttagas av bergskedjan. Bilden (fig. 10) visar emellertid densamma tydligt nog med toppen

Fig. 7–9. Tre bilder av samma motiv, upptagna på vanligt negativmaterial, resp. pankromatiskt och infrarödkänsligt. Foto: Ilford Ltd.

Aconcagna till höger i bilden. Avståndet var 47 svenska mil. Bilden är även intressant i så måtto, att horisontlinjen — som motsvarar 112 km längd $\frac{1}{360}$ av jordens omkrets — visar krökning av rätt storleksordning. Detta torde vara första gången, som jordytans krökning upptagits fotografiskt. Eljest är bilden intet avståndsrekord; vida större avstånd ha senare besegrats.

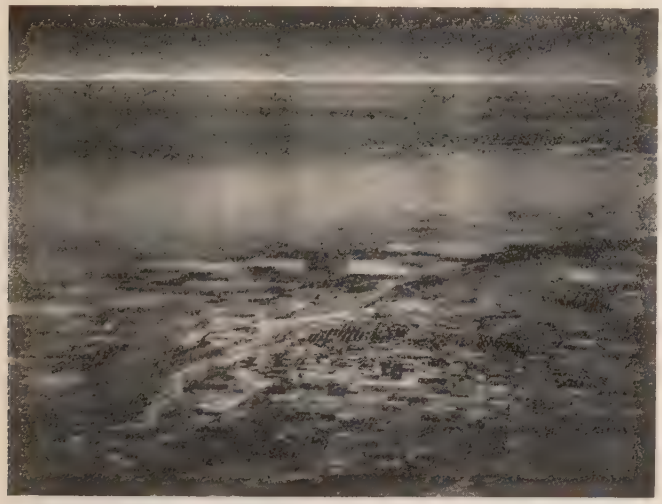


Fig. 10. Infrarödfotografi från 6,5 km höjd. I bakgrunden Anderna på 470 km avstånd.

Ultrarödfotografiens förmåga att genomtränga diffusserande medier ha också utnyttjats vid fotografering av olika planeter, varvid dessas atmosfärer genomträngas och bättre ytdetaljer ernås. Genom jämförelser mellan bilder, tagna i violett och i infrarött far man möjligen också en viss uppfattning om atmosfärens dimensioner. Man har också vid infrarödfotografering av Orionnebulosans område nästan »bortfotograferat» denna och i stället fått fram de där belägna stjärnorna.

Den lätthet, varmed det infrarödkänsliga materialet rår på avstandsdiset, har uppväckt allmänna förhoppningar att kunna utnyttja infrarödfotografien vid navigering i tätare dimma och tjocka. I stort sett ha dock dessa förhoppningar kommit på skam. Orsaken ligger däri, att vid större dispartiklar icke längre nagon nämnvärd olikhet i ljusspridning erhålles för olika våglängder

Fig. 11—12. Fotografier i vitt ljus (överst) och i infraröd strålning (nederst). Observera venernas tydliga framträdande å den undre bilden, medan den mörka ringen kring bröstvårtorna och andra hudpigmenteringar äro försvunna. Foto: J. Haxthausen.

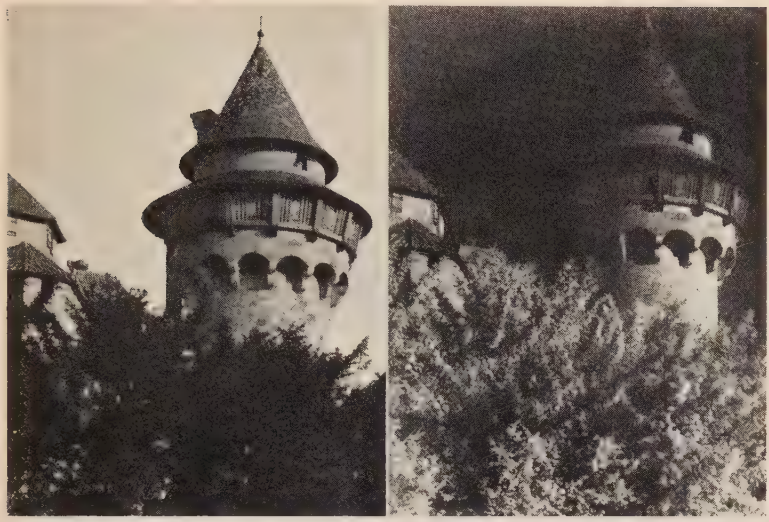


Fig. 13—14. Månskenseffekt. — Vänstra bilden tagen på vanligt sätt, den högra på infrarödkänsligt material. Båda bilderna upptagna vid middagstid en dag med klar blå himmel. Foto: Dr O. Helwich (efter Nord. Tidskr. f. fot.).

— Rayleighs nyss nämnda formel är härledd under förutsättning att partiklarnes storlek understiger våglängden. Detta är endast fallet vid dis i egentlig mening (partikelstorlek $0{,}01 - 1\,\mu$), medan redan dimma och moln ha partikelstorleken $5 - 50\,\mu$, duggregn $0{,}1 - 0{,}5$ mm etc.

Ifråga om luftdiset äro de ljusspridande partiklarne fördelade i mycket tjocka luftskikt. Liknande effekter, som med infraröd-

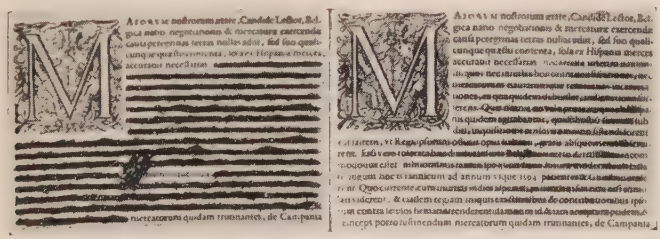


Fig. 15. Del av en boksida, å vilken inkvisitionstidens censorer gjort texten oläslig genom överstrykning. Bilden till vänster fotografi på vanligt negativmaterial, till höger på infrarödkänsligt.

fotografiens hjälp erhållits vid dis, kunna emellertid även ernås vid starkt diffuserande skikt av mindre tjocklek. Så har exempelvis dr H. M. Dekking i Nijmegen fotograferat ögats pupill vid sådana ögonsjukdomar, då hornhinnan blivit porslinsaktigt ogenomskinlig. Likaså kan man fotografera under huden belägna vener och därmed iakttaga djupt liggande bråck, som eljest varit svåra att observera (prof. Haxthausen i Köpenhamn m. fl.) — jämför fig. 11—12. Observera även, hur röda hudfläckar (eksemer

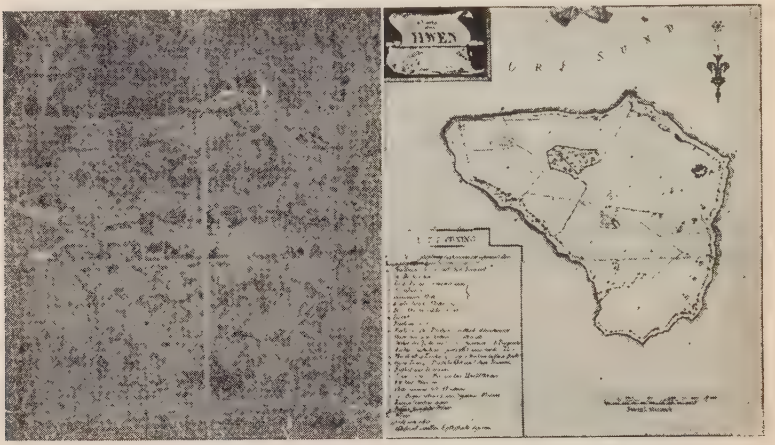


Fig. 16—17. En gammal karta över Hven, tillhörig astron. observ. i Lund. Bilden till vänster är fotograferad i vitt ljus, bilden till höger i infraröd strålning. Foto: G. Hultzén.

o. d.) totalt »bortfotograferas» i infrarött — de äro genomskinliga för dylik strålning.

Under vissa omständigheter kan man också fotografera brevens text genom vita kuvert. Likaså kan den ursprungliga fotografiska bilden reproduceras genom det mjölkiga svavelsilverskikt, som med tiden lagt sig över gamla daguerreotyper (lektor Björn Svenonius).

Himlens blå färg uppkommer ju genom luftmolekylernas starkare spridning av det kortvågiga solljuset än det mer långvågiga. Då luftpartiklarna sålunda endast ytterst föga sprida den infraröda strålningen, kommer en infrarödfotografi av den klarblå himlen vid middagstid att visa denna svart. Detta kan man använda sig av för att framställa »natteffekter» (»månskenseffekter») t. ex. vid filmning (jämför fig. 13—14). Observeras bör emellertid i så fall, att man väljer ett motiv med icke alltför utpräglad grönska, emedan klorofyllet starkt återkastar infraröd strålning.

Gräsmattor, lövträd o. d. verka därför nästan snötäckta på infrarödfotografier (jämför även fig. 9).

Redan inom den »vanliga» fotografien kan man ju genom att utnyttja olika våglängdsområden (gulskivor och andra ljusfilter) helt förändra tonvärdena för de olika motivdelarna. Jämför exempelvis svenska flaggans utseende i bild vid användning av osensibiliserad film (blåfotografering) resp. pankromatisk film med gulskiva. Tydligt är att övergången till infrarödfotografering skall medföra högst betydande förändringar i sådant avseende (jämför exempelvis den nyss nämnda klorofylleffekten vid grönska).

Fig. 18. Husparti, fotograferat tvärs genom kassettlocket. Foto: H. Bäckström och Rob. Johansson.

Många skrivbläck och stämpelfärger — ej alla — äro sålunda mycket genomskinliga för infraröd strålning. Därmed framställda texter, stämplar etc. kunna i så fall »bortfotograferas», så att underliggande text med annat, ej genomskinligt bläck tydligt framträder. Ett intressant exempel härpå ha vi i fig. 15, som visar ett litet stycke ur en foliant, där under inkvisitionstiden herrar censorer dragit svarta streck över uttalanden, som de ansågo att människorna ej borde känna till men som vi nu lätt kunna läsa. — På samma sätt »avlägsnar» infrarödfotografien lätt det för ögat ogenomskinliga, mörkbruna skikt, vartill under tidernas lopp fernissan på gamla kartor förvandlats (fig. 16—17). Likaså kunna fuktskadade och därför brunfläckiga boksidor, kopparstick etc. fotografiskt avbildas i sin ursprungliga renhet.

Överhuvudtaget äro många för ögat svarta och ogenomskinliga ämnen i hög grad transparenta för infrarött. Som ytterligare exempel kan bl. a. påpekas, att insekternas kitinpansar förhålla sig så, vilket man begagnar sig av vid mikrofotografering av dylika

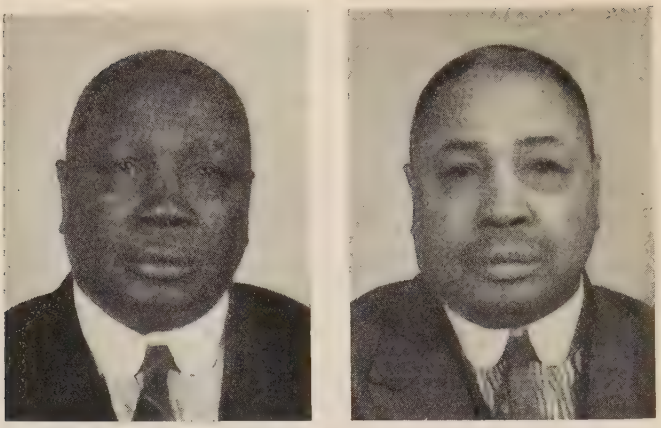


Fig. 19 –20. Negerporträtt upptaget på vanligt sätt och på infraröd-känsligt negativmaterial. Foto: Ilford Ltd.

smärre varelser. Likaså användes infrarödfotografering vid studier över stenkolsflorans rester. — Ett intressant fall visar fig. 18, som upptagits vid K. Tekniska Högskolan i Stockholm av förf. och försteassistent R. Johansson. Den visar en fotografi av husen på andra sidan gatan, tagen tvärs genom det icke utdragna kassett-locket av ebonit. På samma sätt äro mahognykassetter etc. genom-skinliga för infrarött — som redan påpekats.

Helt säkert har mången av mina läsare funderat över den stackars negerns svarta färg, vilken ju borde vara den möjligast olämpliga under tropikernas sol. Fig. 19—20 visa emellertid att så ej är fallet. Den infraröda strålningen återkastas i hög grad. — De angivna exemplen må räcka för att visa infrarödfotografiens mångsidiga användbarhet.

Begreppet kemisk potential i kemiundervisningen.

Av **LARS GUNNAR SILLÉN.**

I det följande skall visas, hur man med hjälp av några enkla termodynamiska begrepp kan ställa elektrokemin och jämviktsläran på gemensam grund och därigenom vinna en tilltalande enhetlighet i den fysikaliska kemins lärobyggnad. Fördelarna av det nya framställningssättet framgå kanske bäst, sedan man skärskådat ett par av tankesvårigheterna i den äldre, »energifria» framställning, som fortfarande bjudes i skolorna, stundom även på universitets- och högskolestadiet.

För massverkans lag ges endast en kinetisk härledning, som visserligen är mycket åskådlig men tyvärr endast gäller för ideala gaser och ideala lösningar. Lärjungen får intet grepp om vad som orsakar avvikelserna från massverkans lag i icke-ideala system, t. ex. starka lösningar. Kanske får han veta, att man i sådana fall ersätter koncentrationerna med något som kallas för aktiviteter, men de definieras ej; förklaringen att man inför dem »för att det skall stämma» är inte särskilt tillfredsställande och väcker lätt misstanken att något slags fusk föreligger.

Vid flerfasjämvikter (heterogena jämvikter), såsom $C + CO_2 \rightleftarrows 2CO$ eller $CaCO_3 \rightleftarrows CaO + CO_2$, tillämpas massverkans lag på gasfasen. Man måste då antaga, att de fasta ämnena delvis förgasas. I många fall, t. ex. $CaCO_3$, är antagandet av gasmolekyler rentut motbjudande för tanken, i andra är ångtrycket så lågt, att man har svårt att tro, att det kan bestämma jämvikten. T. ex. torde vid 700° C, där jämvikten med CO och CO_2 lätt inställer sig, fast kol(grafit) ha ett ångtryck av storleksordningen 10^{-30} atm, d. v. s. en enstaka kolatom på över hundratusen kubikmeter!

I elektrokemin förklaras elektrodpotentialen metall/metalljonlösning — om den överhuvudtaget förklaras — med metallens »lösningstryck», vilket som bekant i allmänhet har antingen orimligt höga eller orimligt låga talvärden. Det torde vara svårt att få en gripbar bild av detta hjärnfoster; om möjligt overkligare är »elektrontrycket» vid redoxelektroder.

Dessa och atskilliga andra »oenergetiska» tankegangar kunna visserligen en gång ha varit till hjälp vid vetenskapens utveckling; men detta är intet skäl att behålla dem nu, när faktiskt en redig helhetssyn på den fysikaliska kemin har vuxit fram.

Grundbegrepp.

Storheten *fri energi* eller termodynamisk potential infördes av J. W. Gibbs och betecknas numera till hans ära med G. Enligt definition är $G = U - TS + pV$, där U = inre (totala) energin, S = entropin, T = abs. temp., p = trycket och V = volymen hos den eller de kroppar (det *»system»*) man betraktar.[1] Siffervärdet av G kan lika litet som den inre energins (U), angivas exakt, medan dess ändring, $\triangle G$, t. ex. vid ett kemiskt förlopp kan mätas på olika sätt. Det är med dessa ändringar $\triangle G$ vi närmast skola syssla; man kan uttrycka dem i vilket energimått man vill, t. ex. cal, joule eller erg.

Nyssnämnda definition som kanske verkar avskräckande skola vi ej göra omedelbart bruk av. Vi skola emellertid i det följande draga nytta av ett par egenskaper hos G och $\triangle G$:

1) Värdet av G i ett system av kroppar beror blott av dessas tillstånd för ögonblicket (sammansättning, tryck, temp osv.), ej av deras föregående öden. Med andra ord är G en *tillståndsfunktion* liksom U, varav följer, att $\triangle G$ vid en viss, t. ex. kemisk ändring blott beror på begynnelsetillstånd och sluttillstånd, ej på de mellanled som kunna ha förekommit. Motsvarande lag för $\triangle U$ är den välkända Hess' lag.

2) Om ett systems tillstånd ändras på något sätt, t. ex. genom ett kemiskt förlopp, och *tryck och temperatur* hållas *konstanta*, så är minskningen i G, $-\triangle G$, lika med det *största möjliga nyttiga arbete* man kan få ut genom ändringen. Det nyttiga arbetet w' få vi, om vi från hela det mekaniska eller elarbete vi kunna få ut, w, draga bort det »onyttiga» arbete $p\triangle V$ som uträttas mot det konstanta yttre trycket ($\triangle V$ = volymökningen):

$$w' = w - p\triangle V; \qquad w'_{max} = -\triangle G \quad (p, T \text{ konst.}). \tag{1}$$

3) Om man genom lämpliga anordningar kan få ut arbete ur en viss förändring (d. v. s. $w'_{max} > 0$, $\triangle G < 0$) vid konstant p och T, så följer av andra huvudsatsen, att ändringen i fråga kan ske av sig själv. Ett exempel från mekaniken är en kropps fall i tyngdkraftsfältet. En ändring som däremot fordrar tillförsel av

[1] Några författare begagna uttrycket »fri energi» för en annan storhet, »arbetsinnehållet», $A = G - pV = U - TS$. I äldre skrifter nyttjas ofta bokstaven F istf. G.

arbete ($w'_{max} < 0$, $\triangle G > 0$), kan omöjligen ske utan yttre ingripande (ex. rörelse av en kropp mot tyngdkraftfältet). Mellan dessa båda möjligheter ligger det fall, då $\triangle G$ vid en ändring skulle vara noll. Då råder *jämvikt*, emedan ingen drivkraft till ändring finns. Ex.: förskjutning av två lika tunga vikter i var sin ända av ett rep över en trissa.

Villkoret för jämvikt är sålunda

$$\triangle G = 0 \text{ vid varje tänkbar ändring } (p, T \text{ konst.}). \qquad (2)$$

För att kunna tillämpa (1) och (2) på kemiska förlopp är det lämpligt att införa en storhet som anger *den fria energin hos en mol* (g-molekyl, g-atom, g-jon) av ett ämne. Denna storhet, som även den införts av Gibbs, kalla vi *kemisk potential*; vi beteckna den med μ_i. (De olika kemiska ämnen vi betrakta få vi tänka oss numrerade med i (index) $= 1, 2, 3 \ldots$) Det gäller om μ liksom om G att man ej känner dess verkliga belopp men väl kan mäta dess ändringar.

För rena fasta eller flytande ämnen samt för gaser bereder begreppet fri energi/mol knappast några tankesvårigheter. I en lösning är den kemiska potentialen för ett ämne lika med dess »partiella molära fria energi», $\mu_i = \left(\frac{\partial G}{\partial n_i}\right)_{pT}$. Man behöver emellertid inte alltför mycket grubbla på den matematiska innebörden av en partiell derivata. Det väsentliga är, att då en mol av ämnet n:r i föres till (tages från) en (mycket stor) blandning eller lösning, så ökas (minskas) dennas fria energi med beloppet μ_i.

Vid *konstant temperatur* gälla mycket enkla lagar, som äro av samma form i ideala gaser och ideala lösningar:

rent fast el. flytande ämne	$\mu_i =$ konst.	
ideal gas	$\mu_i = \mu_i^0 + RT \ln p_i$	$p_i =$ deltryck
ideal blandning (lösning) av icke-elyt(er)	$\mu_i = \mu_i^0 + RT \ln N_i$ eller $\mu_i = \mu_i^0 + RT \ln m_i$	$N_i =$ molbråk $m_i =$ mol. löst ämne/1000 g lösmedel
ideal lösning av elyt	$\mu_i = \mu_i^0 + \nu_i RT \ln m_i$	$\nu_i =$ antal joner/formelenhet: 2 för NaCl, 4 för $AlCl_3$ osv. (3)

Formeln för gaser kan man enkelt bevisa genom att räkna ut tryckarbetet vid utvidgning. Den första formeln för ideala blandningar kan härledas statistiskt; om man vill, kan man nyttja den som definition på en ideal blandning. Vid tillräcklig utspädning bli dess bättre alla lösningar närmevis ideala.

I alla dessa formler ingå konstanter μ_i^0, vilkas talvärden vi varken kunna eller behöva veta. När den rörliga termen är noll, d. v. s. $\mu_i = \mu_i^0$, säges ämnet n:r *i* vara i sitt standard- eller *grundtillstånd*. En gas är t. ex. i sitt grundtillstånd vid trycket 1 atm.

I en icke ideal lösning gälla ej dessa enkla formler. Enligt Lewis är det lämpligt att för sådana lösningar införa en ny storhet, *aktiviteten*, som tecknas a_i och definieras med ett uttryck av samma typ som de ideala lagarna:

$$\mu_i = \mu_i^0 + RT \ln a_i, \tag{4}$$

där μ_i^0 (grundtillståndet) för ett löst ämne vanligen väljes så, att vid oändlig utspädning a_i blir $= m_i$. Den ideala lagen (3) blir alltså ett gränsfall av (4). Förhållandet mellan aktivitet och molalitet kallas *aktivitetsfaktor* (aktivitetskoefficient) och tecknas f_i:

$$f_i = \frac{a_i}{m_i}, \quad f_i \to 1 \text{ då } m_i \to 0. \tag{4a}$$

I vissa fall kan det vara lämpligt att i stället för molaliteten använda molbråket N_i. Aktivitetsfaktorn definieras då som $\frac{a_i}{N_i}$.

I en lösning av en elektrolyt kan man ställa upp uttryck liknande (4) för varje jonslag för sig, t. ex.

$$\mu_{Na^+} = \mu_{Na^+}^0 + RT \ln a_{Na^+} = \mu_{Na^+}^0 + RT \ln (f_{Na^+} m_{Na^+}).$$

Det kan nämnas i förbigående, att det är tvivelaktigt om man kan skarpt definiera och mäta ett enstaka jonslags aktivitet. Även närmevärden kunna dock ofta vara nyttiga; isynnerhet användbar är ju vätejonaktiviteten, vars negativa logaritm kallas *pH*.

Emellertid kan man skarpt definiera *medelaktivitet* och *medelaktivitetsfaktor* för en viss *elektrolyt*; den sistnämnda storheten, som tecknas $f_\pm$ är geometriska medeltalet av jonernas aktivitetsfaktorer. För fria energin hos en mol (stark) elektrolyt gäller (om lösningen icke innehåller någon annan elektrolyt med gemensam jon)

$$\mu_i = \mu_i^0 + \nu_i RT \ln (f_\pm m_i), \tag{5}$$

t. ex.

$$\mu_{NaCl} = \mu_{NaCl}^0 + 2RT \ln (f_\pm m_{NaCl}), \quad \mu_{AlCl_3} = \mu_{AlCl_3}^0 + 4RT \ln (f_\pm m_{AlCl_3}).$$

I det följande skola vi, såsom ofta brukas, beteckna molalitet och aktivitet med parentes och klammer, alltså ( ) och { }:

$$m_{Na^+} = (Na^+) \qquad a_{Na^+} = \{Na^+\}.$$

Tillämpning på jämvikter.

Villkoret för kemisk jämvikt är enligt (2), att ändringen i fri energi, $\triangle G$, skall vara noll för alla tänkbara förlopp. Med de uttryck, som ovan givits för fria energien/mol, μ, kunna vi nu omedelbart uttrycka $\triangle G$ i mätbara storheter: deltryck, halter och aktiviteter, och på så vis härleda jämviktslagarna.

a) Ett enkelt fall är jämvikten mellan en gas, t. ex. syre, och en lösning av samma gas t. ex. i vatten. Vi betrakta följande ändring:

(en mol) O_2 (i gasform, deltryck p) $\rightarrow$ O_2 (i lösning, halt m).

Ändringen i fri energi kan skrivas:

$$\triangle G = \mu_{O_2\text{lösn}} - \mu_{O_2\text{gas}} = \mu^0_{O_2\text{lösn}} + RT \ln m - (\mu^0_{O_2\text{gas}} + RT \ln p) =$$
$$= \triangle G^0 + RT \ln \left(\frac{m}{p}\right),$$

där vi sammanfattat de konstanta termerna till en konstant, $\triangle G^0$. Vid jämvikt är $\triangle G = 0$. Detta kan gälla blott, om

$$\frac{m}{p} = K, \text{ konstant vid viss } T.$$

Detta är som bekant *Henrys lag*. På liknande sätt kan *Nernsts fördelningslag* härledas. När ett och samma ämne förekommer i två olika faser, blir tydligen jämviktsvillkoret alltid, att ämnets kemiska potential skall vara lika i de båda faserna. Om så icke är fallet, strävar ämnet att förflytta sig från det område, där det har högre potential — större fri energi/mol — till det, där dess kemiska potential är lägre. Vi se här, att mellan den elektriska och den kemiska potentialen råder en likhet, som väl delvis ligger till grund för valet av den senares namn.

b) På snarlikt sätt kan lösningars ångtryck behandlas. Ovanför en lösning av ett ämne B_2 i ett lösmedel B_1 har lösmedlet ångtrycket p_1. För förloppet

B_1 (lösning, molbråk N_1) $\rightarrow$ B_1 (gas, deltryck p_1)

gäller vid jämvikt

$$\triangle G = \mu^0_{1\text{gas}} + RT \ln p_1 - (\mu^0_{1\text{flyt}} + RT \ln N_1) = \triangle G^0 + RT \ln \left(\frac{p_1}{N_1}\right) = 0.$$

Alltså är förhållandet $\left(\frac{p_1}{N_1}\right)$ alltid konstant vid jämvikt vid en viss temp. Vi se lätt, att denna konstant är lika med det rena lösmedlets ($N_1 = 1$) ångtryck p^0_1. Alltså är

$$\frac{p_1}{p^0_1} = N_1 \left(= \frac{n_1}{n_1 + n_2}\right),$$

vilket är den lättast inlärda skrivarten av *Raoults lag*. Ofta skrives den i stället

$$\frac{p_1^0 - p_1}{p_1} \quad \frac{n_2}{n_1}.$$

c) För att finna villkoret för jämvikt mellan C, CO och CO_2 sätta vi $\triangle G = 0$ för förloppet

$$C + CO_2 \rightarrow 2\,CO$$

$$\triangle G = 2\,\mu_{CO} - \mu_C - \mu_{CO_2} = 2\,\mu_{CO}^0 + 2\,RT \ln p_{CO} - (\mu_C + \mu_{CO_2}^0 +$$

$$+ RT \ln p_{CO_2}) = \triangle G^0 + RT \ln \frac{(p_{CO})^2}{p_{CO_2}} = 0.$$

Uttrycket efter »ln» måste vara en konstant, som vi kalla K_p. Jämviktsvillkoret blir alltså:

$$\frac{(p_{CO})^2}{p_{CO_2}} = K_p, \text{ konst. vid viss } T.$$

På samma sätt finna vi för $CaCO_3 \rightleftarrows CaO + CO_2$ jämviktsvillkoret: $p_{CO_2} = K_p$, konst. vid viss T, och för

$2HJ \rightleftarrows H_2 + J_2$ villkoret $\dfrac{p_{H_2} p_{J_2}}{(p_{HJ})^2} = K_p$, konst. vid viss T.

Vid jämvikt mellan gaser och fasta kroppar förekomma de fasta kropparna ej i jämviktskonstanten helt enkelt emedan deras kemiska potential är konstant vid en viss temp; man behöver icke antaga, att de förekomma i gasform.

d) För kemiska förlopp i ideala lösningar kunna vi härleda jämviktskonstanter, sammansatta av halterna av de reagerande ämnena. Om lösningen icke är ideal, få vi för de lösta ämnena sätta $\mu_i = \mu_i^0 + RT \ln a_i$ enligt (4) och få som jämviktsvillkor, att ett uttryck, innehållande de reagerande ämnenas aktiviteter, skall vara konstant. Som exempel må nämnas syrakonstanterna

$$K_s = \frac{\{H^+\}\{Ac^-\}}{\{HAc\}} \quad \text{och} \quad K_s = \frac{\{H^+\}\{NH_3\}}{\{NH_4^+\}}.$$

e) I en mättad lösning av t. ex. AgCl är för förloppet

$$AgCl\ (fast) \rightarrow Ag^+ + Cl^-\ (i\ lösning)$$

$$\triangle G = \mu_{Ag^+}^0 + RT \ln \{Ag^+\} + \mu_{Cl^-}^0 + RT \ln \{Cl^-\} - \mu_{AgCl\ (fast)} =$$

$$= \triangle G^0 + RT \ln \{Ag^+\}\{Cl^-\} = 0, \text{ varav}$$

$$\{Ag^+\}\{Cl^-\} = K_l, \text{ konst vid viss temp.}$$

Här har jämviktsvillkoret — *löslighetsprodukten* — bevisats utan att man behövt antaga, att molekyler av formeln AgCl finnas i lösningen. I själva verket är AgCl ganska säkert en »stark» elektrolyt och således enligt nutida uppfattning fullständigt spjälkad i joner.

Tillämpning på elektrokemi.

a) Som första exempel på en kemisk strömkälla, en »cell», välja vi

$$-\ \mathrm{Pt},\ \mathrm{H_2}\ /\ m\text{-molal HCl i vatten}\ /\ \mathrm{AgCl},\ \mathrm{Ag}\ +$$

När en Faraday ($1F$) urladdas ur denna cell, sker följande:

$$\begin{array}{ll} \text{vid katoden:} & \frac{1}{2}\mathrm{H_2} \rightarrow \mathrm{H^+} + \mathrm{e^-} \\ \text{vid anoden:} & \mathrm{AgCl} + \mathrm{e^-} \rightarrow \mathrm{Ag} + \mathrm{Cl^-} \\ \hline \text{tillsamman:} & \mathrm{AgCl} + \frac{1}{2}\mathrm{H_2} \rightarrow \mathrm{Ag} + \mathrm{HCl\ (lösn)} \end{array}$$

Detta kemiska förlopp skulle ske av sig självt, om silverklorid och vätgas finge mötas. Nu håller man dem isär och tvingar dem att uträtta ett visst elarbete mot förmånen att få reagera. Det största möjliga nyttiga arbetet, $w'_{\max}$, vid ett cellförlopp vilket som helst är elmängden · EMK $= nFE$ (n det antal Faraday som urladdas). Vi införa detta i (1) och få

$$\Delta G = -w'_{\max} = -nFE. \qquad (6)$$

I vårt särskilda fall är $n = 1$; vi kunna vidare uttrycka ändringen i fri energi, ΔG, som fria energin hos slutämnena minskad med fria energin hos börjämnena:

$$\Delta G = \mu_{\mathrm{Ag}} + \mu_{\mathrm{HCl}} - \mu_{\mathrm{AgCl}} - \frac{1}{2}\mu_{\mathrm{H_2}} = \mu_{\mathrm{Ag}} + \mu^0_{\mathrm{HCl}} + 2RT\ln(f_{\pm} m_{\mathrm{HCl}}) -$$

$$- \mu_{\mathrm{AgCl}} - \frac{1}{2}\mu^0_{\mathrm{H}} - \frac{1}{2}RT\ln p_{\mathrm{H_2}} = -FE.$$

Om vätgastrycket är en atm, försvinner dess logaritm. Vi kunna vidare sammanfatta de konstanta termerna till en konstant, ΔG^0 och få

$$\Delta G = \Delta G^0 + 2RT\ln(f_{\pm} m_{\mathrm{HCl}}) = -FE.$$

Sättes $\Delta G^0 = -FE^0$, erhålles slutligen

$$E = E^0 - \frac{2RT}{F}\ln(f_{\pm} m_{\mathrm{HCl}}).$$

EMK i vår cell beror sålunda blott på saltsyrans halt och medelaktivitetsfaktor. Om E^0 är känt — det kan fås genom extrapola-

tion till $m = 0$ ($f_\pm = 1$) av en rad mätningar av E vid olika m — så kan man med en cell av ovanstående utseende bestämma $f_\pm$ i vilken HCl-lösning som helst.

Uttrycken för EMK innehålla i allmänhet en term av typen $\frac{RT}{F} \ln y$

Om man övergår till tiologaritmer och sätter in värdet på R i elenheter (8,314 joule grad^{-1}mol^{-1}), får man vid 18°C 57,77 log y, vid 25°C 59,16 log y, i bägge fallen millivolt.

b) I en *koncentrationscell med överföring* såsom

$$- \text{Ag} \,/\, \text{AgNO}_3(m') \,/\, \text{AgNO}_3(m'') \,/\, \text{Ag} + \qquad m'' > m'$$

har man två lösningar av samma elektrolyt med olika halt, förbundna t. ex. med ett smalt rör (»vätskelänk»). *Vid urladdning av 1 F* ske ändringar dels vid elektroderna, dels i vätskelänken, där n_+F föres med Ag^+-joner och n_-F med NO_3^--joner. (Storheterna n_+ och n_- kallas jonernas *överföringstal*; deras summa är ett):

vid katoden: $\text{Ag} \rightarrow \text{Ag}^+(m') + e^-$; vid anoden: $\text{Ag}^+(m'') + e^- \rightarrow \text{Ag}$

i vätskelänken: $n_+\text{Ag}^+(m') \rightarrow n_+\text{Ag}^+(m'')$ och $n_-\text{NO}_3^-(m'') \rightarrow n_-\text{NO}_3^-(m')$

alltså tillsamman: $n_-\text{AgNO}_3(m'') \rightarrow n_-\text{AgNO}_3(m')$, om man minnes, att $1 - n_+ = n_-$.

Sålunda ha n_- moler $AgNO_3$ flyttats från den starka till den svagare lösningen; skillnaden i halt strävar att utjämnas. Denna utjämning sker av sig själv (genom diffusion), om man ger den tillfälle därtill. I vår cell tvinga vi förloppet att samtidigt uträtta ett elarbete, vars storlek genast fås ur (6) och (5):

$$\Delta G = -FE = n_-(\mu'_{\text{AgNO}_3} - \mu''_{\text{AgNO}_3}) = 2n_-RT \ln \frac{f'_\pm m'}{f''_\pm m''}.$$

$$E = 2n_- \frac{RT}{F} \ln \frac{f''_\pm m''}{f'_\pm m'}.$$

Om vi känna medelaktivitetsfaktorerna — t. ex. ur fryspunktsmätningar — ger EMK i denna cell alltså omedelbart överföringstalen n_- och $n_+ = 1 - n_-$; och omvänt.

c) I en *koncentrationscell utan överföring*, såsom

$$- \text{Ag} \,/\, \text{AgNO}_3(m') \,//\, \text{AgNO}_3(m'') \,/\, \text{Ag} + \qquad m'' > m'$$

beröra de två elektrodlösningarna ej varandra utan skiljas av en »saltbro» — tecknad med »//» — en hävert med stark KCl- (ej i detta fall!) eller NH_4NO_3-lösning, ofta stadgad med gelatin. Potentialsprången vid hävertens ändar, »vätskepotentialerna», ta enligt Bjerrum så gott som ut varandra. Då cellen urladdas, ske visser-

ligen en del förändringar vid ändarna av saltbron, men $\triangle G$ vid dessa förändringar är sammanlagt noll, då ju intet elarbete uträttas. Då vi skola beräkna ett uttryck för cellens EMK enligt (6), behöva vi alltså endast ta hänsyn till förloppen vid elektroderna:

vid katoden: $Ag \rightarrow Ag^+(m') + e^-$
vid anoden: $Ag^+(m'') + e^- \rightarrow Ag$
tillsamman: $Ag^+(m'') \rightarrow Ag^+(m')$, då $1F$ urladdas

$$\triangle G = \mu'_{Ag^+} - \mu''_{Ag^+} = RT \ln \frac{\{Ag^+\}'}{\{Ag^+\}''} = -FE;$$

$$E = \frac{RT}{F} \ln \frac{\{Ag^+\}''}{\{Ag^+\}'} - \frac{RT}{F} \ln \frac{f''_{Ag^+} m''}{f'_{Ag^+} m'}.$$

I den sista formeln ligger en osäkerhet på omkring ± 1 mV, emedan Bjerrums förutsättning, att vätskepotentialerna vid saltbrons ändar taga ut varandra, ej är exakt. Med motsvarande osäkerhet äro de enskilda jonaktiviteter behäftade, som man söker utröna med hjälp av celler med saltbro. Osäkerheten i elektriskt mätta värden av $pH = -\log \{H^+\}$ är t. ex. någon hundradedels enhet.

d) Tills för något tiotal år sedan dryftades ofta frågan, hur stort potentialspråget mellan en metallelektrod och en lösning — en »enstaka elektrodpotential» kan vara. De EMK, man mäter, innehålla emellertid alltid skillnaden mellan *två* sådana elektrodpotentialer, ofta därjämte vätskepotentialer och potentialsprång mellan olika metaller. De försök, som gjorts att på omvägar — t. ex. med Hg-droppelektrod eller elektrokapillaritet — bestämma enskilda elektrodpotentialer, ha lett till motsägelser. Numera har man i allmänhet givit upp hoppet och förklarar, att det icke är möjligt att fritt från godtycke fastställa potentialskillnaden mellan en metallelektrod och en lösning. Den djupare orsaken härtill är att varje laddad »provkula» — elektron, jon — som man kunde föra från elektroden till lösningen eller omvänt, därvid får uträtta både elektriskt och kemiskt arbete, som icke kunna skiljas från varandra.

Emellertid har man av många skäl funnit det lämpligt att här införa en *godtycklig* definition: med en viss elektrods *elektrodpotential* e menar man dess potential mot normalvätgaselektroden, d. v. s. EMK i cellen

$$- Pt, H_2(1atm) / \{H^+\} = 1 \,//\, \text{elektrod} +$$

Elektrodpotentialen skrivs positiv, om tecknen äro som ovan angivits, negativ om de i verkligheten äro motsatta. EMK i en cell

är helt enkelt skillnaden mellan de två halvcellernas elektrodpotentialer, som man lätt inser av följande exempel:

I cellen $-\mathrm{Zn}/\mathrm{Zn^{2+}}//\mathrm{Cu^{2+}}/\mathrm{Cu}+$ sker vid urladdning av $2F$:

$$\mathrm{Zn}+\mathrm{Cu^{2+}} \rightarrow \mathrm{Zn^{2+}}+\mathrm{Cu}, \quad \triangle G = -2FE.$$

Detta förlopp kan betraktas som skillnaden mellan elektrodförloppen i cellerna

$-\mathrm{H_2}/\{\mathrm{H^+}\}=1//\mathrm{Cu^{2+}}/\mathrm{Cu}+, \quad E=e_1; \quad \mathrm{Cu^{2+}}+\mathrm{H_2} \rightarrow \mathrm{Cu}+2\mathrm{H^+}$
$\triangle G_1 = -2Fe_1$

$-\mathrm{H_2}/\{\mathrm{H^+}\}=1//\mathrm{Zn^{2+}}/\mathrm{Zn}+, \quad E=e_2; \quad \mathrm{Zn^{2+}}+\mathrm{H_2} \rightarrow \mathrm{Zn}+2\mathrm{H^+}$
$\triangle G_2 = -2Fe_2.$

För ändringen i fri energi i den första cellen gäller alltså $\triangle G = \triangle G_1 - \triangle G_2$, varur omedelbart fås $E = e_1 - e_2$.

e) Med *normalpotentialen*, e^0, för en elektrod avses dess elektrodpotential, då alla reagerande ämnens aktiviteter äro ett. Den definieras alltså som EMK i en tänkt cell, såsom

$-\mathrm{H_2}/\{\mathrm{H^+}\}=1//\{\mathrm{Cu^{2+}}\}=1/\mathrm{Cu}+ \qquad E=e^0(\mathrm{Cu^{2+}}/\mathrm{Cu})$

$-\mathrm{H_2}/\{\mathrm{H^+}\}=1//\{\mathrm{Fe^{2+}}\}=1, \{\mathrm{Fe^{3+}}\}=1/\mathrm{Pt}+ \quad E=e^0(\mathrm{Fe^{3+}}, \mathrm{Fe^{2+}}/\mathrm{Pt})$

Ur tecknet på en normalpotential kan man räkna ut, i vilken riktning förloppet vill gå.[1] Ovanstående celler, med förloppen

$$\mathrm{H_2}+\mathrm{Cu^{2+}} \rightarrow 2\mathrm{H^+}+\mathrm{Cu} \quad \text{och} \quad \frac{1}{2}\mathrm{H_2}+\mathrm{Fe^{3+}} \rightarrow \mathrm{H^+}+\mathrm{Fe^{2+}}$$

ha positiv e^0 (negativ $\triangle G^0$). Förloppen kunna alltså av sig själva gå i den riktning som skrivits. Däremot ha $\mathrm{Zn^{2+}}/\mathrm{Zn}$ och $\mathrm{Cr^{2+}}$, $\mathrm{Cr^{3+}}/\mathrm{Pt}$ negativ e^0, d. v. s. förloppen

$$\mathrm{H_2}+\mathrm{Zn^{2+}} \rightarrow 2\mathrm{H^+}+\mathrm{Zn} \quad \text{och} \quad \frac{1}{2}\mathrm{H_2}+\mathrm{Cr^{3+}} \rightarrow \mathrm{H^+}+\mathrm{Cr^{2+}}$$

ha positiv $\triangle G^0$. De kunna ej utan våld gå i den skrivna riktningen men gå däremot av sig själva baklänges (zinkmetall och kromosaltlösningar kunna som bekant utveckla vätgas i sur lösning).

Den mångsidiga användningen av EMK i lämpligt hopsatta celler för att beräkna ändringar i fri energi, jämviktskonstanter m. m. kan här ej ens antydas.

f) Den allmänna metoden att finna ett uttryck för EMK i en cell kan sammanfattas sålunda: 1) Ur förloppen vid elektroderna

[1] De här givna definitionerna torde vara de numera brukligaste. Tyvärr definiera vissa författare ännu elektrod- och normalpotentialer så, att de få rakt motsatta tecken mot här. Om man blott är medveten om denna skillnad i teckenval, behöver den emellertid ej bereda större svårigheter.

(ibland även det i vätskelänken) fås cellförloppet vid urladdning av n Faraday. 2) $\triangle G$ för cellförloppet uttryckes i de olika deltagarnas kemiska potentialer μ_i, utvecklade enligt (3), (4) eller (5). Konstanta termer sammanfattas till en konstant, $\triangle G^0$. 3) Man sätter $\triangle G^0 = -nFE^0$ ($-nFe^0$, om ena elektroden är en vätgaselektrod) och $\triangle G = -nFE$. Härur fås ett uttryck för E.

Slutord.

Vi ha sett, hur man med hjälp av begreppet kemisk potential och utan högre matematik än de fyra räknesätten och logaritmer kan härleda uttryck för jämviktsvillkor och för EMK i olika fall. Genom att införa några enkla differentialer samt ett par andra termodynamiska storheter — värmeinnehåll och entropi — kan man lätt härleda formlerna för EMK:s och jämviktskonstanters temperaturberoende samt för lösningars fryspunkt och kokpunkt.

Begreppet kemisk potential, som synes ge en enkel och redig framställning av den kemiska energiläran, har sedan några år lagts till grund för undervisningen i jämviktslära och elektrokemi vid Stockholms Högskola. Försöket synes ha slagit väl ut. Sedan studenterna vant sig vid de nya begreppen, visa de sig vid skrivningar och förhör ha lättare att behärska det nya enhetliga tänkesättet än det gamla lappverket. Det är möjligt, att kemiska potentialer med fördel kunna införas i kurserna i vissa högre skolor; härom vill jag ej yttra mig.

Nu frågar väl någon, om studenterna kunna begripa allt detta. Man kan ju tvista om vad som menas med att »begripa» en sak och t. o. m. förneka, att någon människa någonsin har i grund begripit nagonting; detta är en djup filosofisk fråga. Men även om i många fall allt som åstadkommes är att lärjungarna rent mekaniskt övas att uppställa reaktionsformeln, uttrycka $\triangle G$ i de olika ämnenas μ_i och slutligen sätta $\triangle G = 0$ vid jämvikt eller $= -$ elarbetet vid cellförlopp, så är därmed enligt min åsikt åtskilligt vunnet.

Först och främst äro de nya metoderna så allmänna, att de kunna tillämpas på snart sagt vilken jämvikt eller vilken cell som helst utan att några onaturliga förutsättningar införas. De underlätta vidare förståelsen av företeelsernas rent kemiska sida, då det kemiska förloppet alltid framhålles. Genom att den fria energin ständigt framhålles som drivkraft till alla ändringar, får lärjungen slutligen en riktig uppfattning om orsaken till kemiska förlopp och en enhetlig och säker utgångspunkt för ett djupare inträngande i två stora områden av den fysikaliska kemin: jämviktsläran och elektrokemin.

Meddelande från Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning.

Årsmötet i Stockholm den 7—8 januari 1942.[1]

Årsmötet ägde liksom föregående år rum på Tekniska högskolans hörsal för fysik och började med de sedvanliga årsmötesförhandlingarna kl. 10.15. Något mer än 100 av föreningens medlemmar voro närvarande. Sedan protokoll från föregående årsmöte samt styrelse- och revisionsberättelserna för år 1941 upplästs och godkänts och styrelse och skattmästare beviljats ansvarsfrihet för föregående års förvaltning, skedde val av funktionärer. Till ordförande omvaldes lektor Torsten Wetterblad, och styrelsen fick i övrigt samma sammansättning som föregående år med undantag av att överste H. Stendahl på egen begäran ersattes med överste C. Årmann. Förutvarande revisorer och revisorssuppleanter omvaldes. Årsmötet beslöt på förslag av styrelsen att från och med år 1943 höja årsavgiften från 2 till 3 kronor. Därmed blir avgiften lika stor i Stockholmsavdelningen som i föreningen i Lund. Den främsta motiveringen för avgiftshöjningen är emellertid att föreningen kommer att få ökade utgifter på grund av styrelsens beslut att anordna fortbildningskurser. Sekreteraren redogjorde därefter i korthet för programmet för den fortbildningskurs i fysik, som Folkuniversitetsföreningen i samverkan med Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning kommer att anordna under sommaren 1942. Cirkulär över kursen kommer att tillställas samtliga medlemmar.

Lektor Helmer Bäckström skulle därefter tala över ämnet: Fotografering i ultraviolett och ultraröd strålning. Föredragshållaren meddelade först, att han ämnade inskränka sig till att behandla den senare delen av ämnet och gav därefter en klar och instruktiv skildring av de problem som äro förknippade med fotografering i ultraröd strålning. Föredraget belystes med ett stort antal bilder, som visade några av de i vissa fall mycket uppseendeväckande resultat man nått fram till. Det är med stor tillfredsställelse föreningen nu fått sin önskan uppfylld att få höra en framställning av dessa intressanta frågor av vårt lands främste

[1] Tidigare medd. från föreningen återfinnas i Elementa *16*, 226, 1933; *17*, 46 och 113, 1934; *18*, 42 och 47, 1935; *19*, 36, 1936; *20*, 42 och 133, 1937; *21*, 47, 1938; *22*, 45 och 113, 1939; *23*, 41 och 234, 1940; *24*, 38 och 89, 1941.

expert på det fotografiska området. Elementa kommer att under året publicera en uppsats av lektor Bäckström över samma ämne.

Kl. 2 em. avreste mötesdeltagarna med tåg till Saltsjöbaden, där programmet upptog ett besök på Stockholms observatorium. Utflykten hade lockat ett mycket stort antal deltagare, och det var säkert omkring 150 personer, som bänkats i observatoriets denna gång otillräckliga hörsal, då dess föreståndare, professor Bertil Lindblad, hälsade de närvarande välkomna till observatoriet. Man kan utan överdrift säga, att det var en upplevelse att följa professor Lindblads glänsande framställning av den astronomiska världsbilden, i särskilt hög grad fängslande därför att professor Lindblad själv är en av nebulosaforskningens mest framstående representanter. Efter en rundvandring genom observatoriets olika avdelningar under ledning av några av observatoriets tjänstemän samlades man åter i föreläsningssalen, där läroverksadjunkt Algot Jenvall talade över ämnet: Några synpunkter på astronomiundervisningen i skolan. Föredraget var huvudsakligen en redogörelse för de astronomiska observationer, som talaren själv praktiserar vid sin undervisning. Föredragshållaren framhöll också den stora tillgång för astronomiundervisningen som Stockholms planetarium utgör. Efter föredraget gav professor Nordenmark uttryck åt sin starka pessimism rörande planetariets framtid men kunde dess bättre vid den följande middagen lämna det glädjande meddelandet, att planetariets ekonomi åtminstone under år 1942 syntes vara säkerställd. Styrelsen kommer att taga upp frågan och om möjligt försöka organisera studiebesöken från Stockholmsskolorna vid planetariet. I Elementa kommer under året att ingå artiklar av professor Lindblad och adjunkt Jenvall i de ämnen, som behandlades i deras föredrag.

Kl. 7 em. samlades 113 av mötesdeltagarna till gemensam middag a Grand Hotel, Saltsjöbaden, vars stora matsal blev helt fylld. Vid den festliga måltiden framförde ordföranden föreningens tack till samtliga föredragshållare vid årsmötet. Ett mycket uppskattat inslag vid det följande samkvämet var den orientering över det aktuella politiska läget, som lämnades av informationsstyrelsens ordförande, professor Sven Tunberg. Den angenäma stämningen förhöjdes ytterligare genom sång av fil. mag. L. Mannerfelt.

Torsdagen den 8 jan. kl. 9.30 samlades årsmötet åter mycket talrikt på Tekniska högskolans hörsal för fysik, där läroverksadjunkt B. Wahlström demonstrerade sin apparat för bestämning av den mekaniska värmeekvivalenten (Elementa, årg. 24, 113, 1941). Två försök, som utfördes under demonstrationen, gåvo de goda värdena 413 och 417 resp. Härefter följde ett föredrag av fil. lic. Alf Nyberg,

som gav en inblick i några av den praktiska meteorologiens arbetsmetoder. Vissa delar av föredraget komma att avhandlas dels i årets Kosmos dels i Elementa.

Den sista punkten på årsmötets program var en utfärd med buss till Försvarsväsendets kemiska anstalt på Järvafältet, som hade lockat mer än 100 deltagare. Här liksom på observatoriet på Saltsjöbaden var utrymmet i minsta laget för det stora antalet gäster. Men deltagarna komma säkert ej att minnas besvärligheterna, då deras tankar gå tillbaka till denna utfärd. Professor Gustaf Ljunggren ägde i rikt mått förmågan att göra sitt egentligen kusliga ämne, stridsgaser, till en angenäm och minnesrik underhållning, och att de väl utrustade laboratorierna och verkstäderna väckte det livligaste intresse är säkert. Mer än en kände kanske en önskan inom sig att få deltaga i det kemiska forskningsarbetet, där problemen enligt professor Ljunggren voro många men arbetarna få. Kl. 4.30 em. förde oss bussarna åter till Stockholm och därmed var föreningens årsmöte år 1942 slut. Bror Gustaver.

Styrelseberättelse för år 1941.

Styrelsen har under året bestått av 21 personer, av vilka följande 5 även tillhört arbetsutskottet: lektor T. Wetterblad, ordf., lektor A. Uhler, v. ordf., lektor B. Gustaver, sekreterare och skattmästare, adjunkt E. Sandén och adjunkt S. Åstrand, samtliga från Stockholm. Övriga medlemmar av styrelsen ha varit: rektor A. Björkeson, Stockholm, fil. lic. I. Bolin, Stockholm, lektor K. Dahr, Göteborg, lektor G. Funke, Norrköping, lektor E. G. Hjalmar, Stockholm, lektor C. Lönnqvist, Södertälje, rektor G. Mikaelsson, Stockholm, rektor A. Nordhult, Stockholm, rektor P. G. Persson, Malmö, lektor Eva Ramstedt, Stockholm, lektor G. Starck, Stockholm, överste H. Stendahl, Stockholm, docent B. Svensson, Lund, rektor B. Söderborg, Stockholm, rektor Lilly Tengnér, Stockholm, adjunkt B. Wahlström, Stockholm.

Föreningen höll sitt ordinarie årsmöte den 7—8 januari på Tekniska högskolan, Stockholm. Redogörelse över årsmötet finnes införd i Elementa 24, 38, 1941 och har i form av särtryck tillställts samtliga medlemmar. Vidare hade föreningen ett vårsammanträde onsdagen den 21 maj å Tekniska högskolans kårhus, vid vilket rektor Einer Torsting talade över ämnet: De matematisk-naturvetenskapliga ämnenas ställning i danska skolor. Referat av sammanträdet återfinnes i Elementa 24, 89, 1941. En uppsats av rektor Torsting över samma ämne ingår i Elementa 24, 177, 1941.

Styrelsen har under året haft 6 och arbetsutskottet 5 sammanträden. Av de ärenden, som därvid behandlats, må nämnas: 1) Fort-

bildningskursen i fysik för lärare sommaren 1942 (vid sammanträde den $^{16}/_{10}$ tillsattes en organisationskommitté för kursen, bestående av herrar Bolin, Gustaver och Wetterblad); 2) Beslut om utsändandet av cirkulär angående rättning av vårterminens studentuppgifter i matematik och fysik ($^{21}/_{3}$); 3) Yttrande till Skolöverstyrelsen angående Besparingsberedningens promemoria ($^{18}/_{11}$).

Medlemsantalet i föreningen var vid årsskiftet 1941—42 559. Under året ha 6 medlemmar avlidit och 19 begärt utträde ur föreningen; 26 nya medlemmar ha gått in i föreningen.

Stockholm den 31 december 1941.

TORSTEN WETTERBLAD.
Ordförande.

I BROR GUSTAVER.
Sekreterare.

Föreningen i Lund för matematisk-naturvetenskaplig undervisning.

Sektionen för matematik, fysik och kemi.

Styrelseberättelse för verksamhetsåren 1940—41.

Under verksamhetsåren 1940—1941 har som ordförande för föreningen i dess helhet fungerat rektor P. G. PERSSON, Malmö, och som sekreterare och kassör docent BÖRJE SVENSSON, Lund. Styrelsen för föreningen i dess helhet utgöres av de båda sektionsstyrelserna, och inom sektionen för matematik, fysik och kemi har som ordf. fungerat rektor P. G. PERSSON, som v. ordf. rektorerna E. HERNQVIST, Halmstad och K. PARCK, Eslöv och som sekr. docent BÖRJE SVENSSON.

Övriga styrelseledamöter inom sektionen ha varit läroverksadjunkt T. EDQVIST, Malmo, rektor H. HOLMGREN, Skurup, lektor A. JÖNSSON, Malmö, professor J. KOCH, Lund, rektor H. KÖRNER, Lund, lektor A. LEIDE, Lund, docent T. LARSÉN, Lund (för år 1940), professor K. LUNDMARK, Lund, docent O. LUNDQUIST, Lund, rektor F. MONTÉN, Malmö, lektor H. NORDSTRÖM, Växjö, rektor S. SJÖBERG, Lund, lektor BERNHARD SVENSSON, Lund samt amanuens EVE STAFFANSSON, Lund (för år 1941). Arbetsutskottet har utgjorts av ordf., v. ordf., professor J. KOCH och sekreteraren.

Beroende på särskilda omständigheter hölls under år 1940 inga sammanträden. Under verksamhetsåret 1941 ha hållits två sam-

manträden, den 26 april och den 9 nov., å Lunds universitets Fysiska institution. Vid vårsammanträdet (se Elementa 24, 90, 1941) höll överingenjören Tore Husberg föredrag över »Ångpanneeldstadens utformning med hänsyn till bränslets beskaffenhet» och professor T. Thunberg över »Revolutionen i vår uppfattning om de biologiska oxidationsföreteelserna» samt lektor A. Leide föredrag med demonstrationer över »Om användning av projektion vid fysikaliska demonstrationer». Professor Thunbergs föredrag var gemensamt för föreningens båda sektioner.

Vid höstsammanträdet utgjorde huvudpunkten i programmet en för båda sektionerna gemensam diskussion över »Erfarenheter rörande den högre gymnasialundervisningen i naturvetenskapliga ämnen, en jämförelse mellan nu gällande läroverksstadga och tidigare». Inledare voro för matematik lektor Bernhard Svensson, Lund, för biologi med hälsolära lektor Axel Andersson, Malmö, för fysik rektor Erik Hernquist, Halmstad, och för kemi rektor Knut Parck, Eslöv. Dessutom utfördes vid höstsammanträdet en serie fysikaliska demonstrationer: fil. kand. Lennart Stigmark, »Några fysikaliska skolförsök med katodoscillograf», amanuens Eve Staffansson, »Demonstration av en enkel optisk bänk för amatörer från Preislers Optiska Institut, Malmö», docent Börje Svensson, »Några fysikaliska skolförsök (geometrisk optik)», varjämte rektor A. Östing, Tomelilla förevisade en serie av honom utförda elektrotekniska planscher.

Styrelsen har under året sammanträtt tre gånger, varvid huvudsakligen behandlats planläggning av sammanträdena. Till våren 1942 (6 och 7 april) planeras »Naturvetenskapliga dagar». Det preliminärt uppgjorda programmet omfattar två föreläsningar i matematik, föreläsningar och demonstrationer i fysik och kemi samt industribesök.

Medlemsantalet i sektionen utgjorde vid årets slut 186.

Lund den 28 januari 1942.

P. G. Persson.

/ Börje Svensson.

Bokanmälningar.

Hans Pettersson, *Från atomkärnans explosion till universums*, Albert Bonnier, Stockholm 1941, 162 s., kr. 6:50.

De många, som vintern 1940—41 lyssnade till professor Pettersons tio föredrag i radio, se med stor tillfredsställelse, att dessa nu utkommit i bokform. Det närmare studiet vittnar också om prof. Petterssons stora förmåga att ge en icke blott vederhäftig utan även lättfattlig och elegant populärvetenskaplig framställning av nyaste åsikter om världsbilden.

En del frågor, särskilt om radiums betydelse för vår egen jords utveckling, som utförligare behandlats i boken Jorden och radium, recenserad i Elementa 1941, s. 95, upptas i korthet i de första kapitlen. Där redogör också förf. för nyligen utförda och av honom planerade djupborrningar och analyser av havsbottnens sedimentlager. Sedan avhandlas projektiler från världsrymden, meteorer, samt de högsta luftlagrens inverkan på däri framträngande vågsystem, speciellt radiovågorna.

Det största intresset knyter sig kanske till bokens senare del, där kapitelrubrikerna ge prov pa innehållet: De kosmiska strålarna, Materiens innersta, Stjärnornas öden, Världsrymdens expansion, Liv och strålning. Företeelserna i världsalltet sättas där i samband med nukluarkemiska reaktioner, varvid atomexplosioner och materieförintelse förklarar den oerhörda energiutstrålningen. Stundom kunna de, t. ex. vid de uppträdande novorna, leda till explosioner i universum av jätteformat. Märkligt är hur man i olika sammanhang både för vår egen jord och för förhållandena i stjärnvärlden kommer fram till en beräknad ålder av c:a 2 miljarder år, och spörsmålet har också uppställts om vid denna tidpunkt nagon urtidskatastrof kan ha inträffat, som startat den nuvarande världens utveckling.

Boken är fängslande såväl till stil som innehåll och kan på det livligaste rekommenderas.

Eva Ramstedt.

Nils Ryde, *Atomstrålning och atomstruktur.* Gleerups, Lund 1941. 75 sid., häft. kr. 3: 50.

Föreliggande bok har uppstått ur en serie föreläsningar över spektroskopi och atomteori, som förf. höll vid fortbildningskursen i fysik 1939.

Det inledande kapitlet behandlar den empiriska analysen av linjespektra, sådan den var före kvantumteoriens uppkomst, och understryker med all rätt Rydbergs insats. Läsaren införes därefter i Bohrs atomteori och får göra bekantskap med den modifikation av Bohrs atommodell, som brukar kallas vektormodellen och tycks vara lika oumbärlig för en spektroskopist som penseln för en målare. Pauli-principen och grundämnenas periodiska system introduceras i kap. III, och vi få sedan lära känna kvantummekanikens fundament. Därnäst behandlas atomteoriens tillämpning på den kemiska bindningen, och slutkapitlet, där man särskilt tydligt märker experten bakom pennan, är ägnat åt Zeeman- och Starkeffekterna.

Vad man saknar, är framför allt en framställning av osäkerhetsrelationen. Utan att känna den kan man enligt min mening inte rätt förstå de nyare teorierna för atombyggnad.

Några andra anmärkningar gälla teoriens utvecklingshistoria och äro sakligt sett av mindre betydelse. Bl. a. tycks förf. dela den vanliga uppfattningen, att först Sommerfeld utvidgade den ursprungliga Bohrska teorien till att gälla elliptiska elektronbanor. Också den äran tillkommer Bohr, såvitt jag vet. (Den relativistiska behandlingen är däremot Sommerfelds med obestridd prioritet.) Det bör nog också påpekas, att formuleringen i kap. III lätt kan ge en missvisande bild av, hur det gick till, när det periodiska systemet fick sin teoretiska förklaring.

Dessa anmärkningar kunna dock på intet sätt skymma bort de stora förtjänsterna hos boken. Själva författarnamnet borgar ju för en vederhäftig, gedigen och klar framställning. Boken är givetvis ett fynd för var och en, som vill veta något mer om atomspektra och atombyggnad än som kan inhämtas ur gängse populära framställningar. De nödvändiga matematiska förkunskaperna hålla sig mestadels inom studentkursens ram — dock förekommer det ett par integraltecken och några partiella derivator, de senare i Schrödinger-ekvationen.

Lamek Hulthén.

KNUT HULTMAN, *Om livförsäkringsteknik.* (Svenska försäkringsföreningens studiehandböcker VIII.) Stockholm 1940. 286 s., kr. 10:—.

Jämsides med livförsäkringsväsendets snabba utveckling under det senaste halvseklet ha också genomgripande förändringar skett inom livförsäkringsmatematiken. Denna vetenskap, som behandlar de matematiska grundvalar varpå livförsäkringsrörelse vilar, har länge saknat en modern lärobok på svenska språket. Ett arbete av Tesdorpf (Kortfattad lärobok i ränte- och lifförsäkringsberäkningar), vilket utkom 1894, är numera alldeles föråldrat. Föreliggande elementära lärobok av aktuarie K. Hultman fyller därför ett länge känt behov.

Arbetet är närmast avsett för den personal på livförsäkringsbolagens aktuarieavdelningar som icke har högre matematisk utbildning. Men det kan rekommenderas för envar som önskar en inblick i den moderna livförsäkringsmatematiken. I en inledande avdelning ges en snabbrepetition av vissa delar av algebran som användas i det följande. Avdelning 2 behandlar grunderna för livförsäkringsmatematik med s. k. diskontinuerligt betraktelsesätt. I de följande avdelningarna 3—6 anlägges kontinuerligt betraktelsesätt. Särskild hänsyn tages här till svenska försäkringstekniska förhållanden, såsom lagbestämmelser och överenskommelser mellan de svenska bolagen om gemensamma grunder för premieberäkningen. I detalj genomgas de gemensamma grunderna av år 1928, 1935 och 1938.

För den som endast önskar en första orientering i ämnet lämpar sig avdelning 2 bäst. Den torde även i valda delar kunna vara användbar för enskilt arbete i matematik å realgymnasiet.

S.-G. Lindblom.

Fra Fysikkens Verden, Norsk Fysisk Tidsskrift.

Tidskriften startade 1939 (se Elementa *23*, 56, 1940) och utkom under detta år med fyra häften. Under 1940 kunde endast ett häfte utsändas (Elementa, *23*, 58, 1941), och det såg ut som om de rådande förhållandena skulle medföra tidskriftens nedläggande. Glädjande nog synes man emellertid nu tack vare stöd från norsk industri kunna upptaga utgivandet. Första häftet av årg. 1941—42 (okt. 1941, 80 s.) har följ. innehåll: E. A. HYLLERAAS, Prof. Sem Sæland, In memoriam; N. BOHR, Nyere Undersøgelser over Atomkernernes Omdannelser och en kompletterande uppsats över samma ämne av E. A. HYLLERAAS; C. STØRMER, Perlemorskyer; R. CALMEYER, Det tunge vannstoff og dets kjemiske forbindelser. Fremstilling og an-

vendelse; R. Krekling, Magnetiske målinger i skolen; Hovedfagsoppgaver i fysikk ved Universitetet; Meddelanden om föredrag m. m. i Fysikkforeningen i Oslo. — Andra häftet (dec. 1941, 80 s.) innehåller: N. Bohr, Nyere Undersøgelser over Atomkernernes Omdannelser (forts); P. Heegaard, Heron fra Aleksandria; K. Aanerud, Boyles lag, et forsok; Kristine Bonnevie, Makro-mikro-evolusjon; W. Werenskiold, Trykkgradientens brytning i en grenseflate; K. E. Weedon Reflekser i objektiver. Glas med antirefleks-hinner; E. Hylleraas, Refleksjonsfrie grenseflater for optiske medier.

Man har all anledning tro, att tidskriften kommer att få många läsare i Sverige. För skolornas referensbibliotek lämpar den sig utmärkt. De många översiktsartiklarna äro mycket välskrivna och avhandla aktuella ämnen. En särskild avdelning ägnas åt »Fysikk og kjemi i skolen». Tidskriften kostar per år kr. 10: —; rekvisition ställes till »Fra Fysikkens Verden», Fysisk Institutt, Blindern per Oslo. *C. E. B.*

Bonniers Konversationslexikon, band V, Sthlm 1941, kr. 18: 50.

Detta femte band omfattar *Flandern — Grafit* och upptager 1448 spalter. Bland de naturvetenskapliga artiklar, som här äro av intresse att nämnas, notera vi: *Flotation* (aktuell, koncis), *Fluorescens* (art. innehåller den omstridda språkliga nybildningen »ett ljuskvant»), *Fosfor, Fotocell, Fotografi* (utförlig, välskriven), *Fotogrammetri, Funktion, Fysik* (koncentrerad historik), *Färg* (med välgjord färgplansch), *Färgfotografi* (med detaljerad framställning av Kodachromeprocessen på en färgplansch), *Färghållning* (nytt uppslagsord, väl motiverat som sådant, behandlar de olika sätt, varpå färgerna kunna disponeras inom teknik och konst), *Färgämnen, Förbränningsmotor, Förstärkare, Gas, Gasurladdningslampor, Gengas* (kort men aktuell), *Glas.* Som regel finnas litteraturhänvisningar fogade till artiklarna — och detta är mycket värdefullt för att läsaren lätt skall kunna gå vidare med en fråga. Nästan alla artiklar äro förda fram till hög grad av aktualitet.

J. Tandberg.

Gradualavhandlingar.[1]

Jöran M. Ramberg, *A Spectrophotometric Study of the Central Parts of the Regions of the Hyades and Praesepe.* Stockholms Observatoriums Annaler, Band 13, No. 9. Stockholm 1941. Disp. vid Stockholms Högskola den 19 april 1941. Opponenter: observator Yngve Öhman och fil. lic. Folke Berglund.

En av stellarastronomiens huvuduppgifter är att ge en bild av stjärnornas verkliga fördelning i rymden. Till undersökningarna över stjärnornas skenbara, tvådimensionella fördelning på himmelssfären måste därvid fogas den tredje dimensionen, stjärnornas avstånd. De direkt medelst den »klassiska» parallaxmetoden bestämda avstånden hjälpa oss här endast en liten bit på väg; redan för avstånd av omkring 50 parsecs eller 160 ljusår blir parallaxvinkeln av samma storleksordning som sitt sannolika fel och mätresultaten sålunda rent illusoriska. Av grundläggande betydelse för den detaljerade rymdanalysen äro de spektroskopiska och spektralfotometriska parallaxmetoderna, vilka som bekant gå ut på att ur stjärnornas spektra bestämma deras absoluta ljusstyrka eller luminositet och därefter härleda deras avstånd ur relationen mellan luminositet, apparent ljusstyrka och parallax.

Den föreliggande undersökningens syfte var ursprungligen tvåfaldigt. Först och främst skulle de spektralfotometriska kriterierna på absolut ljusstyrka prövas på de båda stjärnhoparnas fysiska medlemmar för att på så sätt möjligen ytterligare kunna stabiliseras. Vidare skulle dessa kriterier tillämpas på förgrunds- och bakgrundsstjärnorna i de båda regionerna för att ge en uppfattning om naturen hos de stjärnstrata, i vilka de båda hoparna ligga inbäddade.

Undersökningen har utförts på Stockholms Observatorium; de plåtar, som ligga till grund för arbetet, ha väsentligen tagits med observatoriets 40 cm:s Zeiss astrograf. Observationsarbetet omfattar, för Hyadregionen: bestämning av sfäriska koordinater, fotografiska magnituder och spektralfotometriska data; för Praeseperegionen, där en indexkatalog med fotografiska magnituder redan givits av belgaren Vanderlinden: enbart bestämning av spektralfotometriska data.

Magnitudplåtarna ha mätts i observatoriets termoelektriska Schilt fotometer. I samband med magnitudbestämningarna ha astrografens fotometriska egenskaper undersökts, speciellt dess

[1] När ej annorlunda anges, är referatet av vederbörande förf:s egen hand.

färgekvation och centrumkorrektion. Spektralplåtarna, som erhållits i 40 cm:s astrografen i kombination med objektivprisma, ha registrerats i observatoriets fotoelektriska Koch-Goos fotometer.

Diskussionen av det spektralfotometriska observationsmaterialet föregås av en kritisk översikt över speciellt de senare årens arbeten i spektralfotometrisk parallaxbestämning. På grundval av Lindblads, Schaléns och Öhmans resultat härleder förf. ett diagram, som för B, A och F stjärnor direkt ger den fotografiska absoluta magnituden med vätelinjeintensiteten och spektraltypen som parametrar. Lindblads för G, K och M stjärnor giltiga cyankriterium nykalibreras på grundval av förbättrade absoluta magnituder publicerade av Mount Wilson, likaså nykalibreras det av förf. tidigare funna λ 4227-kriteriet, tillämpligt på stjärnor av mycket sena spektraltyper. Slutligen visas också, att intensitetsfallet vid G-bandet erbjuder möjlighet att med mycket tillfredsställande noggrannhet bestämma absoluta magnituder för hela serien av G och K dvärgar.

Bearbetningen av förf:s eget spektralfotometriska observationsmaterial ger en serie intressanta resultat. Två av de fysiska Hyadmedlemmarna befinnas vara vita dvärgar. Hyadmedlemmarnas Hertzsprung-Russell diagram uppvisar mycket ringa spridning i absolut magnitud inom varje spektralklass, samtidigt med att huvudseriestjärnorna bland medlemmarna visa sig systematiskt vara absolut ljussvagare än stjärnor i allmänhet. Den tolkning härav förf. vill föra fram är följande: Huvudserien är uppbyggd av olika stjärnfamiljer. Varje dylik stjärnfamilj, som får tänkas ha gemensamt ursprung, visar inom varje spektralklass liten dispersion i absolut magnitud. Tidigt i huvudserien avvika de olika stjärnfamiljerna avsevärt i luminositet men konvergera med fortskridande spektraltyp. Luminositetsfunktionen för stjärnor av samma spektraltyp inom huvudserien är asymmetrisk med en positiv skevhet.

Med användande av en statistisk metod, nyligen utarbetad av Malmquist, finner förf. att främre fronten av de nebulosamassor, som förmörka centralregionen av Hyaderna, är belägen på ett avstånd av 140 parsecs eller 460 ljusår. Huvudnebulosans utsträckning i synlinjens riktning befinnes uppgå till 70 parsecs eller 230 ljusår och dess totalabsorption till omkring 2 magnituder. Bortom denna nebulosa påvisar förf. förekomsten av en andra mörk nebulosa på ett avstånd av omkring 400 parsecs eller 1300 ljusår och med en totalabsorption av omkring 1 magnitud. Studiet av denna andra nebulosa ger möjlighet till slutsatser beträffande dispersionen i A 3 — F 2 och gG 5 — gM stjärnornas absoluta magnituder.

BÖRJE SVENSSON, *Beiträge zu den Studien über den Starkeffekt am Sauerstoffspektrum I,* Lund 1940, 191 s. Disp. vid Lunds universitet den 11 dec. 1940. Opponenter: docent N. RYDE och docent TAGE LARSÉN; extra opponenter: professor T. GUSTAFSON och docent L. HULTHÉN.

Inledningsvis lämnas några historiska data om de försök att finna en inverkan av det elektriska fältet på spektrallinjerna, som gjordes före den Starkska upptäckten 1913. En beskrivning av syrets normala spektrum följer jämte en sammanfattning av äldre undersökningar av starkeffekt i syre. Vid försökens utförande har katodskiktsmetoden använts, även kallad Lo-Surdometoden efter dess upptäckare. Metoden bygger på att i en glimljusurladdning i ett lämpligt format urladdningsrör uppträder vid en liten katodyta ett stort spänningsfall på ett mycket kort avstånd omedelbart framför katodytan. Vid en totalspänning på 10—25 kilovolt mellan anod och katod kan den elektriska fältstyrkan uppgå till 100—200 kilovolt per cm. Metoden är relativ. Såväl förskjutningsmätningar som intensitetsmätningar ha utförts.

Efter redogörelsen för den experimentella delen av undersökningen följer en sammanställning av teorien för de högre elementens starkeffekt. För dessa element äro blott ett fåtal teoretiska beräkningar utförda. Den största svårigheten ligger i att de s. k. egenfunktionerna, som ligga till grund för beräkningarna, ej äro kända. Ofta ha som närmefunktioner använts motsvarande väteegenfunktioner. I några fall, då vätelikheten är stor, kan överensstämmelsen bliva god i andra fall åter mycket dålig, såsom är fallet vid vissa linjer i syrets spektrum. För att kunna erhålla så goda teoretiskt beräknade värden som möjligt på linjernas uppspaltningar och intensitetsändringar har författaren försökt att framställa goda approximationer för syrets egenfunktioner. I det föreliggande fallet var således målet icke att beräkna Schrödingerekvationens egenvärden utan att erhålla goda approximationer på egenfunktionerna. Härvid valdes en »halvteoretisk» metod. Enligt den s. k. Hartrees metod överfördes problemet i ett en-elektronproblem; en serieelektron betraktas i fältet omkring syrekärnan omgiven av 7 elektroner. I en approximerad Schrödingerekvation insättas experimentella egenvärden, varefter förloppen av motsvarande approximerade egenfunktioner erhållas genom numerisk integration. På detta sätt ha ett tjugotal egenfunktioner beräknats. För beräkning av förskjutningarna och intensiteterna användes den av Foster för beräkning av starkeffekt i helium utarbetade metoden. Icke blott inverkan av närliggande energinivåer tagas med i be-

räkningen av förskjutningarna, utan verkan av praktiskt taget alla de termer medtagas, som ha ett märkbart inflytande på förskjutningen.

I sista kapitlet göres en jämförelse mellan de experimentella och de genom beräkning funna resultaten. I några fall, då de på varandra inverkande termerna ligga långt från varandra, blir förskjutningen proportionell mot kvadraten på fältstyrkan. I övriga fall blir förskjutningens beroende av fältstyrkan av komplicerad natur. Vid stora fältstyrkor blir förskjutningen i det närmaste proportionell mot fältstyrkan. Överensstämmelsen mellan experiment och beräkning är mycket god, när det gäller förskjutningarna, vilket tyder på att de gjorda approximationerna vid beräkningarna av egenfunktionerna kunna anses tillåtna. Intensiteterna visa mindre god överensstämmelse. De i avhandlingen använda beräkningsmetoderna ha senare med framgång använts för beräkning av starkeffekt i helium, där god överensstämmelse för förskjutningarna erhållits upp till fältstyrkor på 400 kilovolt per cm.

Föredrag under hösten 1941 inom svenska matematiska, fysiska och kemiska föreningar.

Lund:

Matematiska Sällskapet, ordf. prof. M. Riesz, sekr. fil. mag. H. Björk.

Föredrag: fil. mag. I. Hansson, Om symmetrigrupper ($^{25}/_{9}$); doc. L. Hulthén, Något om störningsräkning ($^{30}/_{10}$); prof. M. Riesz, Om geometriska konstruktioner.

Kemiska Föreningen, ordf. fil. dr K. E. Thomé, sekr. fil. lic. Ido Leden.

Föredrag: prof. A. Stock, Berlin, Bors väteföreningar ($^{23}/_{9}$); prof. Stock, Kvicksilverförgiftningar ($^{27}/_{9}$); fil. dr K. E. Thomé, Artificiell rening av mejeriavloppsvatten ($^{28}/_{11}$).

Föreningen i Lund för matem.-natur. undervisning, se sid. 41.

Stockholm:

Matematiska Sällskapet, ordf. prof. F. Carlson, sekr. fil. lic. S. Danielson.

Föredrag: prof. B. Lindblad, Stationära stjärnsystem ($^{4}/_{12}$).

Fysiska Sällskapet, ordf. prof. E. Hulm, sekr. fil. lic. E. Lindholm.

Föredrag: prof. E. Hulthén, Några protokollsutdrag från Sällskapets tidigare verksamhet. Femtio-års jubileum ($^{20}/_{0}$); fil. lic. N. Svartholm, Kvantteori och molekylstruktur; en översikt och några resultat ($^{10}/_{11}$); prof. H. Alfvén, En teori för jordmagnetiska stormar och norrsken ($^{24}/_{11}$).

Svenska Fysikersamfundet, ordf. prof. M. Siegbahn, sekr. fil. dr fru Anna Beckman.

Föredrag: ingenjör R. Thorburn, Registrerande elektriska instrument ($^{31}/_{10}$).

Föreningen för matem.-naturv. undervisning, se sid. 38.

Kemiska Sällskapet, ordf. prof. H. v. Euler, sekr. doc. L.-G. Sillén.
Föredrag: fil. lic. R. Vestin, Kloramin-kemi ($^{26}/_{9}$); laborator C. O. Björling, Röntgenundersökning av preparersalt ($^{31}/_{10}$); fil. lic. I. Wilson, Anjonens byggnad i K_3CrO_8 ($^{31}/_{10}$); docent L.-G. Sillén, Arppes föreningar — oxihalogenider med trappstruktur ($^{31}/_{10}$); fil. lic. C. Brosset, Stegvis uppbyggnad av komplexjoner ($^{31}/_{10}$); prof. H. v. Euler, Svenska konsthartsproblem ($^{2}/_{12}$); dr. ing. E. Adler, Reaktionsmekanismen vid fenol- och formaldehydhartsernas bildning ($^{2}/_{12}$); amanuens H. Nyström, Om aminoplaster ($^{2}/_{12}$).

Uppsala:

Matematiska Föreningen, ordf. doc. S. Täcklind, sekr. fil. lic. B. Kjellberg.

Fysiska Sällskapet, ordf. doc. B. Edlén, v. ordf. doc. S. v. Friesen.
Föredrag: fil. dr. A. Eld Sandström, Aluminiums och magnesiums K-absorption. Ett försök till tolkning ($^{22}/_{10}$); prof. Liese Meitner, Die künstlichen Umwandlungsprozesse der Elemente und ihre allgemeine Bedeutung ($^{10}/_{12}$).

Kemiska Sällskapet, ordf. prof. A. Fredga, sekr. fil. lic. I. Hedlund.
Föredrag: doc. T. Caspersson, Några cytokemiska undersökningar med optiska metoder ($^{24}/_{10}$); fil. lic. G. Lindeberg, Demonstration av lignin- och cellulosaförstörande svampar ($^{16}/_{12}$); fil. lic. T. Wikén, Om metanbakterier ($^{16}/_{12}$).

Tidskrifter.

Svensk kemisk tidskrift, 1941: 8—12; 1942: 1.

Ur innehållet: K. H. Gustavson, Differentiation of the protein groups involved in the fixation of vegetable tannins by collagen; S. Hähnel o. M. Lennerstrand, Volumetrisk bestämning av några karbonylföreningar; H. Rimpel, Die Regenerierung von Gummiabfällen in Lichte moderner Kautschukforschung; N. Lövgren, Om ytspänningens temperaturberoende; J. A. Merz, Quick analytic methods for the silicate industries; N. Lövgren, En metod för kvalitativ analys av de alkaliska jordmetallerna; B. Sjöberg, Titrierung von Glycerin-monohalogenhydrin mit Bleitetraacetat; N. Hellström, Om reaktionsbenägenhet och elektronfördelning; O. Samuelson, Om dynamiska jämviktsläget vid filter av jonutbytande ämnen; C. Brosset, The ionic equilibrium in acid ferric chloride solutions of fixed ionic strength; B. Steenberg, Adsorption av starka elektrolyter på aktivt kol; K. Myrbäck o. Ebba Gyllensvärd, Über das Reduktionsvermögen methylierter Zucker; J. Landon, Något om de terapeutiskt verksamma sulfanilamidernas kemi; Stina Ställberg o. E. Stenhagen, Monolayer studies on ketones; A. Bernton, Minnesord över Carl Kjellin.

Teknik för alla, 1941: 36—52; 1942: 1—6.

Ur innehållet: Bröd och dynamit ur vatten och vind; Några data ur robotens historia; Existera dödsstrålarna?; Marconi; Focker; Upplandslera formas och förädlas; Oljans väg från källorna; Negativ materia; En cykelbil tar form; Yrkesprövningens problem; Enkelt om radio; Striden mellan likström och växelström; Cement för glas och metaller; Lampa dödar mikrob; Glödlampor för seriekoppling; Kölden i människans tjänst; Språnget ut i världsrummet; Lödning av aluminium; ABC i järn och stål; Gummi; Att bygga en fiol; Kan man flyga till månen?; Karbiden; 16 samtal på samma tråd; Sällsamma fakta om värme; Enkel hemgjord be-

lysningsmätare; Galvanisering av metaller; Flodvågen som energikälla; Sveriges första förbränningsmotor; Autogir och helicopter; Torrlikriktare; Television i naturliga färger.

Populär radio, 1941: 9—12; 1942: 1.

Ur innehållet: Mottagarrörens verkningssätt; Television i USA; Amplitud-, fas- och frekvensmodulering; »Nyckelrörens» användning; Nätapparater ur säkerhetssynpunkt; Flyg- och sjönavigering med hjälp av radion; Sekundäremissionen; Tonkontroll; Ohms lag i nomogram; Motstånds- och kapacitetsbrygga.

Flygning, 1941: 17—24; 1942: 1—3.

Ur innehållet: Helicopterns framtid; Tredimensionella illustrationer, ett nytt undervisningsmedel; Väderleken i de högre luftlagren; Avgasningsenergiens utnyttjande på flygmotorer; Den elektriska utrustningen i flygplan och på flygmotorer; Automatisk radiokompass; Några betydelsefulla tyska lättmetallegeringar; Väderlekstjänst och flygvapen; Ofrivillig »skywriting»; Medicinska problem vid flygning. Det svenska flygvapnet skildras i flera artiklar i nr. 21. Segelflyg och modellflyg behandlas i varje nr.

ERA, 1941: 1—12; 1942: 1.

Ur innehållet: Elbilen; Laddningsutrustning för batteridrivna fordon; Nomogram för spänningsfallsberäkningar; Nutida elektriska mätinstrument; Återupplivning genom konstgjord andning; Elvärmeapparaternas konstruktionsmaterial; Brandskydd; Lampugnar; Elteknikens material, försörjningsläge och ersättningsmöjligheter; Steriliseringslampor; Kraftförsörjningen och krisen; Vad innebär 5 % spänningssänkning?; Ett stort antal elnyheter.

Ljuskultur, 1941: 3—4.

Ur innehållet: Lysämneslampors form och färg; Punktljus eller ytljus; Glas som belysningsmaterial; Odling av växter i konstljus; Beräkning och mätning av belysning med lysämneslampor; Principer för beräkning av dagsljus inomhus; Den nya ljusenhetens historia och primärnormalens slutgiltiga utformning.

IVA, 1941: 1—4.

Ur innehållet: De framtida möjligheterna för vår svenska vattenkraftförsörjning; Inverkan av alkali på trä; Metod att förarbeta alunskiffer; Porolys genom inverterad förbränning; Vorstellungen über den Mechanismus der Diffusion von Edelgasen in festen Stoffen; Korrosionsförsök; Mätning av tändningsfördröjningar med katodstråleoscillograf; Dubbelkompensator; Röntgenmetoder inom den tekniska metallforskningen; Syntetiska lackhartser; Nyare metoder för förädling av linolja; Ingenjörsvetenskapsakademiens verksamhet 1940- 41; Något om den tekniskvetenskapliga utvecklingen.

Nordisk Astronomisk Tidsskrift, København 1941: 3—4; 1942: 1.

Ur innehållet: K. Thernøe, Zodiakallyset; B. Strömgren, Om Identificering af Korona-Linierna; J. Ohlsson, Isaac Newton och hans »Naturvetenskapens matematiska principer»; Å. Wallenquist, Erosoppositionen 1930—31 och solparallaxen; A. V. Nielsen, Ti Aars Lyskurve for Z Ursae majoris; G. Hervesey, Jordens Alder; E. Strömgren, Store Radialhastig-

(Forts. sid. 63.)

Problemavdelning.[1]

Matematiska uppgifter.

1204) *Toppen i en pyramid utgöres av ett regelbundet n-sidigt hörn. Tre på varandra följande sidokanter ha längderna a, b och c. Beräkna de övrigas längd.* *X.*

1205) *Lös ekvationssystemet*

$$\left.\begin{aligned} 1+(y-z)^2 &= 2x \\ 16+(z-x)^2 &= 8y \\ 81+(x-y)^2 &= 18z \end{aligned}\right\}.$$

X.

1206) *I likheten* $(1+\sqrt{5})^n = A_n + B_n \cdot \sqrt{5}$, *där* $n = 1, 2, \ldots$, *äro* A_n *och* B_n *positiva, hela tal. Visa, att såväl* A_n *som* B_n *äro jämnt delbara med* 2^{n-1}. *Stig Comét.*

Enklare matematiska uppgifter.[2]

1207) Genom en punkt inom en triangel dragas linjer parallella med triangelns sidor. De stycken av dessa linjer, som ligga inom triangeln äro alla lika långa. Beräkna deras längd uttryckt i sidorna.

Svar: $\dfrac{2abc}{ab+ac+bc}$.

1208) Visa, att $\sqrt{\cos^4\frac{\alpha}{4} - \cos\frac{\alpha}{2}} + \sqrt{\sin^4\frac{\alpha}{4} + \cos\frac{\alpha}{2}} = 1$.

1209) I en likbent triangel ABC tangerar den inskrivna cirkeln triangelns sidor i punkterna A_1, B_1, C_1. Förhållandet mellan ytorna av trianglarna $A_1B_1C_1$ och ABC är $\frac{3}{16}$. Beräkna toppvinkeln i triangeln ABC.

Svar: 28°,96 eller 97°,18.

1210) I triangeln ABC är $AB = AC$. Från B dragas bissektrisen och medianen mot AC. Bestäm vinkeln mellan bissektris och median, om den senare är lika lång som sidan AC.

Svar: 2°,84.

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. BÅGMAN, till vilken uppgifter och lösningar kunna insändas under adress: Högre allm. läroverket å Östermalm, Stockholm.

[2] Uppg. 1207—1208, 1213—1218 äro insända av *X.*, 1209—1211 av *E. Smn*, 1212 av *S. B.*

1211) I en likbent triangel ABC tangera de vidskrivna cirklarna sidorna i punkterna A_1, B_1 och C_1. Visa, att förhållandet mellan ytorna av trianglarna $A_1B_1C_1$ och ABC är maximum, då triangeln ABC är liksidig.[1]

1212) En tangent till kurvan $y = x^2$ bildar med x-axeln och linjen $x = 2$ en triangel. Bestäm tangeringspunkten så, att triangelns yta blir så stor som möjligt.

Svar: Punkten $\left(\frac{4}{3}; \frac{16}{9}\right)$.

1213) Bestäm längden av den fokalradie hos hyperbeln $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, vars mittpunktsnormal tangerar hyperbeln.

Svar: $4a$.

1214) Bestäm minsta längden av den tangent, som kan dragas från någon punkt på konjugataxeln till hyperbeln $x^2 - 3y^2 = 12$.

Svar: 6 längdenheter.

1215) En rörlig tangent till parabeln $y^2 = 4ax$ skär den fasta diametern $y = b$ i B och topptangenten i C. Sök orten för mittpunkten av BC.

Svar: Parabeln $2y^2 - 3by + ax + b^2 = 0$.

1216) En punkt P på storaxeln till en ellips med brännpunkterna i F och F_1 är så belägen, att $FP : PF_1 = 3 : 4$. De ellipsnormaler, som gå genom P och icke sammanfalla med axeln, äro vinkelräta mot varandra. Beräkna excentriciteten.

Svar: $\frac{1}{5}$.

1217) Tangenterna till en hyperbel i ena parameterkordans ändpunkter skära en asymptot i A och B. Sträckan AB är dubbelt så stor som parametern. Beräkna vinkeln mellan asymptoterna.

Svar: 60°.

1218) Diskutera kurvan $y = x\sqrt{\frac{5-3x}{x+1}}$.

Lösn. till uppg. 1175—1177.

1175) *Vilken cirkel skär var och en av tre cirklar i rymden i två punkter?* *N. J.*

Undersökningen grundar sig på följande satser:

1) Om två cirklar skära varandra i två punkter, så ligga de på en sfär (äro cosfäriska). (Plan räknas som specialfall av sfär.)

[1] För godtyckliga trianglar är både i ex. 1 209 och 1 211 $\Delta A_1B_1C_1 : \Delta ABC = r : 2R \leqq \frac{1}{4}$, varvid likhet är möjlig endast för liksidiga trianglar.

2) Två cosfäriska cirklar skära varandra i två punkter, som kunna vara imaginära.

3) Två ej cosfäriska cirklar bestämma en sfär, som skär dem båda ortogonalt. (Medelpunkten måste ligga på cirkelplanens skärningslinje och erhålles, om man viker planen, så att de sammanfalla, och drar radikalaxeln till de båda cirklarna. Äro cirklarna hakade i varandra, blir den ortogonalt skärande sfären imaginär.)

4) Till två cosfäriska cirklar hör ∞^1 sfärer, som skära dem båda ortogonalt. Sfärerna bilda en lineär sfärskara, d. v. s. de gå alla genom en cirkel.

5) Tre sfärer, som ej gå genom en cirkel, bestämma en cirkel, som skär dem alla ortogonalt. (Cirkeln ligger i centralplanet och dess axel är radikalplanens skärningslinje. Radien kan vara imaginär.)

6) Om en cirkel skär en sfär ortogonalt, så är detsamma förhållandet med alla sfärer genom cirkeln.

7) Om två cirklar båda skära två sfärer ortogonalt, så äro de cosfäriska. Deras axlar ligga nämligen i sfärernas radikalplan.

Lösning: Konstruera enligt sats 3 de sfärer S_1, S_2 och S_3, som skära de givna cirklarna C_1, C_2 och C_3 parvis ortogonalt. Dessa tre sfärer ha enligt sats 5 en ortogonalt skärande cirkel C_4. Denna är enligt sats 7 cosfärisk med var och en av C_1, C_2 och C_3 och skär enligt sats 2 dem var och en i två punkter.

Specialfall:

a) Om C_2 och C_3 äro cosfäriska (ligga på en sfär S_4), blir S_1 ej entydigt bestämd utan utgör enligt sats 4 en lineär sfärskara. Det finns ∞^1 cirklar C_4, som lösa uppgiften, nämligen alla cirklar på S_4, som gå genom skärningspunkterna mellan C_1 och S_4.

b) Om dessutom C_1 och C_3 äro cosfäriska, inses på samma sätt, att det finns ytterligare ∞^1 cirklar C_4.

c) Om alla tre cirklarna är cosfäriska, finns det ∞^3 lösningar, nämligen alla cirklarna på sfären i fråga.

d) Om S_1, S_2 och S_3 gå genom en cirkel, så måste C_1, C_2, C_3 och även C_4 tillhöra de ∞^2 cirklar, som skära sfärskaran ortogonalt. Alla dessa ∞^2 cirklar gå genom två fixa punkter, som äro imaginära, om cirkeln är reell. Är cirkeln däremot imaginär (sfärskaran utgöres då av sfärer med gemensamt radikalplan), så äro de fixa punkterna reella. *F. E.*

1176) *Sök orten för mittpunkten av det mellan koordinataxlarna belägna stycket av en tangent till cirkeln* $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. *Studera specialfallen: 1:o* $a=b=0$, *2:o* $a=r$; $b=0$; *3:o* $a=b=r$. *Lwl.*

Vi beteckna tangeringspunkten med $(x_1; y_1)$, mittpunkten med $(x'; y')$. Tangentens ekv. satisfieras av $x = 2x'$ och $y = 0$ samt av $x = 0$ och $y = 2y'$, varav $(2x' - a)(x_1 - a) = r^2 + b(y_1 - b)$ och $(2y' - b)(y_1 - b) = r^2 + a(x_1 - a)$. Härav fås $\frac{x_1 - a}{y'} = \frac{y_1 - b}{x'} = \frac{r^2}{2x'y' - bx' - ay'}$. Insättning av värdena på $x_1 - a$ och $y_1 - b$ i cirkelns ekv. ger ortens ekv. $r^2(x^2 + y^2) = (2xy - bx - ay)^2$.

1) $a = b = 0$ ger $r^2(x^2 + y^2) = 4x^2y^2$ eller $\left(x^2 - \frac{r^2}{4}\right)\left(y^2 - \frac{r^2}{4}\right) = \frac{r^4}{16}$. Kurvan är symmetrisk med hänsyn till axlarna. Asymptoter $x = \pm\frac{r}{2}$ och $y = \pm\frac{r}{2}$. ($x = 0$, $y = 0$ isolerad punkt.)

2) $a = r$; $b = 0$. Ekv. är $x(4y^2 - r^2) = 4ry^2$. Orten är symmetrisk med hänsyn till x-axeln. Asymptoter $x = r$ och $y = \pm\frac{r}{2}$.

3) $a = b = r$. Ekv. är $(y - r)(x - r) = \frac{r^2}{2}$, d. v. s. en liksidig hyperbel med asymptoterna $x = r$ och $y = r$. *Lwl.*

1177) *I en cirkel drages en korda KL; A och B äro fasta punkter på den ena bågen, P en rörlig punkt på den andra. Linjerna PA och PB avgränsa sträckan XY på KL. Konstruera P så, att XY blir maximum.* *X.*

Vi tänka oss, att AP och följaktligen BP vrida sig med vinkelhastigheten w. Den längs KL riktade hastigheten v_x hos punkten X upplöses i en mot AX vinkelrät komposant $AX \cdot w$ och en komposant längs AP. Härav fås $v_x = \frac{AX \cdot w}{\sin \angle PXY}$ och $v_y = \frac{BY \cdot w}{\sin \angle PYX}$. När X och Y passera de punkter X_0 resp. Y_0, där XY är maximum, måste $v_x = v_y$, varav $AX_0 : BY_0 = \sin \angle P_0X_0Y_0 : \sin \angle P_0Y_0X_0 = P_0Y_0 : P_0X_0$ d. v. s. $AX_0 \cdot P_0X_0 = BY_0 \cdot P_0Y_0 = KX_0 \cdot LX_0 = KY_0 \cdot LY_0$, vilket innebär, att KL och XY ha samma mittpunkt M. Konstruktionen blir därför följande. Utdrag BM stycket $MC = BM$ och upprita på AC ett cirkelsegment, som innehåller vinkeln $180° - \angle APB$. Tillhörande cirkelperiferi går genom den punkt B_1, där BM skär den givna cirkeln för andra gången. Bågen skär KL i X_0; AX_0P_0 och BY_0P_0 ge maximilängden X_0Y_0, ty $\triangle BMY_0 \cong \triangle CMX_0$, varav $MY_0 = MX_0$. *X.*

Även löst av *L. Krogset.*

Fyllnadsprövning efter studentexamen.

Januari 1942.

Matematiska uppgifter för latinlinjen.

1. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} a^2(a^2 - xy) = b^2(b^2 + xy), \\ \frac{1}{2}(x + y) = a. \end{cases}$$

2. I var och en av två olika stora trianglar är en sida 42 cm, en annan 28 cm och den mot den senare sidan stående vinkeln 31°,6. Beräkna skillnaden mellan dessa båda trianglars ytor.
3. I en triangel äro sidorna 5 cm, 7 cm och 6 cm. En cirkel har sin medelpunkt på den sistnämnda sidan och tangerar de båda övriga sidorna. Radierna till tangeringspunkterna äro dragna. Beräkna de vinklar, som dessa radier bilda med varandra och med den triangelsida, som går genom medelpunkten.
4. Från en punkt på 20 cm avstånd från medelpunkten i en cirkel med 10 cm radie har man dragit tre linjer: en linje L_1 till den närmast belägna punkten på cirkellinjen, en tangent L_2 och en linje L_3 till mittpunkten på den båge, som ligger mellan tangeringspunkten och ändpunkten för L_1. Beräkna ytan av den figur, som begränsas av L_2 och L_3 samt den mellan dem liggande bågen.
5. Från en jordbävningshärd utgå olika vågrörelser. En följer jordytan, en annan fortplantar sig genom jordklotet. En avlägsen seismologisk station erhåller kännedom om jordbävningen först genom den sistnämnda vågrörelsen, »förelöparen», och därefter genom den förstnämnda. Vid en ungefärlig beräkning kan man antaga, att »förelöparen» går rätlinigt med en hastighet av 11 km/sek och att den vågrörelse, som följer jordytan, har en hastighet av 3,5 km/sek. Med ledning av tidsskillnaden mellan stationens första känning av dessa båda vågrörelser kan avståndet till jordbävningshärden uppskattas. Om denna förmodas ligga på ett avstånd av 14 000 km, räknat längs jordytan, hur många minuter kan då nämnda tidsskillnad beräknas uppgå till? Jorden antages vara ett klot med omkretsen 40 000 km.
6. Av två olika hushållsspisar kostar den ena i inköp 200 kr, den andra 800 kr. Den årliga kostnaden vid användning beräknas för den förra spisen bli 100 kr, för den senare däremot endast 65 kr. Båda spisarna beräknas vara lika hållbara. Hur många år skola de vara i bruk, för att den dyrare spisen skall ställa

sig ekonomiskt fördelaktigare än den andra? Man antar, att de årliga kostnaderna erläggas vid årets slut. Ränta beräknas efter 5 %.

7. För olika värden på konstanten a betyder ekvationen $3x - y = a$ räta linjer, som äro parallella. Visa medelst grafisk metod, att ekvationssystemet

$$\begin{cases} y = x^2, \\ 3x - y = a \end{cases}$$

har två reella lösningar, om $a = 1{,}25$, men inga, om $a = 3{,}25$. Undersök, likaledes medelst grafisk metod, för vilket värde på a ekvationssystemet får två lika lösningar.

8. Genom en punkt på en diameter i en cirkel med radien 13 cm dragas två kordor, vilka med diametern bilda vinklar på 30°. Dessa kordor ha längden 24 cm. Två på samma sida om diametern liggande ändpunkter på kordorna sammanbindas. Beräkna längden av denna sammanbindningslinje.

Resultat: **1.** $x_1 = a + b$ och $y_1 = a - b$; $x_2 = a - b$ och $y_2 = a + b$. **2.** 381,0 cm². **3.** Vinkeln mellan radierna är 122°,87 och vinklarna med sidan 11°,54 och 45°,59. **4.** 10,42 cm². **5.** 49,5 min. **6.** Minst 40 år. **7.** $a = 2{,}25$. **8.** $\sqrt{507} = 22{,}52$ cm.

Matematiska uppgifter för realgymnasiet.

Allmän kurs.

1. I en triangel är höjden mot en sida dragen. Var på denna höjd skall en punkt P vara belägen, för att summan av kvadraterna på avstånden från P till triangelns hörn skall vara så liten som möjligt?
2. I en triangel ABC är vinkeln A dubbelt så stor som vinkeln B och sidan BC dubbla medelproportionalen till de övriga sidorna. Beräkna triangelns vinklar.
3. Lös x ur ekvationen

$$(ax+b)(bx+c)(cx+d)(dx+a) = (a+bx)(b+cx)(c+dx)(d+ax).$$

4. En halvsfär och en regelbunden fyrsidig pyramid tänkas placerade på samma plana underlag. Pyramidens basyta är omskriven kring halvsfärens plana yta. Pyramidens kanter äro alla lika långa. Hur stor del av halvsfärens volym faller utanför pyramiden?
5. I en cirkel med 65 cm radie är en fyrhörning $ABCD$ inskriven. Sidorna AB, BC och CD äro i ordning 66 cm, 78 cm och 50 cm. Visa utan att använda tabell, att cirkelbågen $ABCD$ är en halvcirkel.

6. Visa, att normalen i punkten $(-2;\ 0{,}5)$ till kurvan $y = x^2 + 8x + 12{,}5$ går genom origo. Finns ytterligare någon normal till kurvan med samma egenskap? Angiv i så fall dess ekvation.
7. Bevisa formeln

$$\sin\alpha + \sin 2\alpha + \ldots\ldots + \sin n\alpha = \frac{\sin\frac{n+1}{2}\alpha\ \sin\frac{n}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

8. I en godtycklig triangel är H höjdernas skärningspunkt, M medianernas skärningspunkt och N mittpunktsnormalernas skärningspunkt. Bevisa — lämpligen medelst analytisk geometri — att H, M och N ligga i rät linje samt att M delar sträckan HN innantill i förhållandet $2:1$. [Satsen om Eulers linje.]

Resultat: 1. På $\frac{1}{3}$ av höjden från basen räknat. 2. A, B och C äro resp. $109°{,}46$, $54°{,}73$ och $15°{,}81$. 3. Av $\frac{(ax+b)(bx+c)}{(a+bx)(b+cx)} = \frac{(c+dx)(d+ax)}{(cx+d)(dx+a)}$ erhålles genom fördelning $\frac{b(a-c)(x^2-1)}{(a+bx)(b+cx)} = \frac{d(a-c)(x^2-1)}{(cx+d)(dx+a)}$, varav $(a-c)(x^2-1)[b(cx+d)(dx+a) - d(a+bx)(b+cx)] = 0$ och $x(x^2-1)(a-c)(b-d)(ac-bd) = 0$. Rötterna äro alltså $x = 0$ och $x = \pm 1$, såvida ej 1) $a = c$ eller 2) $b = d$ eller 3) $ac - bd = 0$, då ekv. är en identitet. 4. $4 - \frac{14\sqrt{6}}{9} = -0{,}190$ (Obs. Pyramiden ifråga har nätt och jämnt tillräcklig höjd för att pyramidsidorna skola utskära klotsegment). 5. Sätt medelpunktsvinklarna $= 2\alpha$, 2β, 2γ, så fås $\sin\alpha = \frac{33}{65}$; $\sin\beta = \frac{3}{5}$; $\sin\gamma = \frac{5}{13}$, varav $\sin(\beta+\gamma) = \frac{56}{65} = \cos\alpha$. 6. Ja, $x - 2y = 0$. 8. Lägg tyngdpunkten i origo och en sida parallell med x-axeln. Om två hörn äro $(2a;\ 2c)$ och $(2b;\ 2c)$, blir det tredje $[-(2a+2b);\ -4c]$. Lätt visas nu, att $x_H = -2x_N$ och $y_H = -2y_N$. — Geometriskt kan satsen bevisas t. ex. på följ. sätt: Drag medianen AA_1 och låt P vara en punkt på BC:s mittnormal. Förläng PM ett stycke $MQ = 2PM$ och sammanbind Q och A. Trianglarna PA_1M och QAM äro likformiga. Alltså ligger Q på höjden från A. På samma sätt: om P ligger på AC:s mittnormal, ligger motsvarande punkt Q på höjden från B. Är P mittnormalernas skärningspunkt, är alltså Q höjdernas skärningspunkt. Ett annat geometriskt bevis är följ.: Om A_1, B_1, C_1 äro mittpunkterna på BC, AC och AB, så är N höjdernas skär-

ningspunkt i $\triangle A_1B_1C_1$. Trianglarna $A_1B_1C_1$ och ABC äro likformiga i skalan 1 : 2 och A_1N och AH äro motsvarande sträckor, vilka alltså förhålla sig som 1 : 2; HN delar då A_1A i förh. 1 : 2. Den går alltså genom tyngdpunkten M och $MN : MH = 1 : 2$.

Matematiska uppgifter för realgymnasiet.

Specialkurs.

1. I en ellips med excentriciteten $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ligger medelpunkten i origo och storaxeln längs x-axeln. Ellipsen skäres av cirkeln $x^2 + y^2 = 36$, så att skärningspunkterna bilda hörnen i en kvadrat. Sök ellipsens ekvation.
2. Brännpunkterna till hyperbeln $16x^2 - 9y^2 - 192x - 36y + 684 = 0$ sammanbindas med origo. Beräkna ytan av den fyrhörning, som begränsas av dessa sammanbindningslinjer och hyperbelns asymptoter.
3. Bestäm maximi- och minimivärdena av funktionen
$$\cos(x + \alpha)\cos(x - 3\alpha),$$
där α är en konstant.
4. Av tunn plåt, som väger 100 g/dm², skall tillverkas ett kärl i form av en rät cirkulär kon med lock. Vilken är den största volym, som ett dylikt kärl kan få, om det med lock får väga högst 1 kg? Man bortser från vikten av lödningsmaterialet.
5. En parabel, vars axel är parallell med y-axeln, går genom punkterna (2; 1) och (0; 4). Bestäm orten för parabelns vertex, och konstruera ortkurvan med angivande av eventuella maxima, minima och asymptoter.
6. Upprita kurvan $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ i dess huvuddrag. Normalen till kurvan i en punkt P skär x-axeln i N. Undersök, hur projektionen av sträckan PN på x-axeln varierar, då punkten P genomlöper kurvan.
7. Normalen i en punkt P på en ellips skär storaxeln i Q. Visa, att projektionen av PQ på en av brännpunktsradierna till punkten P är konstant.

Resultat: 1. $x^2 + 3y^2 = 72$. 2. $18\frac{2}{11}$ ytenh. 3. Max. $= \cos^2 2\alpha$, min. $= -\sin^2 2\alpha$ (den givna produkten förvandlas till en summa). 4. $\sqrt{\frac{125}{9\pi}} = 2{,}_{10}$ l. 5. Ortkurvan är hyperbeln $y = \frac{3x^2 - 16x + 16}{4(1 - x)}$; max.punkt (2; 1); min.punkt (0; 4); asymptoter äro $x = 1$ och

$3x + 4y = 13$. **6.** När P går från (0; 1) till $\pm\infty$, växer *storleken* av projektionen till ett max. för $x = \pm 0{,}2$ för att sedan avta till 0. **7.** Låt PQ vara normalen från P $(x_1; y_1)$ och z dess projektion på brännpunktsradien $PF = r = a + ex_1$ samt $\varphi = \angle PFQ$. Då är $FQ = \frac{r}{r+r_1} \cdot 2c = \frac{c}{a} \cdot r = er$ och $\cos\varphi = \frac{x_1+c}{r}$. Man har då $z = PF - QF\cos\varphi = r - er\cos\varphi = a + ex_1 - ex_1 - ec = \frac{b^2}{a}$, d. v. s. halva parametern. — Man kan även med fördel använda projektionssatsen på trianglarna PQF och PQF_1. Om $PQ = v$, erhålles $e^2r^2 = r^2 + v^2 - 2rz$ och $e^2r_1^2 = r_1^2 + v^2 - 2r_1z$, varur $e^2(r_1^2 - r^2) = (r_1^2 - r^2) - 2z(r_1 - r)$ och $z = a(1 - e^2) = \frac{b^2}{a}$.

Uppgifter i fysik.

Lösningarna till uppgifterna 1 och 2 samt 4—8 böra åtföljas av enkla figurer. Erforderliga konstanter, vilka ej äro uppgivna i problemens text, hämtas ur formelsamlingen.

1. Världsrekordet i kulstötning är 17,4 m; kulans vikt antages ha varit 7,25 kg. För att få en ungefärlig uppfattning om den rörelseenergi, idrottsmannen i detta fall givit kulan, antaga vi, att den lämnade handen under elevationsvinkeln 45° på en höjd av 1,8 m över marken, samt bortse från att handen därvid måhända icke befunnit sig exakt över den punkt, från vilken rekordlängden uppmättes. Beräkna under dessa antaganden kulans rörelseenergi i begynnelseögonblicket.
2. Två glatta kulor K_1 och K_2, vilkas radier äro 2 resp. 4 cm, äro upphängda i samma punkt medelst snören, vilkas längder avpassats på sådant sätt, att båda kulornas medelpunkter befinna sig på 6 cm avstånd från upphängningspunkten. Kulan K_1 väger 100 g, kulan K_2 250 g. Beräkna spänningen i snörena.
3. I en behållare, där lufttryck och temperatur äro resp. 750 mm Hg och 20° C, införes 20 g flytande eter, varefter behållaren tillslutes och det hela upphettas till 100° C. Beräkna det totala gastrycket i behållaren vid denna temperatur. En viss volym eterånga väger 2,58 gånger så mycket som en lika stor volym luft av samma tryck och temperatur. Eterångas maximitryck vid 100° C är 4 859 mm Hg. Behållarens volym är 10 liter; dess värmeutvidgning försummas, likaså volymen av den införda vätskan.
4. Huvudsnittet hos ett glasprisma bildar en likbent rätvinklig triangel. En med hypotenusan parallell ljusstråle träffar pris-

mat nära den räta vinkelns spets. Beräkna vinkeln mellan den infallande och den ur prismat utträdande strålen.

5. En kikares synfält mätes genom synvinkeln för blotta ögat av ett avlägset föremål, som nätt och jämnt uppfyller synfältet, då föremålet betraktas i kikaren. För att experimentellt bestämma synfältet för en astronomisk kikare använde man vid ett tillfälle en kollimator, bestående av en lins med brännvidden 25 cm och en i dennas fokalplan anbragt belyst millimeterskala. Kikaren och kollimatorn uppställdes med sammanfallande optiska axlar, så att objektivet och kollimatorlinsen voro vända mot varandra. Genom kikaren kunde man då efter inställning av okularet tydligt iakttaga 37,2 mm av skalan. Beräkna kikarens synfält.
6. I ett homogent horisontellt magnetfält befinner sig en deklinationsnål. Avståndet mellan dess poler är 8,6 cm; vardera polen påverkas av fältet med kraften 62 dyn. Magnetnålen är från början inställd i kraftfältets riktning. Huru stort arbete fordras för att vrida nålen 45° ur detta läge?
7. En sluten strömkrets från en ackumulator innehåller i serie en ampèremeter A, ett obekant motstånd r och ett bekant motstånd av storleken 1,2 ohm. En galvanometer G med obekant motstånd R anslutes först som en shunt till ändarna av motståndet r i strömkretsen, varvid strömstyrkan i A befinnes vara 1,00 ampère och i G 0,05 ampère. Därefter lösgöres galvanometern G från motståndet r och anslutes i stället på samma sätt till ändarna av det bekanta motståndet 1,2 ohm, varvid strömstyrkan i A befinnes vara 1,05 och i G 0,11 ampère. Beräkna motstånden r och R.
8. En cirkulär kopparskiva med 17,8 cm radie sitter på en axel, som går vinkelrätt mot skivan genom dess medelpunkt. Om axeln inställes horisontellt i den magnetiska meridianen och skivan bringas att rotera kring axeln med en hastighet av 50 varv i sekunden, uppkommer en viss elektrisk spänning mellan axeln och skivans kant. För att mäta denna spänning anbringar man en släpkontakt A mot axeln och en annan släpkontakt B mot skivans kant. A förbindes med en galvanometer, som därjämte anslutes till den ena ändpunkten C av en 1 m lång jämntjock och homogen metalltråd CD. Denna metalltråd ingår i en strömkrets, som dessutom i serie innehåller ett motstånd och en ackumulator, vars elektromotoriska kraft är 2,0 volt; det totala motståndet i denna strömkrets är 2 000 gånger så stort som trådens motstånd. Släpkontakten B är förbunden med en glidkontakt E, som man förskjuter utefter metalltråden till sådant läge, att galvanometern icke gör något utslag. Längden

av traden mellan C och E utgör då 8,0 cm. Beräkna det jordmagnetiska fältets styrka på platsen, då man vet, att inklinationen är 71° samt att den i en ledare inducerade elektromotoriska kraften utgör 10^{-8} volt, då ledaren skär en magnetisk kraftlinje i sekunden. Kraftlinjerna i ett magnetiskt fält tänkas dragna så tätt, att antalet linjer genom en mot fältet vinkelrät yta av storleken 1 cm² blir lika med talvärdet av fältstyrkan uttryckt i gauss.

Resultat: 1. 57,2 kgm. 2. 112 och 280 gf. 3. 1 577 mm. 4. Strålen devieras 61,2 och lämnar prismat vid basytan. 5. 8°,5. 6. 156 erg. 7. r och R äro resp. 0,54 och 10,25 ohm. 8. 0,494 gauss.

(Forts. från sid. 52.)

heder; O. Hesselberg, De vigtigste Radiotidssignaler; E. Strömgren, Astronomiske Regneeksempler; E. Strömgren, Nordiske Privatastronomer: Flygförare G. Peterson, Göteborg, Dr techn. P. Bergsøe, København, og Lærer R. F. Rasmussen, Helsingør.

Matematisk Tidsskrift, København 1940, A: 4; 1941: 1—2.

Ur innehållet i **A**: W. Fenchel, Nepers Regel for den retvinklede sfæriske Trekant; H. Clausen, Vendecirklen; W. Fenchel, Om Udvidelser af Rolles Sætning; H. C. Espensen, Geometriske Forsøg udførte ved Passer alene; F. Fabricius-Bjerre, Vektorregning. Ur innehållet i **B**: F. Fabricius-Bjerre, En elementargeometrisk opgave vedrørende perspektive trekanter; W. Fenchel, Om det projektivgeometriske Grundlag for den ikke-euklidiske Trigonometri; A. Wahlgren, Om tal som kunna skrivas som en summa av fyra kubiktal; E. Følner, Arten af et Keglesnit bestemt ved fem Punkter eller fem Linier; Litteraturanmeldelser.

Fysisk Tidsskrift, København 1941: 4—6.

Ur innehållet: T. Bjerge, P. O. Pedersen 1874—1941; R. E. H. Rasmussen, Om Molekyler og Molekylbevægelser; B. Bjerke, Fordampningsvarmen som funksjon av temperaturen.

Det fjärde häftet är ägnat åt minnet av Kirstine Meyer, f. Bjerrum, som betytt så mycket för dansk fysik, icke minst för fysikundervisnjngen i Danmark. Häftet var avsett att bli en hyllning på 80-årsdagen den 12 okt. 1941, men fru M. avled den 28 sept., och häftet blev i stället ett minneshäfte. Under rubriken »Fysik i Skolen» innehåller det ett stort antal mindre artiklar: Den fløjtende Lysbue; Forsøg med flydende Luft; Faren ved Forsøg med Kviksølv; En astronomisk Kikkert til Undervisningsbrug; Lysinterferens; Gnidningskræfter; Forsøg over sammensat Bevægelse; Forsøg med Vædskehinder; Accelerationsfelter; Den togrenede Hævert; Overmættet og overhedet Vanddamp; Om Undervisningen i Induktion og Vekselstrøm; Forsøg over Varmestråling; Apparatsæt til elektromagnetiske Maalinger; Nogle Skoleforsøg med Fotoelementet.

Naturens Verden, København 1941: 1—10.

Ur innehållet: Arvelighedslæren og Udviklingslæren i moderne Belysning af H. Fogh, M. Westergaard og J. H. Wanscher; N. Haarløv, En Foraarstur langs Grønlands Østkyst; J. P. Møller, Reflektionsfri Optik;

H. PETERSEN, Om Fysik og Virkelighed; M. HANSEN, Giftige Planter og Dyr; J. P. MØLLER, Kometerne i Aaret 1940; S. L. TUXEN, Er Fugle musikalske; K. SCHMIDT-NIELSEN, Vintersøvn; A. T. JENSEN, Krystaller og Røntgenstraaler; E. ZEUTHEN, Om Varmeregulation hos Insekterne.

Norsk Matematisk Tidsskrift, Oslo 1941: 3—4.

Ur innehållet: I. JOHANSSON, Prof. Heegaard 70 år; J. HJELMSLEV, Om Kurverne i et Nulsystem; J. NIELSEN, En Sætning fra Fladeafbildningernes Topologi; O. P. ARVESEN, Pohlkes setning; W. WERENSKIOLD, En sats om kurver av 3dje orden, 3dje klasse, med en spiss og et infleksjonspunkt; O. M. THALBERG, Noen harmoniske egenskaper ved algebraiske kurver av n:te orden med et $(n-2)$-dobbelt punkt; P. HEEGAARD, Friedrich Engel; W. LJUNGGREN, Litt om simultane Pellske ligninger.

Naturen, Bergen 1941: 6—12; 1942: 1.

Ur innehållet: ELLEN GLEDITSCH, Mengdene av radioaktive stoffer i visse bergarter; G. ÅLVIK, Litt om stoffbevegelse i planter; T. BARTH, Geysirer og Geysirteorier; TH. HESSELBERG, Klimavariasjoner i Norge i vår tid; K. F. WASSERFALL, Solaktiviteten og den syn- og målbare virkning på Solen selv og på vår klode; T. HØVERSTAD, Litt om rustfritt stål i forntid, nutid og fremtid; S. EINBU, Stutt oversyn over solsystemet; S. EVJEN, Litt planet-meteorologi.

Uppsatser av matematiskt och naturvetenskapligt innehåll i följande tidskrifter under 1941.

Tidning för Sveriges läroverk: C. E. SJÖSTEDT, Allmän kurs och specialkurs i matematik (nr 2).

Skola och Samhälle, 8 häften, 272 s.: Å. FÄLTHEIM, Undersökning rörande övergång från en subtraktionsmetod till en annan (nr 5).

Tidskrift för Svenska Folkhögskolan, 4 häften, 340 s.: A. SÖRLIN, Något om geologiska studier (h. 2); H. NELSON, Leonard Holmström som vetenskapsman (h. 4).

Skola och Hem, tidskrift utg. av Finlands svenska läroverksförening, 4 häften, 226 s.: Skriftliga uppg. i studentexamen våren 1941 (h. 1); G. TEGENGREN, Proven i matematik vid studentexamen våren 1941 (h. 3).

Tidskrift utg. av Pedagogiska föreningen i Finland, 5 häften, 266 s.: T. LINDBLAD, Den matematisk-statistiska undersökningen i »The Matriculation Examination in Finland» (h. 2). För övrigt uppsatser på finska, av vilka en del åtföljas av referat på tyska.

Matemaattisten Aineiden Aikakauskirja (Tidskrift för matematiska ämnen), 4 häften, 150 s. Uppsatser på svenska: G. ELFVING, Sannolikhetskalkylens grunder i modern belysning (h. 1); K. F. LINDMAN, Om ultraljud (h. 3—4).

Den høgre Skolen, Oslo, 20 häften, 532 s.: K. PIENE, Skriftelig eksamen i matematikk i den høgre skolen (h. 7 och 8); O. F. OLDEN, Matematikken på engelsklina (h. 10). Opgaver ved middelskoleeksamen 1940 (h. 1 o. 2); opgaver ved middelskoleeksamen og artium 1941 (h. 18 o. 19).

Syn och Segn, Oslo, 10 häften, 488 s.: S. HASUND, Den eldste tobaksdyrkinga i Noreg (h. 1); O. GULLVÅG, Vitaminkunnskap i vikingatid (h. 5); A. RØSTAD, Energiproblemet (h. 6 o. 7); T. CHRISTENSEN, Når jorda er i ulag (h. 6).

John S. Hedström

$^{19}/_{11}$ 1876—$^{20}/_{4}$ 1942.

Efter flera års sjukdom avled den 20 april i år f. d. rektorn vid Östermalms läroverk i Stockholm, fil. dr John Hedström. För Tidskrift för elementär matematik, fysik och kemi betyder Hedströms frånfälle förlusten av den man, som tagit initiativet till tidskriftens upprättande, och som under större delen av dess tillvaro eller från 1917 till 1938 varit en intresserad och verksam medlem av

dess redaktion. För tidskriftens start och fortsatta framgång betydde Hedström en stor tillgång inte minst genom sin praktiska läggning och sina goda förbindelser med tidskriftens första förläggare. Under tidskriftens första 15 år bidrog Hedström till dess matematiska innehåll med icke så få uppsatser av metodiskt innehåll; hans växande arbetsbörda som rektor vid ett stort läroverk och hans sociala och kommunala intressen lade väl hinder i vägen för hans direkta deltagande i redaktionsarbetet och för hans författarskap, men hans intresse för tidskriften var alltjämt levande och tog sig bl. a. ett vackert uttryck i ekonomiskt understöd dels till de pristävlingar för skolungdom, som tidskriften anordnat, dels till de premieexemplar av tidskriften som under många år utdelats till elever vid högre skolor i Sverige.

Tidskrift för elementär matematik, fysik och kemi bringar vid John Hedströms bår minnet av sin grundläggare och mångårige redaktionsmedlem ett vördsamt och djupt känt tack.

G. Starck.

Några exempel på adiabatpapperets användning inom väderlekstjänsten.

Av ALF NYBERG.

Meteorologerna ha under de senaste decennierna gjort aktningsvärda försök att införa matematiska metoder i väderlekstjänstens prognosarbete. Man kan dock knappast säga, att försöken lett till fullständig framgång, vilket ej heller är ägnat att förvåna, om man betänker, huru ytterst komplicerade förhållandena i atmosfären i verkligheten äro. I åtminstone ett fall kan man dock inom prognosarbetet med stor praktisk framgång tillämpa exakta beräkningsmetoder. Detta gynnsamma fall inträffar vid analysen av luftmassornas fysikaliska tillstånd i olika nivåer och härledningen av de väderleksförändringar, som måste bli en följd av dessa tillstånd. Vi vilja i det följande uppehålla oss vid detta problem och ställa då först den frågan, vilka förändringar i temperatur- och fuktighetshänseende, som en luftvolym undergår, om den av en eller annan anledning förflyttas i vertikal led.

Luften utövar på en viss nivå ett tryck, som bestämmes av den ovanför liggande luftmängdens massa och tyngdaccelerationen g. Trycket (p) avtar med höjden (z) — om ϱ är tätheten — enligt formeln

$$-dp = g\varrho\, dz. \tag{1}$$

Enligt gasernas allmännna tillståndsekvation gäller, om R är gaskonstanten och T absoluta temperaturen, att

$$\varrho = \frac{p}{RT}. \tag{2}$$

Integreras ekv. (1) under hänsynstagande till ekv. (2) fås, om p_1 och p_2 beteckna trycken på höjderna z_1 och z_2, den s. k. Laplace'ska lagen

$$\ln p_1 - \ln p_2 = \frac{g(z_2 - z_1)}{RT}. \tag{3}$$

En luftvolym som stiger uppåt, utsättes alltså för ett allt mindre tryck från omgivningens sida och utvidgar sig följaktligen. Den avkyles därvid, och om vi bortser från strålningseffekter, vilka i

detta sammanhang kunna anses vara obetydliga, är avkylningen adiabatisk. Vi tillämpa värmeteoriens första huvudsats och använda följande beteckningar: c_v och c_p är specifika värmet vid resp. konstant volym och konstant tryck; $\varkappa = \frac{c_p}{c_v}$; A är värmeekvivalenten, dT och dp ändringar i temperatur och tryck hos luftvolymen. Då den utifrån tillförda värmemängden är lika med noll, fås

$$c_v dT + Apdv = 0 \quad \text{eller} \quad c_p dT - Avdp = 0,$$

varav enligt tillståndslagen $\left(v = \frac{RT}{p}\right)$ följer

$$c_p \cdot \frac{dT}{T} - AR \cdot \frac{dp}{p} = 0.$$

Relationen $c_p = c_v + AR$ ger slutligen

$$\frac{\varkappa dT}{T} - (\varkappa - 1)\frac{dp}{p} = 0 \tag{4a}$$

och

$$\frac{T^{\varkappa}}{p^{(\varkappa-1)}} = \text{konstant}, \tag{4b}$$

vilken ekvation alltså ger sambandet mellan temperatur och tryck i en luftvolym, som undergår adiabatiska förändringar.

Denna ekvation kan tillämpas direkt på atmosfäriska förhållanden. Låt p, ϱ och T vara trycket, tätheten och absoluta temperaturen i en punkt på höjden z i atmosfären och låt p, ϱ' och T' vara motsvarande variabler för en liten luftvolym (som rör sig vertikalt uppåt) i det ögonblick, då den befinner sig på höjden z. Vi anta att, då den rör sig från höjden z till höjden $z + dz$, trycket ändras från p till $p + dp$ och dess temperatur från T' till $T' + dT'$. På höjden $z + dz$ har omgivningen samma tryck $p + dp$, men dess temperatur är $T + dT$. Om värmeutbyte med omgivningen ej äger rum, gäller ekv. (4 a):

$$\frac{dT'}{T'} = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} \cdot \frac{dp}{p}, \quad \text{varav} \quad \frac{\partial T'}{\partial z} = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} \cdot \frac{T'}{p} \cdot \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Tillämpas ekv. (1) och (2), fås

$$\frac{\partial T'}{\partial z} = -\frac{\varkappa - 1}{\varkappa} \cdot \frac{T'}{R \cdot \varrho T} \cdot g \cdot \varrho \quad \text{eller} \quad \frac{\partial T'}{\partial z} = -\frac{g}{R} \cdot \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} \cdot \frac{T'}{T},$$

varav slutligen

$$\frac{\partial T'}{\partial z} = -\frac{g \cdot A}{c_p} \cdot \frac{T'}{T}. \tag{5}$$

För en luftvolym, som rör sig uppåt, är alltså temperaturavtagandet med höjden $\frac{g \cdot A}{c_p} \cdot \frac{T'}{T}$ per höjdenhet. I allmänhet avviker T' föga från T, och man får, om värdena i c. g. s.-enheter på g, A och c_p insättas i ekvation (5), $\frac{\partial T'}{\partial z} = 0{,}0000986$ eller i runt tal 1 grad per 100 m. När temperaturavtagandet med höjden har detta värde, säga vi, att (den vertikala) temperaturgradienten är torradiabatisk. I en torr atmosfär, i vilken temperaturgradienten är torradiabatisk, kommer en liten volym, som förflyttas längs en vertikal linje alltid att ha samma temperatur som omgivningen. I en torr atmosfär, i vilken temperaturen avtar långsammare med höjden än som motsvarar en torradiabatisk gradient, måste en liten luftvolym, som förflyttas uppåt, bli kallare än omgivningen. Den kallare luftvolymen är tyngre än omgivningen och återföres därför till utgångsläget. Vid förflyttning nedåt blir luftvolymen varmare och följaktligen lättare än den omgivande luften och strävar även i detta fall att återgå till utgångsläget. Luftmassan är i detta fall stabilt skiktad.

I en atmosfär återigen där temperaturgradienten $\frac{\partial T}{\partial z}$ är större än den torradiabatiska, blir en stigande luftvolym varmare och därför lättare än omgivningen, varför den fortsätter att stiga, inte blott till dess den når en region, inom vilken temperaturen faller mindre hastigt med höjden, utan till dess den blir kallare än omgivningen. En fallande luftvolym förblir däremot ständigt kallare än omgivningen och fortsätter att falla, till dess att först och främst temperaturgradienten understiger värdet 1° per 100 m och vidare till dess att den blir varmare än omgivningen. En sådan atmosfär befinner sig i ett labilt jämviktsläge.

Då temperaturgradienten är torradiabatisk blir jämviktstillståndet indifferent.

Om luften innehåller vattenånga, bli förhållandena annorlunda. Är luften fuktig men ej mättad då den stiger, avkyles den till en början nästan exakt lika hastigt som luft, vilken ej innehåller vattenånga, men luftens relativa fuktighet stiger. Ångtrycket för mättad luft avtar hastigt med temperaturen och vid en viss temperatur (och höjd), som bestämmes av den uppåtstigande luftens ursprungliga ångtryck, blir denna mättad med ånga. Fortsätter luften att stiga ytterligare och följaktligen att avkylas, måste vattenånga kondenseras eller sublimeras. Det kan anmärkas, att medan i den uppåtstigande luften avkylningen minskar den maximala halten av ånga per volymsenhet (absoluta fuktigheten),

minskas vattenångemängden per massenhet (specifika fuktigheten) ej fullt så mycket, på grund av att luftens volym ökas.

Vid den kondensations- eller sublimationsprocess, som inträffar i uppåtstigande fuktig luft, frigöres ångans (och vattnets) latenta värme, vilket åstadkommer, att temperaturfallet blir mindre än för torr luft vid samma expansion.

Temperaturavtagandet vid en vertikal uppåtgående rörelse av luft, som är mättad med fuktighet, kalla vi fuktadiabatiskt. Exakta formler för beräkningen av fuktadiabaterna kunna härledas ur första huvudsatsen, om hänsyn tages till kondensations- och smältvärmet. Det fuktadiabatiska temperaturavtagandet med höjden är som nämnts mindre än det torradiabatiska. Luftens maximala halt av specifik fuktighet ökas hastigt med temperaturen. 1 kg luft kan vid 0° innehålla 3,8 g vattenånga, vid 20° 14,6 g och vid 30° 23,4 g. Ju högre temperaturen är, desto mera vatten kondenseras således vid avkylningen och desto långsammare sker denna. En luftvolym, som är mättad med fuktighet och rör sig adiabatiskt uppåt, avkyles 0°,5 per 100 m, om dess temperatur är 20° men 0°,7 per 100 m, om dess temperatur är 0°. Om temperaturen är mycket låg −30° à −50°, vilket alltid är fallet på stor höjd, 7 à 10 km, så närmar sig avkylningen även i fuktig luft värdet 1° per 100 m och fuktadiabaterna sammanfalla då praktiskt taget med torradiabaterna.

De först av Hertz år 1884 uppställda och senare av Neuhoff, von Bezold och Fjeldstad modifierade formlerna för beräkning av temperaturändringarna i luft, som rör sig i vertikal led, kunna icke utan vidare användas i praktisk väderlekstjänst, härtill äro de för komplicerade. Man har emellertid konstruerat en mängd olika s. k. adıabatpapper, som visat sig mycket användbara. Ett adiabatpapper utgöres av ett diagram, vars koordinataxlar äro funktioner av T och p och i vilket kurvor äro inlagda som ge tryck och temperatur, torradiabaternas och fuktadiabaternas förlopp samt i allmänhet även fuktighetshalten i mättad luft.

I fig. 1 visas ett avsnitt av ett adiabatpapper konstruerat av norrmannen A. Refsdal. Ordinatan är $T \cdot \log p$ och abscissan $\log T$. Streck-punkterade något krökta linjer, som gå nedifrån uppåt och åt vänster äro torradiabater beräknade ur ekvation (4). Heldragna linjer, som också gå nedifrån uppåt åt vänster men luta kraftigare äro fuktadiabater, och de punkterade linjerna ge specifika fuktighetsvärdet i gram per kg luft. Då som ordinata valts $T \cdot \log p$, kan höjden av en punkt A vilken som helst lätt beräknas, (se ekvation 3). Vi anta att atmosfärens temperaturtillstånd anges av kurvan DA. Punkten A:s höjd är då avståndet från en punkt E,

vars tryck är lika med D:s, till en punkt B, vars tryck är lika med punkten A:s, och vars temperatur liksom punkten E:s är lika med medeltemperaturen i skiktet mellan startpunkten och punkten A. Höjden uttages med passare och avläses på en skala vid sidan av kurvorna (skalan insatt på figuren). Med hjälp av adiabatpapperet kan man även lätt beräkna, på vilken höjd molnens undersida skola befinna sig, vilket t. ex. är av största intresse för flygare. Vi anta, att man en klar morgon har bestämt temperatur och fuktighet vid marken. Vid punkten C är temperaturen = = 17°,4 grader och lufttrycket 1 016 millibar. Relativa fuktigheten är 82 % och den maximala fuktigheten enligt papperet 12,2 g/kg luft. Om denna luft under inverkan av solstrålningen uppvärmes till t. ex. 26°,0 vid punkt D, ändras därav väl den relativa, men ej den specifika fuktigheten. Luften antas stiga och avkyles därvid, så att tillståndsförändringarna anges av en torradiabat D—A. Vid punkten A, där torradiabaten skär den linje, som anger den specifika fuktighet, som uppmätts i markluften vid punkt C och som uppgår till $0{,}82 \cdot 12{,}2$ d. v. s. 10,0 g/kg, inträffar kondensation, och punkten A anger således direkt trycket på den nivå, på vilken molnets undersida är att vänta. Punkten A:s höjd är enligt ovanstående lika med avståndet EB, uppmätt på skalan till höger på papperet.

Om man med ett flygplan eller en ballongmeteorograf sonderat atmosfärens temperatur och fuktighet i vertikal led, kan man med hjälp av ett adiabatpapper göra tämligen noggranna beräkningar över luftens stabilitetsförhållanden. Är luften stabilt skiktad, kan lokala vertikala strömningar endast med svårighet bildas och molnbildningen motverkas. Är luften labilt skiktad, kan en utlösning av den labila energien lätt komma till stånd; därvid bildas upptornade bymoln, regnskurar och, då labiliteten är stor, hagelbyar eller åska. Den labila skiktningen i atmosfären uppkommer vanligen därigenom att luften vid marken uppvärmes hastigare än luften i höjden. Uppvärmningen kan ske när kall luft strömmar över ett relativt varmt område — oftast ett varmare hav, såsom då en kall nordvästvind råder över Nordsjön och ger ihållande byar, emedan luften efterhand passerar över allt varmare vatten, så att labiliteten vidmakthålles. Uppvärmningen av den lägre liggande luften kan också ske genom instrålning av solenergi; denna uppvärmning inträffar mest över land. Detta senare fall skall belysas med ett exempel. I Göteborg utfördes en radiosondering den 29. VII 1941 kl 06. Resultatet av denna sondering framgår av kurvan I i fig. 1. Temperaturen vid marken var 17°,4, trycket 1 016 mb, relativa fuktigheten 82 % och specifika fuktig-

heten 10,0 g per kg luft. Vädret var nästan klart. Endast några tiondelar av himlen var täckt med medelhöga moln. Luften var

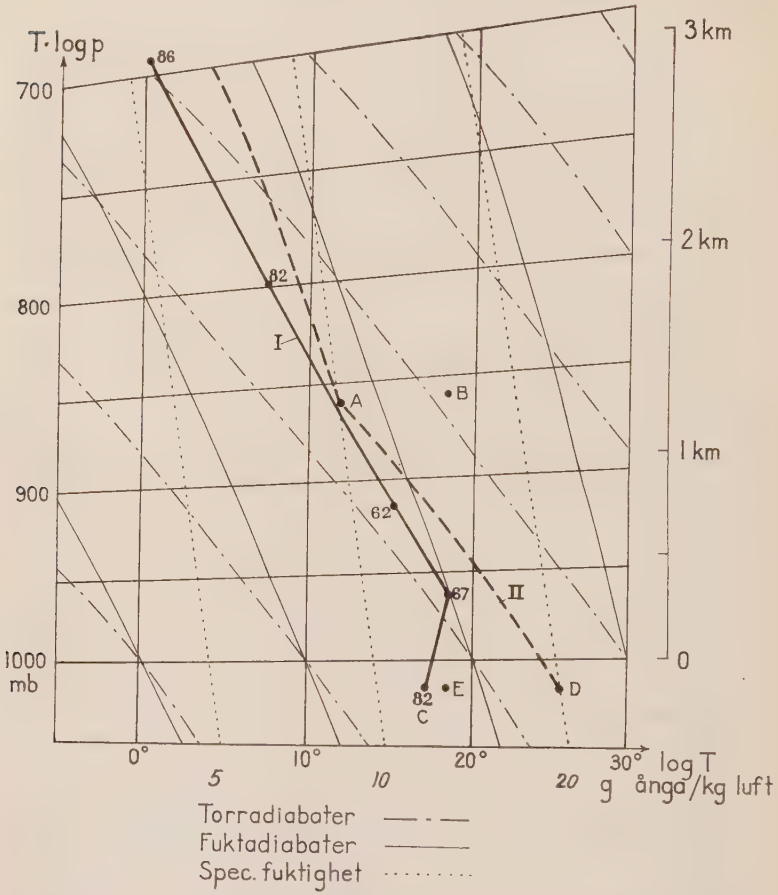


Fig. 1. Avsnitt av adiabatpapper typ Refsdal. Kurva I visar resultaten av en radiosondering vid Torslanda flygplats, Göteborg den 29 juli 1941 kl. 06. Vid de s. k. markanta punkterna ha relativa fuktighetsvärdena i procent utsatts. Kurva II visar temperaturändringen i en uppåtstigande luftvolym, vars specifika fuktighet är lika stor som markluftens, men vars temperatur är 10° högre.

stabilt skiktad, ty tryck-temperatur-kurvans lutning är genomgående större än torradiabaternas. Inom området mellan 960 mb och 700 mb är kurvans lutning visserligen mindre än fuktadiabater-

nas, men luftens fuktighet är avsevärt mindre än som motsvarar mättnad. Man kunde emellertid räkna med att solstrålningen under dagen skulle höja temperaturen vid marken med åtminstone

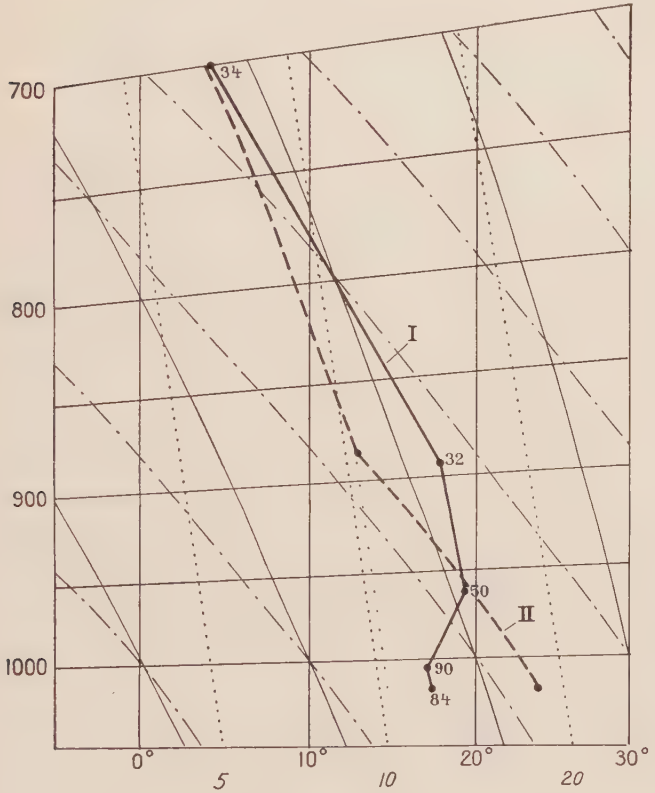


Fig. 2. Kurva I visar resultaten av en radiosondering i Torslanda den 8 juli 1941 kl. 06. Kurva II visar temperaturändringen i en uppåtstigande luftvolym, vars spec. fuktighet är lika stor som markluftens, men vars temperatur är 8° högre än denna.

10°. Vi räkna med 10° och finna då enligt ovan angivna metod en molnhöjd av 1 400 m (kondensation vid punkt A).

Vidare finner man, att luftens tillstånd efter en sådan uppvärmning ej längre kan vara stabilt. Luften som från marken vid temperaturen 27°,4 grader stigit upp till kondensationsnivån är varmare än tillståndskurvan anger för luften vid denna nivå.

Markluften fortsätter därför att stiga och avkyles längs en fuktadiabat. Denna ligger ständigt till höger om tillståndskurvan, och den uppåtstigande luften är följaktligen varmare än den omgivande luften upp till trycknivån 700 mb. Man kunde därför på grundval av radiosonderingen förutsäga, att moln skulle bildas på c:a 1 400 m och att åska skulle bildas under dagen, fastän himlen på morgonen var nästan molnfri. Kl 11 rapporterades också moln på en höjd mellan 1 000 och 1 500 m och kl 14 iakttogs åska.

Vid ett tidigare tillfälle, den 8 juli 1941, hade en sondering utförts under liknande väderleksförhållanden vid marken som den 29 juli. Marktemperaturen var 17°,6. Relativa fuktigheten 84 % och specifika fuktigheten 10,3 g per kg luft. Himlen var molnfri. De högre luftlagren voro emellertid den 8 juli betydligt varmare och atmosfären betydligt stabilare än den 29 juli, varför risken för åska eller ens regnskurar var obetydlig. Detta framgår av fig. 2. Om vi denna dag räkna med en temperaturstegring av blott 7°,5, med hänsyn till att havsvattnets temperatur är något lägre än den 29 juli, finna vi, att en luftvolym, som från marken skulle följa en torradiabat uppåt, vid trycket 870 mb skulle nå mättnad, och vid denna punkt skulle alltså kondensation inträda. Som vi emellertid finna, skulle den uppåtstigande luftens temperatur på denna nivå vara 6 à 7° lägre än omgivningens och följaktligen betydligt tyngre än denna. Man kunde alltså räkna med, att en uppstigning av markluften till denna nivå icke skulle komma till stånd och att på grund härav molnbildning till följd av instrålningen överhuvud taget icke skulle uppstå och därmed givetvis icke heller skurar av något slag. Dessa beräkningar stämde också fullständigt; inte ett enda moln visade sig under hela dagen, trots att temperaturstegringen blev den väntade.

Med de här lämnade exemplen på användbarheten av adiabatpapperet inom den praktiska väderlekstjänsten har vi endast kunnat ge några exempel. I själva verket kan adiabatpapperet utnyttjas för en mängd olika prognostiska ändamål såsom vid bestämning av vindens riktning och styrka i högre luftlager och i samband därmed bestämning av cyklonernas rörelsehastighet och förflyttning, vidare vid bedömningen av cyklonernas natur och utveckling samt vid undersökning av riskerna för isbildning på flygplan för att nämna några andra påtagliga exempel. En förutsättning härför är dock, att undersökningar av temperatur och fuktighet i de högre luftlagren medelst radiosonderingar eller flygplanssonderingar verkligen föreligga, ett förhållande som tillsvidare långt ifrån alltid är fallet och under inga förhållanden i önskvärd omfattning, åtminstone i vårt land.

Magnetismen från elektroteknikens synpunkt.

Av GÖSTA FUNKE och ROGER AGRELIUS.

Den kurs i elteknik för läroverkslärare, som anordnas av Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning och Folkuniversitetsföreningen instundande sommar, är ett glädjande tecken på det stigande intresset för den sida av elektricitetslärans och magnetismens studium vid de allmänna läroverken, som har mera direkt anknytning till det praktiska livet och speciellt till tekniken. Detta problem har redan tidigare diskuterats i denna tidskrift. Redan i första årgången drog en av tidskriftens grundare, den framstående pedagogen lektor Otto Gallander en lans för en mera tekniskt betonad undervisning i elektricitetslära och magnetism. Senare har C. E. Blom ävenledes i denna tidskrift (årg. 3, sid. 19) framlagt en elementär lärogång i magnetism, som kan läggas till grund för en rationell behandling av det magnetiska flödet. Avsikten med denna artikel är nu att ge en kort framställning av magnetismen från elektroteknikens synpunkt, d. v. s. byggande på Ohms lag för magnetism, samt att diskutera möjligheterna till någon laboration eller demonstration på detta område med användande av en något annorlunda beskaffad apparatur än den av Blom använda.

Teori.

Ifråga om enheter och benämningar följes Giorgisystemet. Detta måttsystem baseras på den internationella meterprototypen som enhet för längd, kilogramprototypen som enhet för massa och sekunden som enhet för tid. Som fjärde grundsten i systemet gäller, att permeabiliteten i vakuum givits värdet $4\pi \cdot 10^{-7}$. Den ur dessa grundenheter härledda kraftenheten kallas en *newton* (n) och utgör den kraft, som ger massenheten 1 kg en acceleration av 1 m/s^2. Beträffande systemet i övrigt hänvisas till broschyren *Giorgimåttsystemet i princip och tillämpning* av J. Wennerberg, som erhålles gratis från Elektriska klubben i Västerås.[1]

[1] Se även E. Ingelstam, Elementa *22*, 217, 1939 och *23*, 81, 1940.

I elektroteknikens behandling av de magnetiska fenomenen har begreppet magnetpol förlorat sin centrala betydelse, vilket med hänsyn till detta begrepps fiktiva karaktär icke är enbart att beklaga. I stället är det fältet, det från punkt till punkt till riktning och storlek varierande tillståndet av magnetisk kraftverkan, som spelar huvudrollen. Därmed följer också, att Coulombs lag skjuts i bakgrunden till förmån för Ohms lag för magnetism. Med hänsyn till den formella likhet med de elektriska fenomenen, som tar sig uttryck i denna lag, talar man om området för magnetisk kraftverkan som säte för *ett magnetiskt flöde* eller *flux* (betecknat Φ), fastän det icke finns någon materia i rörelse. Flödet åskådliggöres med induktionslinjer (kraftlinjer). Om en ledare med längden l och genomfluten av strömstyrkan I är placerad vinkelrätt mot kraftlinjerna i ett homogent magnetiskt flöde, påverkas den av en kraft F, som vid experimentell undersökning visar sig vara proportionell mot l och I. Storleken av denna kraft kan definitionsmässigt tas som mått på tätheten av det magnetiska flödet (B). Det gäller $\therefore F = k \cdot B \cdot I \cdot l$. Om sorterna för F, I och l samt storleken av konstanten k fastläggas, blir även enheten för B fastlagd. Då F mätes i newton, I i ampere, l i meter och åt k ges värdet 1, erhålles för B sorten weber/m². Mellan flödet (Φ) genom en viss yta (a m²) och flödestätheten existerar sambandet $B = \frac{\Phi}{a}$. Flödet (Φ) mätes alltså i *weber* (Wb). Följande samband mellan de här använda och cgs-systemets sorter gälla: 1 Wb/m² = $= 10^4$ gauss (linjer/cm²); 1 Wb = 10^8 cgsenheter (linjer). Om man skall mäta det magnetiska flödets styrka inne i en fast kropp, t. ex. i en järnstav, kan detta icke åtkommas genom direkt mätning av kraftverkan på en strömgenomfluten ledare. Man får då använda någon indirekt metod, vanligen baserad på mätning av vid flödets ändring uppkommande induktionsströmmar. Om en spole med N varv genomsättes av ett magnetiskt flöde, och dettas styrka ändras, uppkommer i spolen en emk (E), som lyder induktionslagen

$$E = -N \cdot \frac{d\Phi}{dt}. \qquad (1)$$

Vi antaga, att spolen kopplats till en ballistisk galvanometer, så att en sluten krets med motståndet R uppkommit. Vid en snabb förändring av ett flöde från Φ_1 till Φ_2 uppkommer en strömstöt genom galvanometern, som kan antas följa förloppet i fig 1. I ett visst ögonblick gäller då $I = \frac{E}{R} = -\frac{N}{R} \cdot \frac{d\Phi}{dt}$; $Idt = -\frac{N}{R} \cdot d\Phi$ är den elektricitetsmängd, som på tiden dt flutit genom galvanometern

och $\int_{t_1}^{t_2} Idt$ är hela den elektricitetsmängd som under flödesändringen pressats genom galvanometern.

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} Idt = -\frac{N}{R} \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi = \frac{N}{R} \cdot (\Phi_1 - \Phi_2). \tag{2}$$

Totala elektricitetsmängden genom galvanometern är alltså proportionell mot flödesändringen. Eftersom ballistiska galvanometerns maximalutslag är proportionellt mot elektricitetsmängden, så är *maximalutslaget ett mått på flödesändringen.*

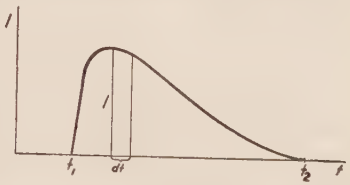


Fig. 1. Integration av elektricitetsmängden genom ballistisk galvanometer vid en strömstöt. (Kurvan endast kvalitativ.)

Då det på detta sätt blivit möjligt att mäta ett flöde, kan man närmare studera, på vad sätt flödet i en strömgenomfluten spole beror av den magnetiserande strömstyrkan och andra faktorer. Vi betrakta här först en sluten magnetisk krets med överallt samma material och samma genomskärningsyta, d. v. s. en ring med en likformigt fördelad lindning. Det visar sig då, att Φ i en krets, som icke innehåller järn, är direkt proportionellt mot strömstyrka (I) och antal lindningsvarv (N). Proportionalitetsfaktorn brukar skrivas $\frac{1}{S}$, d. v. s.

$$\Phi = \frac{IN}{S}. \tag{3}$$

Här framträder nu den redan tidigare omnämnda likheten med Ohms lag, som åt denna relation givit namnet *Ohms lag för magnetism.* Φ benämnes i analogi med elektriska strömmen *flödet,* IN i analogi med elektromotoriska kraften *magnetomotorisk kraft* och S i analogi med elektriskt motstånd *det magnetiska motståndet.* Analogin sträcker sig i själva verket än längre, ty en experimentell undersökning visar, att S är proportionellt mot den magnetiska ledarens längd (l) och omvänt proportionellt mot genomskärningsytan (a). Proportionalitetskonstanten sättes vanligen $= \frac{1}{\mu}$, d. v. s.

$$S = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{l}{a}, \tag{4}$$

där l och a mätas i m resp. m². Konstanten μ, som närmast är

att jämföra med specifik ledningsförmåga, kallas *permeabiliteten* och har för vakuum (och luft) såsom tidigare nämnts värdet $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ (vanligen använt närmevärde $1{,}257 \cdot 10^{-6}$). Om värdet på S insättes i Ohms lag, fås $\Phi = \frac{\mu \cdot I \cdot N \cdot a}{l}$ eller

$$\frac{\Phi}{a} = B = \mu \frac{IN}{l}. \tag{5}$$

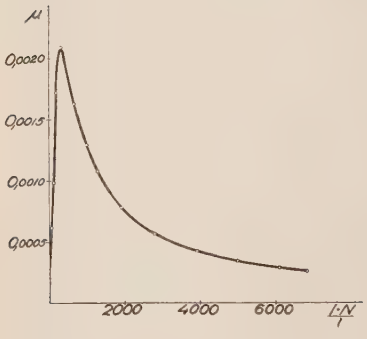


Fig. 2. μ som funktion av $\frac{IN}{l}$.

Om μ är konstant, är alltså flödestätheten direkt proportionell mot amperevarvtalet per m av den magnetiska ledarens längd. Ritar man emellertid upp B som funktion av $\frac{IN}{l}$ för en ring av järn, får man ingalunda en rät linje, utan en krökt kurva, en s. k. magnetiseringskurva, olika för olika järnsorter. Detta betyder, att μ icke är konstant utan beroende av $\frac{IN}{l}$. För $\frac{IN}{l} = 0$ (el. oändligt litet) finner man en viss s. k. begynnelsepermeabilitet. Med stigande $\frac{IN}{l}$ ökar μ snabbt till ett maximivärde för att sedan åter sjunka (se fig. 2).

Om en magnetisk krets består av delar med olika area eller av olika material, t. ex. en järnring med luftgap, så blir det totala magnetiska motståndet lika med summan av delarnas magnetiska motstånd.

$$S = S_1 + S_2 + \ldots = \frac{1}{\mu_1} \cdot \frac{l_1}{a_1} + \frac{1}{\mu_2} \cdot \frac{l_2}{a_2} + \ldots \tag{6}$$

Formel (3) ger

$$IN = \frac{l_1}{\mu_1} \cdot \frac{\Phi}{a_1} + \frac{l_2}{\mu_2} \cdot \frac{\Phi}{a_2} + \ldots \tag{7}$$

eller

$$IN = \frac{B_1}{\mu_1} \cdot l_1 + \frac{B_2}{\mu_2} \cdot l_2 + \ldots \tag{8}$$

Beräkningarna kunna alltså göras, som om varje del av den magnetiska kretsen krävde sitt amperevarvtal, för att ett visst flöde skall pressas fram genom kretsen.

Experiment.

Vid de försök, för vilka här redogöras, har använts en ring av mjukt järn, primärt lindad med 472 varv (N_1) bomullsomspunnen koppartråd av 1 mm diameter och försedd med en sekundärlindning med uttag för 5, 10, 20 och 40 varv (N_2), så att sekundärt olika möjligheter 5, 15 ... upp till 75 varv äro möjliga. Ringens medelomkrets (l) är 0,78 m, d. v. s. $\frac{N_1}{l} = 605$ varv/m, dess genomskärningsyta (a) är $4{,}9 \cdot 10^{-4}$ m². Den är försedd med en spalt ($5{,}1 \cdot 10^{-3}$ m), som kan fyllas ut av en till spalten noggrant passande järnplatta. Man bör vidare ha en stålring och en träring av samma dimensioner, men utan spalt. Träringen bör vara försedd med åtminstone 200 varv sekundärt. Primärströmstyrkan bör kunna inkopplas ryckvis med värden på c:a 0,2; 0,3; 0,5; 1; 2; 3; 4; 6; 8; 10 A. Ett härför lämpligt motstånd åstadkommes enklast genom att i en skrotaffär inköpa en begagnad frontplatta till ett pådragsmotstånd, mellan vars knappar lämpliga motstånd ur skolans förråd inkopplas. Som stoppsko användes en liten träkil, som inskjutes mellan knapparna. För verkligt kvantitativa försök, från vilka av skäl, som nedan framkomma, avrådes vid läroverkens laborationer, måste en god ballistisk galvanometer användas. För kvalitativa försök behöver man endast en millivoltmeter e. d. med någorlunda tung spole. En demonstrationsgalvanometer av den typ, som är vanlig vid läroverken (»glaslådsgalvanometern») duger bra. Varje försök (utom för träringen) måste föregås av noggrann avmagnetisering, och för att järnringarna icke efter avmagnetiseringen åter skola magnetiseras, böra de uppsättas på sneda plattor, med vinkeln vald så, att de kunna placeras vinkelrätt mot jordmagnetiska fältets totalintensitet. (Tag ut kompassriktningen.) Av samma skäl få ringarna icke heller efter avmagnetiseringen rubbas ur sitt läge. Svårast att bibehålla avmagnetiserad är mjukjärnsringen. Avmagnetiseringen utföres med växelström. Genom ringen sändes en växelström, vars styrka är större än den största strömstyrka, med vilken ringen magnetiserats. Växelströmmens styrka minskas (ej alltför snabbt) ned mot noll.

De kurvor, som bruka komma i fråga vid undersökning av magnetiska material, äro *kommuteringskurva, nollkurva* (*jungfrukurva*) samt *hysteresiskurva*. I dessa kurvor avsättes B som funktion av $\frac{IN}{l}$ (jfr formel 5). En kommuteringskurva upptages på så sätt, att en viss strömstyrka sändes genom ringens primärlindning, strömmens riktning kastas om ett tiotal ganger med om-

kastare (utan att någon mätning göres), den ballistiska galvanometern inkopplas och utslagen på denna iakttagas vid två omkastningar av strömmen. Medelvärde tages. Strömstyrkan ökas till ett högre värde, och samma operation utföres igen. Mätning av galvanometerutslaget vid kommutering utföres för ett tiotal olika strömstyrkor upp till 10 A. Varje galvanometerutslag vid kommutering är ett mått på (dubbla) flödet vid ifrågavarande strömstyrka. Vid upptagande av nollkurvan utgår man från avmagnetiserat material och ökar strömstyrkan ryckvis från noll till 10 A i ett tiotal steg. Varje utslag på galvanometern är ett mått på *ökningen* av flödet. Punkterna på kurvan uppbyggas alltså genom successiv summation av avlästa utslag. Hysteresiskurvan göres som en fortsättning på nollkurvan. När man kommit upp till högsta strömstyrkevärde, sänker man strömstyrkan i ett tiotal steg till noll, kastar om riktning, ökar stegvis till 10 A, sänker till noll, kastar om riktning, och ökar ånyo till 10 A. Strömstyrkorna räknas positiva i första riktningen, negativa i andra. Galvanometerutslagen räknas positiva i det först erhållna utslagets riktning, negativa i motsatt riktning.

Försök 1. Kommuteringskurva för träring.

Enligt formel (2) är $Q = \frac{N}{R} \cdot (\Phi_1 - \Phi_2)$. Tillämpas denna formel på kommutering, är $\Phi_1 - \Phi_2 = 2\Phi$, om Φ är storleken av det flöde, som omkastas. Om vidare båda leden divideras med genomskärningsytan a, och Q sättes $= k_1 \cdot g$, där g är galvanometerns utslag, erhålles

$$\frac{2\Phi}{a} = k_1 \cdot \frac{g}{N_2 \cdot a} \cdot R;$$

eller

$$B = \frac{k_1 \cdot g \cdot R}{2 \cdot a \cdot N_2} = k \cdot \frac{g}{N_2}.$$

R är här motståndet i galvanometerkretsen och N_2 antalet sekundärvarv. För att detta motstånd skall bli lika stort, då träringen användes, som då järnringen användes, kopplas såväl vid detta försök som vid försöken med järnringen sekundärlindningen på träringen i serie med sekundärlindningen på järnringen. Konstanten k betyder då det tal, varmed galvanometerutslaget per sekundärvarv $\left(\frac{g}{N_2}\right)$ skall multipliceras för att ge förändringen i flödestäthet i enheten Wb/m²; k kan bestämmas på följande sätt. För omagnetiska material (alltså för träringen) gällde

$$1{,}257 \cdot 10^{-6} = \frac{B}{\frac{I \cdot N_1}{l}} = \frac{k \cdot \frac{g}{N_2}}{\frac{I \cdot N_1}{l}}.$$

Kvoten $\frac{g \cdot l}{N_2 \cdot IN_1}$ och därmed k kan bestämmas genom att man för ett visst värde på $\frac{IN_1}{l}$ kastar om strömmens riktning i träringens primärlindning (N_1 varv) och iakttager galvanometerutslaget. Noggrannare värde på k erhålles, om utslagen $\frac{g}{N_2}$ för olika $\frac{IN_1}{l}$ inprickas i en kommuteringskurva. Denna kurva är ju i detta fall en rät linje och dess vinkelkoefficient är $\frac{1{,}257 \cdot 10^{-6}}{k}$.

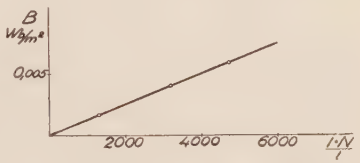


Fig. 3. B som funktion av $\frac{IN}{l}$ för träring.

Fig. 3 visar kommuteringskurva för träring.

Försök 2. Kommuteringskurva för järnring utan och med spalt.

Den ovan bestämda konstanten k kan användas även för järnringen under förutsättning, att genomskärningsytan och galvanometerkretsens motstånd i båda fallen äro lika.

Tre olika spalter ha använts: 5,1 mm, 1,1 mm och 0,23 mm. För att spaltens vidd icke skall förändras under försöket, har spalten utfyllts med resp. en 5,1 mm ebonitplatta, 4,0 mm järnplatta + 1,1 mm ebonit samt 5,1 mm järnplatta + 0,23 mm glimmerblad. Alla fyra kurvorna ha uppritats i samma koordinatsystem (fig. 4). Kurvan för hela järnringen stiger först långsamt (den låga begynnelsepermeabiliteten), sedan snabbt (μ går mot sitt maximum se fig. 2) och stiger sedan ytterst långsamt och relativt rätlinjigt (järnet mättat, μ har uppnått ett lågt men nästan konstant värde). Kurvorna för järnring med spalt betingas av att dess magnetiska motstånd är sammansatt av två termer (formel 6). För medelstora värden på $\frac{IN}{l}$ är det magnetiska motståndet hos den lilla luftspalten av samma storleksordning som hela järnets. B för järnring med spalt är därför betydligt mindre än B för hela järnringen vid samma $\frac{IN}{l}$ och ju större spalten är, desto mera närmar sig

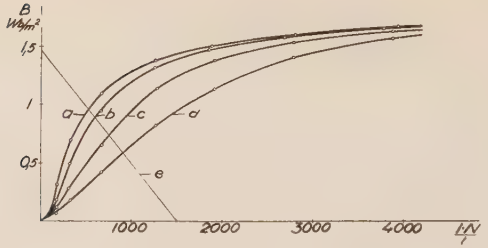


Fig. 4. Kommuteringskurvor. B som funktion av $\frac{IN}{l}$ för a) hel järnring, b) järnring med 0,23 mm spalt, c) järnring med 1,1 mm spalt, d) järnring med 5,1 mm spalt.

kurvan en rät linje. För mycket små $\frac{IN}{l}$ ligga kurvorna för järnring med spalt relativt närmare kurvan för hela järnringen, och för stora $\frac{IN}{l}$ närma sig alla kurvorna asymptotiskt varandra, i båda fallen beroende på att järnets magnetiska ledningsförmåga har ett relativt lågt värde (μ lågt), så att järndelen av den magnetiska kretsen dominerar i formel 6. I fig. 5 finner man hysteresiskurvor för hel järnring och för järnring med 5,1 mm spalt. Spaltens inverkan framträder huvudsakligen i att den senare blir betydligt mindre brant än den förra.

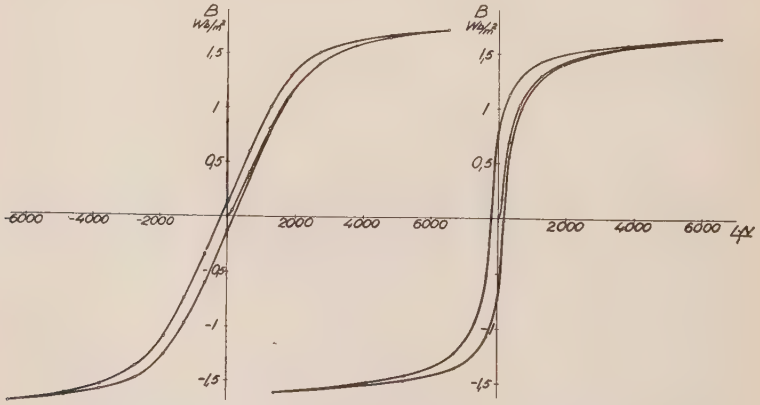


Fig. 5. Hysteresiskurvor för järnring med 5,1 mm spalt (till vänster) och hel järnring (till höger).

Vid en mera kvantitativ behandling av problemet kan man med hjälp av kommuteringskurvan för hela järnringen beräkna värden för det amperevarvtal, som behövs för att åstadkomma samma flödestäthet i järnringen med spalt. Vi välja som exempel att beräkna det amperevarvtal, som behövs för att pressa flödet 1 Wb/m² genom järnringen, då spalten är 5,1 mm. Ur kurvan för hela järnringen finna vi $\frac{IN}{l} = 570$. Flödeslängden i järn i ringen med spalt är 0,775 m. $\therefore IN = 570 \cdot 0{,}775 = 440$ amperevarv. För luftgapet erforderligt amperevarvtal är $\frac{B \cdot l}{\mu} = \frac{1 \cdot 0{,}0051}{1{,}257 \cdot 10^{-6}} = 4060$. Vi se, att de mesta amperevarven åtgå för att pressa flödet genom luftgapet. Tillsammans åtgå alltså 4500 Av. I vår kurva fig. 4 ha vi emellertid icke *IN* utan *IN* dividerat med totala flödeslängden 0,78. Vi erhålla $\frac{IN}{l} = 5770$. Ur kurvan finna vi emellertid 1640. Förklaringen till denna diskrepans finner man genom följande experiment.

Försök 3. Läckningen vid luftspalten.

En sekundärlindning placeras dels vid luftspalten och dels på ringen diametralt mot spalten. Det visar sig, att ballistiska galvanometerns utslag i förra fallet blir mindre än i senare fallet. Detta

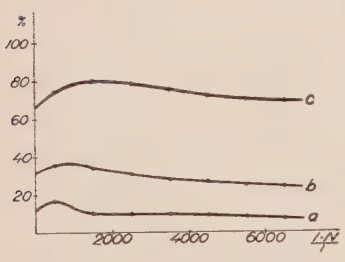


Fig. 6. Läckningen vid luftspalten i % av totala flödet som funktion av $\frac{IN}{l}$.

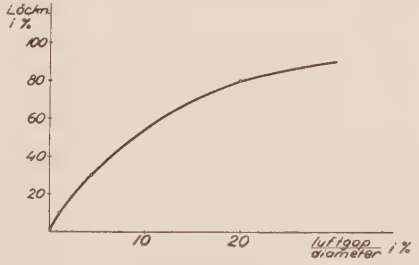


Fig. 7. Läckningen vid luftspalten i % av totala flödet som funktion av luftgapets storlek i % av dess diameter.

beror på att kraftlinjerna icke gå enbart rätlinjigt genom luftspalten utan böja av utåt vid dess kanter. Detta betyder, att luftspalten icke får anses ha samma genomskärningsyta som järnet utan en större. I våra räkningar visar sig detta däri, att *B* icke har samma värde i första och andra termen i högra ledet av

formel 7. Läckningen i % av totala flödet som funktion av $\frac{IN}{l}$ för de olika spalterna åskådliggöres av fig. 6. Man ser, att redan vid den smalaste spalten läckningen är betydlig. Vid den största spalten går 80 % av flödet utanför spalten, d. v. s. om $B = 1$ Wb/m² i järnet, som ovan antagits, så är $B = 0{,}20 \cdot 1$ Wb/m² i luftgapet. Läckningen vid luftspalten i % av totala flödet som funktion av luftgapets storlek i % av dess diameter framgår av fig. 7. Räkningarna för det ovan citerade fallet ($B = 1$ Wb/m²; 5,1 mm spalt) bli, om hänsyn tas till läckningen (formel 8)

$$I \cdot N = \frac{1 \cdot 0{,}20 \cdot 0{,}0051}{1{,}257 \cdot 10^{-6}} + 440.$$

$$I \cdot N = 1260.$$

$$\frac{I \cdot N}{l} = 1620.$$

Överensstämmelsen mellan iakttaget och beräknat värde blir alltså, om hänsyn tas till läckningen, mycket god. Räkning utan hänsynstagande till läckningen ger däremot vid så stor spalt som denna fullständigt felaktiga värden.

I tabell 1 ges en sammanställning av på detta sätt beräknade och iakttagna $\frac{I \cdot N}{l}$-värden.

Tabell 1.

B	Spalt 0,23 mm		Spalt 1,1 mm		Spalt 5,1 mm	
Wb/m²	$\frac{I \cdot N}{l}$ iaktt.	$\frac{I \cdot N}{l}$ ber.	$\frac{I \cdot N}{l}$ iaktt.	$\frac{I \cdot N}{l}$ ber.	$\frac{I \cdot N}{l}$ iaktt.	$\frac{I \cdot N}{l}$ ber.
0,3	230	240	360	400	520	590
0,6	400	410	640	720	930	950
0,9	630	660	950	1120	1430	1420
1,2	1030	1090	1440	1720	2150	2090
1,5	2180	2320	2700	3190	3460	3950

Vi ha ovan beräknat det amperevarvtal, som behövs i en magnetisk krets för att uppnå ett visst värde på flödestätheten. Vill man i stället beräkna det B-värde, som erhålles för ett visst $\frac{IN}{l}$, får man gå fram på ett något annorlunda sätt. Antag, att vi vilja

beräkna B för $\frac{IN}{l} = 1500$ vid järnringen med 5,1 mm spalt. Vi ersätta då $\frac{B_2}{\mu_2}$ i formel 8 med $\frac{IN}{l}$ (formel 5) och få ekvationen

$$1500 \cdot 0{,}78 = \frac{0{,}20 \cdot B \cdot 0{,}0051}{1{,}257 \cdot 10^{-6}} + \frac{IN}{l} \cdot 0{,}775.$$

Detta ger en ekvation av första graden i variablerna B och $\frac{IN}{l}$, d. v. s. ekvationen representeras i samma koordinatsystem, som tidigare använts (fig. 4), av en rät linje (e i fig. 4). Denna linjes skärningspunkt med kurvan för hel järnring ger det sökta B-värdet. För vårt ex. avläses $B = 0{,}94$. Ur kurva d avläses $B = 0{,}94$ för $\frac{IN}{l} = 1500$. Vi se alltså att överensstämmelse råder mellan beräknat och experimentellt bestämt värde, då hänsyn tages till läckningen. Denna beräkningsmetod kan dock endast användas, då järnkärnans area är konstant. Är så ej fallet får uppgiften lösas genom successiv approximation.

För att nå goda resultat böra följande försiktighetsmått iakttagas: Järnringen isoleras först väl med isoleringsband. Med koppartråden lindas sedan så tätt och så jämnt som möjligt så långt fram till luftgapet som möjligt. Linda endast ett lager. Använd för kvantitativa försök en god ballistisk galvanometer. Var noga med avmagnetiseringen. För den hela järnringen är det nästan omöjligt att uppnå full avmagnetisering. Detta visar sig i att hysteresiskurvan blir osymmetrisk. Rita först upp kurvan och förskjut sedan $\frac{IN}{l}$-axeln uppåt eller nedåt, tills kurvan blir symmetrisk. Den punkt på B-axeln, som jungfrukurvan då utgår från, är ett mått på hur mycket magnetiserat järnet var vid försökets början.

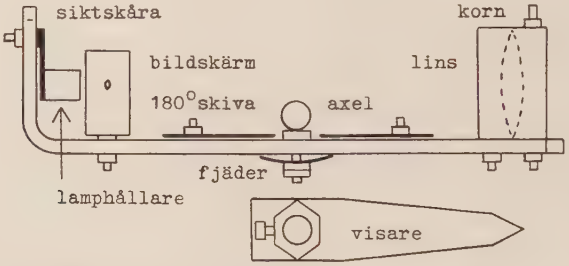
Den stora inverkan, som läckningen enligt vad ovan visats har på resultaten, gör, att räkningar med Ohms lag för magnetism icke kunna rekommenderas för läroverkens del. En laboration eller demonstration, innefattande upptagande av kommuteringskurva för en järnring eller solenoid, en hysteresiskurva för en järn- och en stålring samt om möjligt kommuteringskurvor för järnring med och utan spalt för att visa luftgapets stora magnetiska motstånd, skulle dock, om experimentens resultat kvalitativt förklarades i enlighet med Ohms lag för magnetism, ge åtskilligt av värde för förståelsen av såväl magnetismen som induktionsfenomenen.

Parallaktisk förevisnings- och mätapparat för astronomiundervisningen.

Av **ALFRED NILSSON.**

Vid undervisningen i astronomi kan det ur många synpunkter vara lämpligt att använda ett enkelt mätinstrument med parallaktisk uppställning och två cirkelskalor. Ett lämpligt sådant visas i fig.

Den vid axeln fästade riktstaven är som synes försedd med en lins och en liten bildskärm, som består av en snett ställd mässingsplåt med ett litet hål. När staven pekar mot solen eller månen, sammanfalla kanterna hos den av linsen alstrade bilden och hålet.



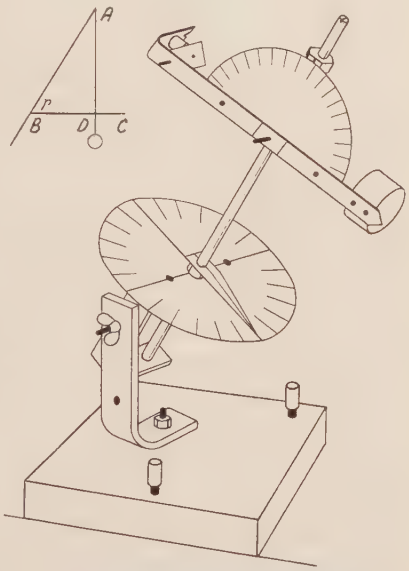
Skärmen betraktas från sådant håll, att bilden synes lagom ljus. Härigenom blir inställningen både noggrann och bekväm. Staven är även försedd med korn och sikte, vilka användas vid inriktning mot stjärnor, samt en glödlamphållare, vars användning beskrives senare.

Apparaten uppställes i ett fönster, som vetter mot den himlakropp, som skall observeras. Träskivan placeras intill en i fönsterkarmen fäst list, varigenom apparaten genast blir rätt orienterad. — Axeln har en skåra A utefter den övre ändans diameter och en B på sidan 30 cm därifrån. A inställes i riktningen N — S, ett lod hänges, så att dess snöre löper genom A, och ändan av en bleckremsa BC stödes mot skåran B, så att remsan pekar mot N. På remsan finns ett märke D; BD = 30 cos p, där p är ortens polhöjd. De båda ställskruvarna på träskivan vridas åt samma håll, tills märket D kommer mitt för lodets snöre. Man syftar därefter över skåran A, så att den avtecknar sig mot N — S-linjen på 360°-skivan. Ställskruvarna vridas därvid lika mycket åt motsatta håll, tills

även lodets snöre avtecknar sig mot 360°-skivans N—S-linje. Nu är axeln riktad mot himmelspolen. — När man sett eller gjort justeringen en gång, är den sedan mycket lätt att göra.

Solens dagliga rörelse: Solen observeras med några timmars mellanrum, och anteckningarna ordnas i en tabell med kolumner för de båda — eventuellt flera — observationerna och rader för *datum, tidpunkt* (borgerlig tid), *timvinkel* och *polavstånd.* Man beräknar därefter, att solens timvinkel ökas 15° i timmen och finner dessutom, att dess polavstånd ej ändrats märkbart.

Månens rörelse: Månen observeras med några dagars mellanrum. En tabell uppställes med kolumner för de båda observationerna och rader för *datum, tidpunkt, solens timvinkel,* som beräknas, *månens timvinkel, skillnaden mellan timvinklarna, månens polavstånd* och *månens fas,* som inritas i tabellen. — Man beräknar därefter, att timvinkelskillnaden mellan solen och månen ökas 12° varje dygn och finner dessutom, att månens polavstånd ändras.



Solens årliga rörelse: Stjärnan Altair observeras med några veckors mellanrum. Observationstabellen innehåller kolumner för de båda observationerna och rader för *datum, tidpunkt, solens polavstånd,* som observerats under dagens lopp, *solens timvinkel,* som beräknas, *Altairs timvinkel* och *skillnaden mellan timvinklarna.* — Med hjälp av resultaten märker man ut solens båda lägen på en stjärnkarta.

Observationerna utföras lämpligen vid höstterminens början. Om de organiseras enligt nedanstående förslag, bliva de föga tidskrävande och alla elever komma säkert att utföra dem ordentligt: Ett par elever instrueras mera ingående om apparatens uppställning, justering och inriktning och få därefter övervaka observationerna; 2—3 elever åt gången observera solen under en förmiddagsrast samt samma dags eftermiddag. Samma kväll gör man

lämpligen den första observationen av Altair, eventuellt även av månen. Samtidigt kan månen betraktas i en lämplig kikare. Mätinstrumentet kan i bästa fall förvaras och uppställas i klassrummet. Observationsredogörelser enligt ovan angivna tabeller lämnas.

Demonstration av solens dagliga rörelse under olika årstider: Bakom mässingsplåten på riktstaven sitter en liten glödlamphållare. Plåten tages bort och en vanlig ficklampsglödlampa iskruvas och anslutes till ett batteri medelst en »telefonhylsa» på stativet och en tunn tråd, som lindats några varv runt axeln. Då uppkommer en ljusfläck på väggen i stavens förlängning. Väggen och ljusfläcken föreställa himlavalvet respektive solen. Axeln vrides långsamt runt. Polavstånd och timvinkel avläsas på gradskivorna; 360°-skivan är även försedd med timindelning, varigenom man direkt kan avläsa tidpunkten. — Det är fördelaktigt men ej nödvändigt att placera apparaten mitt i rummet. Om man målar en vit linje eller fäster en pappersremsa på väggen i jämnhöjd med apparaten, är även horisonten markerad. Belysningen i rummet bör dämpas något, om man ej använder en särskilt stark ficklampsglödlampa eller cykelljuslampa.

Demonstration av solens och övriga himlakroppars rörelse sedd från orter med olika polhöjd: Man ändrar axelns lutning medelst vingmuttern på stativet under 360°-skivan. Sedan kan man demonstrera solens dagsbågar m. m. vid nordpolen, polcirkeln, norra vändkretsen och ekvatorn under olika årstider.

Solur: Man kan antingen rikta staven mot solen eller helt enkelt observera läget av axelns skugga på 360°-skivan.

Tidsekvationen kan alltså även påvisas, om observationerna utsträckas över en tillräcklig tidrymd.

Meridianens riktning och tidpunkten för en meridianpassage kan bestämmas enligt metoden med korresponderande höjder. Därvid kontrollerar man, att axeln står lodrätt genom att ställa ett stativ med ett lod bredvid instrumentet och syfta mot axeln och lodet i två riktningar.

Månbanans lutning påvisar man genom att observera, att fullmånens polavstånd avviker upptill 5° från supplementvinkeln till solens polavstånd.

Den atmosfäriska refraktionen: Om man observerar solen några minuter vid dess nedgång och ställer in instrumentet i beräknad riktning t. ex. varannan minut, ser man mycket tydligt på bildskärmen, att solen de sista minuterna befinner sig upptill 1 soldiameter över det beräknade läget.

En fördel med instrumentet är, att det trots sin enkelhet ger

ganska noggranna värden utan att observationerna behöva göras vid objektets meridianpassage. Det är även fördelaktigt, att de fåtaliga observationernas resultat efteråt kunna kompletteras med demonstrationer med samma instrument.

För den händelse någon önskar tillverka instrumentet lämnas följande uppgifter: Ekplattan 18 cm · 20 cm · 3 cm med ställskruvarnas muttrar infällda på undersidan. L-bygeln, som är fäst på ekplattan, och U-bygeln med 360°-skivan och lager för axeln ha tvärsnittet 5 mm · 25 mm; 360°-skivan av celluloid har 15 cm diameter och är förstärkt med en underliggande järnplåt. Ritpapper med tuschad timindelning mellan skivorna. Axeln är av silverstål 7 mm · 33 cm med ett 3 mm hål för en $^1/_8$ tums skruv för riktstaven. Visaren är av 0,75 mm mässingsplåt, som enl. fig. fastlötts på en $^5/_{16}$ tums sexkantsmutter av mässing, som borrats upp, så att den går trögt på axeln. Muttern, som försetts med en liten sidoskruv för fastklämning på axeln, verkar även som stödlager. En likadan mutter med en ritsa användes för avläsning vid 180°-skivan upptill. Riktstaven med 3 mm · 12 mm tvärsnitt enl. fig. Linsen i ett mässingsrör med 1 mm gods har 18 cm brännvidd och 34 mm diameter. Bildskärmen är av mässing 24 mm · 30 mm med kortsidans mitt fastlödd vid huvudet av en skruv. Hålet i skärmen måste vara elliptiskt, eftersom den skall stå snett. Därför borras det med en 1,5 mm borr under 45° vinkel med skärmens yta. 180°-skivan av celluloid har 13 cm diameter. Hål i gradskivorna göras försiktigt med korkborr. Gradskivorna centreras noggrant.

En enkel kyvett.

I stället för kittade glaskyvetter kan man med fördel använda för tillfället hopsatta sådana, gjorda av två glasskivor, en mjuk gummislang och ett par gummiband, klippta av en cykelslang. Konstruktionen torde framgå av bilden.

Glasskivornas skarpa kanter böra avslipas något, bäst på våt sandsten, eljest på smärgelpapper eller med fil. Gummislangen bör ha slät yta, eljest kommer kyvetten att läcka något. Diameter från 10 mm till ventilgummi går bra.

I stället för gummiband till hopsättningen kan man givetvis använda stålfjädrar. Särskilt en sorts fjädrar, som användas som dukklämmor för trädgårdsbord äro lämpliga, då de samtidigt tjänstgöra som fot (enl. adj. Rendahl).

Kyvetten kan med en liten slangbit i mitten förvandlas till U-rör lämpligt för elektrolys i projektion.

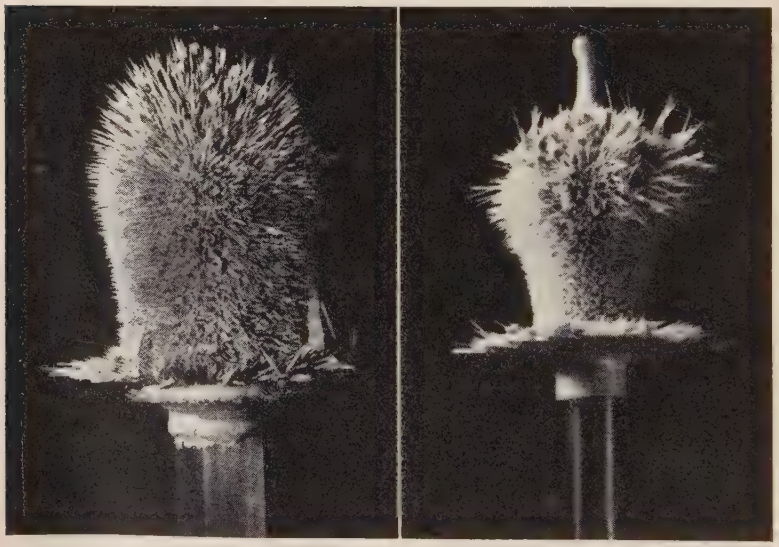
Efter användningen tages kyvetten isär, rengöres och förvaras isärtagen.

Erik Löwenhamn.

Demonstration av monoklint svavel.

Följande variant av det bekanta försöket att framställa monoklint svavel genom att låta smält svavel stelna i en degel gör det möjligt att på en gång för ett helt auditorium visa upp resultatet i stället för att skicka omkring degeln med kristallerna. Man nedsänker i smältan ett provrör med vatten, som tjänstgör som en köldcentral. När så mycket kristaller synas ha bildat sig i degeln, som då man i vanliga fall brukar avbryta försöket, lyftes röret upp och vändes upp och ned med det resultat, som de båda bilderna visa. Förövning tillrådes.

G. Starck.



Några synpunkter på astronomiundervisningen i skolan.[1]

Av ALGOT JENVALL.

Det är nog få ämnen, som emotses från elevernas sida vid början av undervisningen med ett så stort intresse som astronomien. Ämnets placering i skolschemat till realskolans avslutningsklass och 4-åriga gymnasiets ring I är också synnerligen lämplig. Eleverna äro i den åldern i regel vakna och intresserade, då det gäller egna iakttagelser och deras tillämpning. Men för läraren vållar redan ämnets planläggning ganska stora svårigheter.

Granska vi skolstadgans undervisningsplan för de klasser, där astronomiundervisning förekommer, finna vi exakt samma kursfördelning i klasserna 5^5 och 4^4. Två veckotimmar, av vilka en timme laborationer under höstterminen, äro anslagna till en ganska dryg kurs i mekanik, meteorologi samt astronomi. I L II^4 föreligger den enda skillnaden, att laborationerna komma varannan vecka och sålunda ha fördelats över hela läsåret. R I^4 har två lektionstimmar i veckan — inga laborationer — men en drygare kurs i allmän fysik.

Det står ämneskonferensen i fysik vid varje läroverk fritt att förlägga astronomikursen till höst- eller vårterminen. Säkerligen skulle det för astronomiens del varit bäst, om den hade fått komma allra först på höstterminen. Den hade då haft fördel av den period av stjärnklara kvällar, som ofta förekommer i aug. och sept. månader. Då äro ju kvällarna också tämligen varma och även ur den synpunkten lämpliga för astronomiska observationer.

För R I^4:s vidkommande torde det inte möta något hinder att förlägga astronomikursen till hösten. För klasserna 5^5 och 4^4 är det däremot omöjligt. Ty att läsa astronomi på den enda lektionstimmen och dessutom ha fysiska laborationer på en kurs, som skall genomgås först under vårterminen, är ej möjligt. Även för L II^4 vållar astronomikursens förläggning till höstterminen någon svårighet, även om den inte kan sägas vara oöverkomlig.

I den gamla skolstadgans metodiska anvisningar löstes svårigheten genom bestämmelsen, att den direkta iakttagelsen av himlavalvet borde vara det grundläggande för astronomiundervisningen. Förklaringen av det iakttagna skulle följa vid den senare kursgenomgången.

[1] Ur ett föredrag vid Föreningen för matem.-naturv. undervisnings årsmöte i jan. 1942.

Lektor Tom Moll redogör i sin lilla broschyr, »Astronomiska observationer i sjätte klassen och första ringen», för hur hans elever fått under hösten göra en del trevliga astronomiska observationer och mätningar, vilka planlagts och även efteråt diskuterats på några minuter vid början av fysiklektionerna.

Det jag för min del skulle vilja anmärka mot denna metod är dels att en hel del fysiklektioner härvid komma att splittras, vilket knappast kan vara till förmån för fysikundervisningen, dels att största delen av de föreslagna övningarna äro tillämpningsövningar på astronomikursen och ej förberedande övningar. Lika olämpligt som det kan vara att låta eleverna under en laboration bestämma specifika vikten av en kropp genom att väga den i luft och i vatten, för att sedan någon gång *efteråt* under lektionstid gå igenom Arkimedes princip — lika olämpligt förefaller det mig vara att låta dem på höstterminen bestämma meridianen medelst gnomon för att sedan på vårterminen gå igenom, vad som menas med meridianen, och hur det kommer sig, att solen står högst där.

I de metodiska anvisningarna av år 1935 lämnas läraren fria händer, då det gäller att placera de astronomiska observationerna; huvudsaken är, att sådana utföras, så att eleverna bli förtrogna med de enklaste celesta fenomenen. Varje lärare, som undervisar i astronomi, har sålunda alltså att göra upp ett program för dessa observationer. Såvitt jag känner till, har ingen efter den nya stadgans tillkomst offentliggjort något sådant program, vilket ju dock kunde vara av värde isynnerhet för yngre lärare, som ännu ej ha tillräckliga egna erfarenheter att bygga på. Jag vill därför här i all korthet redogöra för mitt privata lilla schema, som jag tänkt att i görligaste mån följa.

På höstterminen användes två lektionstimmar till genomgång av några av de viktigaste stjärnbilderna (t. ex. Karlavagnen, Lilla björnen, Cassiopeja, Perseus, Kusken, Orion, Svanen och Lyran). Eleverna få lära sig att på tavlan rita upp, hur huvudstjärnorna i dessa ligga i förhållande till varandra. Denna genomgång gör det möjligt för eleverna att använda de ganska sparsamma tillfällen, som finnas i Stockholm för att på egen hand lära sig känna igen stjärnbilderna på himlavalvet. Under samma lektionstimmar få de också lära sig mäta höjdvinklar och vinkelavstånd med tillhjälp av utsträckt hand och även solhöjden med en enkel pappersståndare, som kastar skugga på ett horisontellt underlag. Som tredje moment — genomgång av den enkla konsten att med en vanlig kamera fotografera stjärnhimlen. Metoden går ut på att med ett stadigt underlag för kameran — t. ex. en fönsterpost — exponera mot stjärnhimlen cirka 1 minut. Stjärnorna avtecknas

visserligen på plåten eller filmen som små korta streck, men man får med alla de synliga stjärnorna, om man har känsliga plåtar eller film. Synnerligen viktigt är, att någon av eleverna känd konstellation med kraftiga huvudstjärnor kommer med på fotografien. Plåten eller filmen bör framkallas i fullständigt mörkt rum (utan mörkrumslampa) helst med något längre framkallningstid än den vanliga, t. ex. 5 minuter. Vad kameran beträffar, så är det naturligtvis fördelaktigt, om objektivet är ljusstarkt, men även ganska enkla kameror äro användbara. — Detta sätt är mycket förmånligt för att samla material för observationer t. ex. av planeternas rörelser. — De elever, som ha egen kamera och så önska, få använda den, de övriga få gruppvis tillfälle att använda skolans.

Eleverna åläggas sedan att vid första lämpliga tillfälle utföra några enkla höjdmätningar, t. ex. bestämma solhöjden (med pappersståndaren) omkring kl. 12 någon dag samt höjden för någon för dem bekant stjärna, då den är i söder, och dessutom göra någon fotografisk observation. För sina observationer få de lämna skriftlig redogörelse, som ifråga om de fotografiska observationerna skall vara försedd med en kopia av negativet med tydligt angivna huvudstjärnor samt datum och tid för exponeringen.

På vårterminen påbörjas astronomikursen så tidigt som möjligt. Då samlas klassen någon kväll för direkta iakttagelser av stjärnhimlen samt till observationer med skolans astronomiska tub. Är klassen stor, är det därvid lämpligast att fördela dessa observationer på två kvällar med halva klassen åt gången.

Under någon astronomilektion — på dagen alltså — får klassen dessutom övning på skolgården med att bestämma väderstrecken med ledning av solens läge, utpeka norra himmelspolen, ekvatorn, solens dagsbåge på himlavalvet vid sommar- och vintersolståndet m. m.

Under eller efter astronomikursen få eleverna också utföra vad jag skulle vilja kalla tillämpningsövningar på kursen, t. ex. longitud- och latitudbestämningar. Dessa få utföras utom skolan. Skriftlig redogörelse lämnas.

I Stockholm ha vi den stora fördelen att i samband med astronomikursen kunna göra ett besök på planetariet med våra elever. Ett skrivet föredrag läses där upp av en lärare, som har en kraftig och tydlig röst, under det en annan har hand om förevisningslampan. Själva planetarieapparaten skötes av planetariets maskinist. Denna förevisning, som i regel förlagts till tiden efter avslutandet av astronomikursen, har visat sig vara synnerligen givande som en sammanfattande repetition av stjärnornas och solens dagliga rörelser.

Till frågan om begreppen syra och bas. II.

Av **BERTIL ENGLUND.**

I en föregående uppsats[1] har jag beskrivit några experiment, som illustrera den utvidgning, begreppet bas erhållit i och med införandet av BRÖNSTEDS generella syra-bas-definition, vilken kan skrivas

$$\text{Syra} \rightleftarrows \text{Bas} + \text{Proton}.$$

I det följande framläggas några synpunkter på frågan om vissa positiva joners syra-funktion, särskilt ammoniumjonens.

Ett *enkelt demonstrationsförsök* utföres sålunda: i tre provrör slås etylalkohol (96 %), och en indikator med omslagsintervall omkring neutralpunkten (lackmus) tillsättes. Om nu H_4NCl eller H_4NNO_3 löses i det ena röret och KOH i ett av de andra, synas tydliga färgomslag till resp. sur och basisk reaktion. Med den basiska lösningen kan den sura lösningen neutraliseras, så att den ursprungliga färgen återkommer. Reaktionen kan formuleras sålunda:

$$H_4N^{\cdot} + Cl' + K^{\cdot} + OH' = KCl + H_2O + H_3N$$

eller enklare

$$H_4N^{\cdot} + OH' = H_2O + H_3N,$$

varvid tydligen *syran* $H_4N^{\cdot}$ lämnat protoner till *basen* OH'.

Om S är en syra, vars korresponderande bas betecknas med B, utbildas i en vattenlösning av S följande protolytiska jämvikt

$$S + H_2O \rightleftarrows H_3O^{\cdot} + B.$$

De protoner (vätejoner enligt äldre terminologi), som avgivas av syran S, existera icke fria i lösningen såsom man förr föreställt sig utan äro förenade med lösningsmedlet. I vatten förekomma sålunda hydroniumjoner $H_3O^{\cdot}$, eventuellt också starkare hydratiserade joner $(H_2O)_nH^{\cdot}$. För protolysjämvikten erhålles enligt massverkningslagen (varvid uttrycken inom kantiga parenteser beteckna aktiviteter, vilka här kunna sättas lika med koncentrationer):

[1] Elementa *23*, 233. Se även Lektor G. Starcks recension av HÄGG: Kemisk reaktionslära, Elementa *23*, 239.

$$\frac{[H_3O^+]\,[B]}{[S]} = K[H_2O] = k. \qquad (1)$$

Om $[H_2O]$, som i utspädda vattenlösningar har det konstanta värdet 55,5, får ingå i jämviktskonstanten, antager denna samma uttryck som den vanliga dissociationskonstanten för en syra. Eftersom reaktionen ej är en dissociation, är denna beteckning ej adekvat. I en modern lärobok, G. Schwarzenbach: *Allgemeine und anorganische Chemie* (Leipzig 1941), har läran om de kemiska reaktionerna helt genomförts på grundval av nyare åsikter. Här kallas k *aciditetskonstant.* Vad som bestämmer »surhetsgraden» hos en vattenlösning är egentligen icke $[H_3O^+]$ utan förhållandet $[H_3O^+] : [H_2O]$. En jämförelse mellan olika lösningars aciditet kan sålunda endast göras, om $[H_2O]$ är densamma i båda. Detta är givetvis fallet i våra vanliga utspädda lösningar.

För protolysen av t. ex. ättiksyra HAc i vatten

$$HAc + H_2O \rightleftarrows H_3O^+ + Ac'$$

erhålles

$$\frac{[H_3O^+]\,[Ac']}{[HAc]} = 1{,}75 \cdot 10^{-5}. \qquad (2)$$

På samma sätt får man för ammoniumjonen

$$H_4N^+ + H_2O \rightleftarrows H_3O^+ + H_3N.$$

Denna reaktion har hittills behandlats som hydrolys av ett ammoniumsalt — en tillämpning på regeln »salter av svaga baser ha sur reaktion i vattenlösning». Man erhåller

$$\frac{[H_3O^+]\,[H_3N]}{[H_4N^+]} = 5{,}65 \cdot 10^{-10}. \qquad (3)$$

H_4N^+ är en mycket svag syra. Det har intresse att betrakta dess korresponderande bas H_3N. I en lösning av ammoniak i vatten, utbildas jämvikten

$$H_2O + H_3N \rightleftarrows H_4N^+ + OH',$$

för vilken *basicitetskonstanten* härledes:

$$\frac{[H_4N^+]\,[OH']}{[H_3N]} = K'[H_2O] = 1{,}79 \cdot 10^{-5}. \qquad (4)$$

Genom multiplikation av ekv. (3) och (4) erhålles det kända uttrycket $[H_3O^+][OH'] = 10^{-14}$, »vattnets jonprodukt».

I andra lösningsmedel än vatten antaga givetvis jämviktskonstanterna andra numeriska värden. Kännedomen om dessa är f. n.

obetydlig. Ur mätningar, som publicerats 1925 av MICHAELIS — en av banbrytarna i fråga om bestämningen av vätejonkoncentrationer — kan man approximativt beräkna konstantvärden för elektrolyter i alkohollösning. Beräkningen, som är omständlig och ej skall genomföras här, grundar sig på ett samband mellan en lösnings »protonaktivitet» och den potential, som en vätgaselektrod antager i förhållande till lösningen. Protonaktiviteten är därvid ett uttryck för det lösta ämnets tendens att avgiva protoner, d. v. s. dess aciditet (vätejonkoncentration), och det blir möjligt att bestämma denna genom mätning av den elektromotoriska kraften hos vissa koncentrationselement. Mellan den på detta sätt uppmätta »normalaciditetspotentialen» och jämviktskonstanten för protolysen råder en relativt enkel relation. Vid övergång till ett annat lösningsmedel har man vidare att beakta inflytandet av mediets dielkonstant på jonaktiviteten. Resultatet av beräkningen (som utförts av SCHWARZENBACH) är i korthet: syror av typen HAc (oladdade syror, vilkas molekyler protolyseras) äro svagare i alkohol än i vatten, under det att syror av typen H_4N^+ (»katjonsyror») äro starkare. Dessa beräkningar gälla 90 % etylalkohol, och lösningarnas aciditet får sålunda tillskrivas H_3O^+-joner (ej $C_2H_5OH_2^+$-joner; se nedan). De förut härledda uttrycken för aciditetskonstanterna ha alltså samma innebörd.

	I vatten	I 90 % alkohol
Ättiksyra	$k = 10^{-4,76}$	c:a $10^{-8,1}$
Bensoesyra	$10^{-4,18}$	c:a $10^{-7,2}$
Salicylsyra	$10^{-3,06}$	c:a $10^{-5,5}$
Ammoniumjon	$10^{-9,25}$	c:a $10^{-8,3}$
Aniliniumjon	$10^{-4,63}$	c:a $10^{-3,8}$

I full överensstämmelse med detta står iakttagelsen, att omslagsintervallen för sådana indikatorer, som äro syror (t. ex. fenolftalein) förskjutas åt högre pH-värden i alkoholhaltiga lösningar. Intervallets tyngdpunkt ligger ju vid det värde på $[H_3O^+]$, som är lika med indikatorsyrans konstant. — Ur det samband, som finnes mellan konstanterna för korresponderande syror och baser, nämligen $k_S \cdot k_B = 10^{-14}$, kan man nu sluta, att oladdade baser bli svagare i alkohol än i vatten, men laddade baser (»anjonbaser» såsom OH^-, OCH_3^- och $OCOCH_3^-$) starkare.

Enkla kvantitativa försök kunna utföras som titreringar. Som bas användes 0,100-*n* lösning av KOH i C_2H_5OH (96 %), som syra 0,100-*n* lösning av H_4NNO_3 i C_2H_5OH (0,800 g omkristalliserat salt löses till 100 ml). Med fenolftalein som indikator fås ganska skarpa färgomslag; en åskådare, som ser, hur den röda färgen först blek-

nar något och så försvinner, då H_4N^+-lösningen ur byretten droppas till basen, får ett påtagligt intryck av att det är en *syra*, som finns i byretten! En fällning av KNO_3 uppstår. Nitratjonen är i egenskap av korresponderande bas till den starka salpetersyran en så svag bas, att dess närvaro helt kan försummas.

Enligt Brönsteds teori skola även hydratiserade metalljoner vara syror. För några sådana, t. ex. hexa-aquo-aluminiumjonen, är den primära aciditetskonstanten känd. Man har funnit

$$\frac{[H_3O^+]\,[Al(H_2O)_5OH^{++}]}{[Al(H_2O)_6^{+++}]} = 1{,}3 \cdot 10^{-5}.$$

Även med denna syra kan föregående titrering utföras. 0,805 g ren, kristalliserad $Al(H_2O)_6Cl_3$ (= 1/300 mol) löses i alkohol till 100 ml. Indikatorns färgomslag är ej så skarpt som förut — den gelatinösa fällningen, som uppstår, stör kanske något. Vid mitt försök motsvarade 10,0 ml bas 10,1 ml Al-salt, vilket är oväntat, då syran antagits vara 1-basisk, men här tydligen fungerat som 3-basisk. Med beaktande av att Al-atomens koordinationstal är 6, torde reaktionsformeln vara

$$Al(H_2O)_6^{+++} + 3Cl' + 3K^+ + 3OH' = Al(H_2O)_3(OH)_3 + 3KCl + 3H_2O.$$

Alkoholer äro liksom vatten amfolyter, d. v. s. kunna fungera både som syror och baser i Brönsteds mening. Vid protolys kunna således följande joner uppstå:

	katjonsyror	anjonbaser	
av metanol	$CH_3OH_2^+$	OCH_3'	
av etanol	$C_2H_5OH_2^+$	OC_2H_5'	
av propanol	$C_3H_7OH_2^+$	OC_3H_7'	o. s. v.

Då en syra HAc löses i en alkohol ROH, utbildas momentant jämvikten

$$HAc + ROH \rightleftarrows ROH_2^+ + Ac'$$

med en jämviktskonstant, som är analog med förut behandlade aciditetskonstanter, men vars storlek ej är känd.

$$\frac{[ROH_2^+]\,[Ac']}{[HAc]} = K'[ROH] = k'.$$

Observera, att denna reaktion naturligtvis är en helt annan än den långsamt förlöpande esterbildningen

$$HAc + ROH \rightleftarrows H_2O + RAc.$$

I lösningar av ammoniumsalter i alkoholer ske protolyser enligt reaktionsformeln

$$H_4N^{\cdot} + ROH \rightleftarrows ROH_2^{\cdot} + H_3N.$$

Koncentrationen av $ROH_2^{\cdot}$-jonerna torde här vara ganska liten, enär ROH är en svag bas (svagare än vatten).

Kvantitativa försök (neutralisationer) i rena alkoholer: Genom upplösning av c:a 2,5 gram natrium i c:a 100 ml alkohol erhåller man en lösning av alkoholat NaOR, d. v. s. den starka basen OR' (dess normalitet bestämmes genom särskild titrering). Som syra har man som förut H_4NNO_3 eller Al-salt. Fenolftalein kan också här användas; dess basiska färg blir svagare än i vattenlösningar och har en tydlig dragning åt violett. Färgomslaget är emellertid i de alkoholer, som jag prövat i dessa försök (metanol och propanol-1), mycket tydligt och uppträder helt nära ekvivalenspunkten. Titreringen har ett sådant förlopp, som då en medelstark syra titreras med en stark bas. Ett par exempel må anföras:

1) 10,0 ml 0,107-n $NaOC_3H_7$ fordrade för neutralisation 10,61 ml 0,100-n H_4NNO_3 i C_3H_7OH. Vit fällning, stark lukt av ammoniak.

2) 0,1355 g H_4NNO_3 löstes i C_3H_7OH och titrerades med 0,107-n $NaOC_3H_7$. 15,56 ml förbrukades. Ekvivalentvikt: funnen 81, ber. 80.

Reaktionsformel: $H_4NNO_3 + NaOC_3H_7 = NaNO_3 + C_3H_7OH + H_3N$

eller enklare: $H_4N^{\cdot} + OC_3H_7' = C_3H_7OH + H_3N.$

3) 10,0 ml 0,108-n $NaOCH_3$ titrerades med $Al(H_2O)_6Cl_3$ i CH_3OH. Vid tillsats av 10,8 ml 0,033-m lösning blev indikatorn färglös, men omslaget var inte skarpt.

Att reaktioner som de här anförda skola betraktas som neutralisationer tyckes mig icke blott vara riktigast ur systematisk synpunkt utan också enklast. Om den nyare uppfattningen tillämpas konsekvent, bortfaller också begreppet hydrolys, som man ju ägnar mycken tid åt i undervisningen — man behöver nu endast de nya syra- och basbegreppen för att förklara förhållandena i lösningar av t. ex. acetat, karbonat och aluminiumsalter.

Den skenbara formen av en strålkastares ljusbana.

Av **TORGNY EDQVIST.**

Vid en luftvärnsövning över norra delen av London iakttog jag för första gången, att strålkastarnas blåvita ljusbanor skenbart voro krökta. Under krigsåren har man på många orter även i vårt land haft tillfälle att studera detta slags ljusfenomen. Jag intervjuade under 1941 ett hundratal åskådare om deras uppfattning av ljusbanornas form. Resultatet blev rätt oväntat. Inemot halva antalet kunde inte eller ville inte ge något bestämt besked. Återstoden var delad i två ungefär jämnstarka grupper. Den ena parten påstod, att banorna voro raka, den andra, att de voro krökta. I några fall gjordes vissa förbehåll: »först rak, sedan svänger den i en båge; först är den rak, sedan går den nedåt; rak, om den går nära marken; om två banor korsa varandra, äro de raka kring korsningsstället, eljest äro de krökta». De personer, som uppgivit, att banorna voro krökta, tillfrågades, hur de ville förklara detta. De allra flesta kunde icke lämna någon förklaring alls. Alla de återstående trodde, att krökningen var reell och berodde på ljusets brytning i atmosfären. Till denna grupp hörde några militärer, ingenjörer och akademiskt bildade personer.

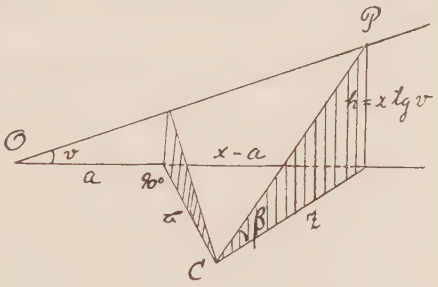


Fig. 1.

Deras åsikt kan icke vara riktig. En brytningseffekt existerar naturligtvis, men den är utan betydelse för det fenomen, varom här är fråga. Eljest skulle ändringar i de atmosfäriska förhållandena kunna medföra varjehanda ändringar av banformen. Något dylikt har jag hittills aldrig konstaterat. Ljusbanans skenbara form bestämmes nog i huvudsak av det enkla faktum, att man ser dess olika punkter under olika höjdvinklar.

I fig. 1 utgår en rak ljusbana under elevationsvinkeln v från punkten O. Punkten P på banan med horisontalavståndet x från

O synes under höjdvinkeln β för en observatör i punkten C med koordinaterna a och b i ett horisontalplan genom O. Härvid betyder b observatörens avstånd från vertikalplanet genom OP.

Av figuren erhålles

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{h}{z};\quad \operatorname{tg}v = \frac{h}{x};\quad z^2 = (x-a)^2 + b^2.$$

Härav fås

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}v \cdot \frac{x}{\sqrt{(x-a)^2 + b^2}}.$$

Omedelbart inses, att $\beta = v$ för $x = \infty$.

Enligt

$$\frac{d(\operatorname{tg}\beta)}{dx} = \operatorname{tg}v \cdot \frac{a^2 + b^2 - ax}{[(x-a)^2 + b^2]^{3/2}}$$

erhålles

$$\operatorname{tg}\beta_{\max} = \operatorname{tg}v \cdot \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b} \text{ för } x = a + \frac{b^2}{a}.$$

Maximet ligger alltså icke mitt framför observatören utom för $b = 0$ (samt för $v = 0$), utan är förskjutet stycket $\frac{b^2}{a}$ i riktning från O.

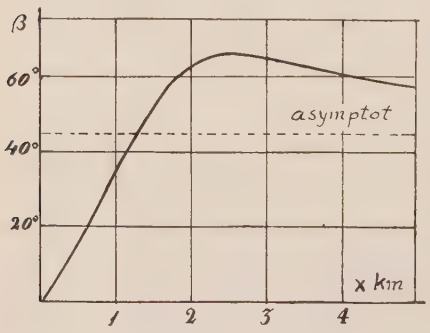


Fig. 2.

Fig. 2 visar grafiskt β som funktion av x för $v = 45°$, $a = 2$ km och $b = 1$ km. Kurvans form korresponderar utmärkt med det subjektiva intrycket av en ljusbana, som jag haft tillfälle observera under approximativt samma numeriska förutsättningar.

Banan syntes där stiga upp rätlinigt från den på marken stående strålkastaren, men den krökte sig småningom till en praktfull båge med tydligt förskjutet maximum samt försvann omsider med avtagande krökning i fjärran.

Elevationsvinkelns storlek inverkar avsevärt på den subjektiva uppfattningen. För $v = 0$ — ett fall, som realiseras av sammanbindningslinjen genom lyktornas ljusglober vid en rak, horisontell gata — tycker jag för min del, att endast ett mycket kort parti av linjen är krökt, nämligen det, som befinner sig rätt över maximet; sedan faller linjen av rätlinigt åt båda hållen.

Ökas elevationsvinkeln, kommer ljusbanans krökta parti att överspänna allt större vidder, och dess form påminner till en början om en sinusbåge för att vid ytterligare ökning av vinkeln snarare synas tillhöra en cirkellinje.

Emellertid är det icke säkert, att min uppfattning skulle delas av en annan observatör. Det förefaller vara så, att observatörer av motsvarande bildningsgrad, som från samma punkt betrakta samma ljusbana, icke alltid äro ense om dess form. För den subjektiva formuppfattningen måste även andra moment än vinklarna β och v spela in. Jag har funnit antydningar om att synintrycken av höga föremål på jordytan kunna modifiera en observatörs uppfattning av ljusbanans form. Men detta är en sak av större intresse för den experimentella psykologien än för fysiken.

Naturvetenskapliga dagar

i Lund 6—7 april 1942.

De av Föreningen i Lund för matematisk-naturvetenskaplig undervisning anordnade naturvetenskapliga dagarna började annandag påsk kl 13 med årsmötesförhandlingar inom sektionen för matematik, fysik och kemi, varvid styrelse och funktionärer omvaldes (se Elementa marsh. 1942, s. 41).

Rektor P. G. Persson höll därefter föredrag om »Hilberts axiom och cirkelgeometrien». Inledningsvis definierades inversion, och grunderna av cirkelgeometrien behandlades. De karakteristiska dragen hos de s. k. elliptiska, hyperboliska och paraboliska geometrierna klarlades med tillhjälp av cirkelgeometrien. Föreläsaren diskuterade därefter giltigheten av de Hilbertska axiomen i de olika systemen.

Efter föredraget vidtogo gemensamma förhandlingar för föreningens båda sektioner. Härvid omvaldes till ordf. för föreningen i dess helhet rektor P. G. Persson, till sekr. och kassör docent Börje Svensson och till revisorer läroverksadjunkt E. Nordenstedt och lektor G. Arvidsson med lektor F. Olsson som suppleant.

Så följde ett föredrag över ämnet »Kautschuk och gummiindustri» av fil. dr S. Hagman vid Hälsingborgs Gummifabrik. Utforskandet av kautschukens kemiska och fysikaliska egenskaper ha vållat vetenskapsmännen mycket arbete, men i stort sett har detta krönts med framgång. Redan under föregående världskrig gjordes den första syntetiska kautschuken, men efter krigets slut återgick

man till den naturliga kautschuken. I slutet av 1920 och början av 1930-talet kom man i olika länder till insikt om nödvändigheten av att göra sig oberoende av import, varför problemet att framställa syntetisk kautschuk på allvar blev föremål för vetenskaplig och teknisk forskning. Numera sker dylik tillverkning särskilt i Amerika, England och Tyskland, och inom få år torde fabrikation vara i gång även i vårt land. Föreläsaren gav sedan en översikt av dagssituationen i Sverige, varvid framhölls den stora betydelsen av gummiskrotinsamlingar.

Vid den gemensamma middagen förevisades några intressanta undervisningsfilmer från Norstedt & Söner i Stockholm: »Havets pulsslag» (ebb och flod), »Explosionsmotorn», »Sjöborren», »Rörelsefenomen hos växterna».

Inom sektionen för matematik, fysik och kemi fortsatte förhandlingarna på tisdagen kl 9 med »Fysikaliska demonstrationer» av lektor A. Leide. En apparat för upptagning av växelströmsdiagram demonstrerades. I samband med en rad optiska försök riktade föreläsaren en skarp kritik mot de gängse läroböckernas sätt att behandla strålgången i de optiska instrumenten. Betydelsen av att tala om strålknippen i stället för om enskilda strålar framhölls. Till slut demonstrerades transversell vågrörelse.

Kl 10 föreläste professor John Koch över »Infraröda spektrum och molekylstruktur». Föreläsaren belyste utvecklingen från slutet av 1890-talet, då de första undersökningarna gjordes över absorption i den ultraröda delen av spektrum, fram till nuvarande experimentella resultat och teoretiska uppfattning. Speciellt diskuterades den experimentella utvecklingen av klorvätets absorption. I den senare delen av föreläsningen behandlades de slutsatser angående molekylernas byggnad, som kunna dragas ur molekylspektra. Undersökningarna ha visat, att olika molekyltyper finnas: s. k. stavformade (koldioxid), triangelformade (vatten), pyramidformade (ammoniak) och tetraederformade (metan).

Å Matematiska institutionen föreläste kl 11 prof. M. Riesz över »En elementär realisation av den icke-euklideiska geometrien». Föredraget torde sedermera inflyta i Elementa.

Efter lunch på Lunds Studentkårs Konviktorium gjordes besök vid Åkerlund-Rausings anläggningar. Direktör B. Svenby höll ett orienterande föredrag över förpackningsproblemet, varefter deltagarna fingo se fabrikationen under sakkunnig ledning.

Börje Svensson.

Bokanmälningar.

Kosmos, Fysikaliska uppsatser, utgivna av Svenska Fysikersamfundet, bd 19, 1941, 176 s. I bokhandeln häft. kr 10. Medlemskap, årsavg. kr 10, medför rätt till bundet ex. Anmälan till fil. dr Anna Beckman, Lilljeborgsvägen 3, Uppsala.

I den nu föreliggande årgången av Kosmos inrymmes en rad välskrivna uppsatser från skilda områden av fysiken. Det är glädjande, att denna värdefulla publikation fortfarande årligen kan utkomma med nästan normalt omfång trots de av tidsläget betingade ogynnsamma omständigheterna, som i synnerhet för fysikerna medfört, att deras krafter i stor utsträckning tagits i anspråk för andra än rent vetenskapliga arbeten.

I en artikel betitlad diffusionsjämvikter och stationära diffusionstillstånd inom elektronfysiken behandlar prof. E. Rudberg en serie elektronfysikaliska problem, såsom elektronfördelningen vid ytan av en metall och i gasurladdningar, uppkomsten av likriktarverkan mellan metaller och halvledare i kontakt med varandra m. fl., skildrar mekanismen vid dessa fenomen, till vars utforskning prof. Rudberg själv bidragit, och påvisar den klassiska teoriens betydelse för förståelse av dessa problem. En annan tillämpning av den klassiska teorien på ett modernt problem behandlar fil. lic. C. W. P. Reuterswärd i en uppsats om jonoptik, vari angivas de principer, som under de senaste åren lett till en rad förbättrade masspektrografer.

I tvenne aktuella uppsatser avhandlas kärnfysikaliska problem. Fil. lic. S. Eklund behandlar den kärnomvandling, som först iakttogs av Fermi och hans medarbetare 1934 vid neutronbombardemang av de tyngsta elementen och länge tyddes såsom en bildningsprocess för transurana element men i början av 1939 genom arbeten av Hahn, Strassmann, Meitner o. a. kunde visas bestå i en klyvning (eng. fission) av atomkärnan i två ungefär lika tunga delkärnor. De intressanta försök och den utveckling av teorien, som denna sensationella upptäckt gav upphov till, skildras ingående. I den andra kärnfysikaliska uppsatsen upptar prof. Ellen Gleditsch till behandling de radioaktiva indikatorerna, vilkas användning inom biologi och medicin beskrevs redan i föregående årgång av tidskriften. I prof. Gleditschs artikel tages närmast sikte på de radioaktiva indikatorernas användning för studium av kemiska reaktionsförlopp, och en serie av prof. Gleditsch utförda intressanta experiment över utbytet av joner mellan salter och

lösningar beskrivas. En beskrivning av egna forskningsresultat ger också docent B. Edlén i en uppsats om spektrum av dubbelt joniserat järn, vilket utomordentligt komplicerade spektrum av förf. analyserats, ett synnerligen krävande arbete. Då linjer härrörande från järn i olika jonisationsgrader ingå i stjärnornas spektra, torde denna analys vara av intresse för astrofysiken.

Om temperaturmätningarna i de högre luftlagren har fil. lic. A. Nyberg skrivit ett kåseri, vari först lämnas en historisk framställning av utvecklingen av metoderna för dylika mätningar genom tiderna från de första uppstigningarna med bemannade ballonger till våra dagars ballongförsök med radiosonder, varefter skildras de sonderingar av de högre luftlagren, som under de senaste åren utförts vid Statens meteorologisk-hydrografiska anstalts station i Pajala.

Årsskriften avslutas med en uppsats av ingenjör R. Thorburn om registrerande instrument, deras teori och praktiska användningar för studium av förlopp, som utspelas på tider ned till 10^{-8} å 10^{-9} sekunder.

Nils Ryde.

Nils Tamm och Åke Wallenquist, *Amatörastronomen,* Handledning i observationskonst. Natur och Kultur, Stockholm 1942, 126 s., kr 3:—.

Boken avser att ge en första vägledning för dem, som äro intresserade av att på egen hand göra astronomiska observationer; framför allt syfta författarna till att leda in hobbyn att »kika på stjärnorna» på mera vetenskapliga banor. Att boken i detta avseende fyller högt ställda anspråk, därför borga redan författarnamnen: Nils Tamm intager en framstående plats bland världens amatörastronomer och har gjort flera av fackmännen uppmärksammade insatser; Åke Wallenquist är en internationellt känd, mångsidig fackastronom, som under många års observationsarbeten i Uppsala och i Lembang på Java förvärvat sig en rik fond av erfarenhet i allt, som rör praktisk astronomi.

I första kapitlet behandlas observationer, som kunna utföras med blotta ögat utan hjälp av optiska hjälpmedel, i första hand skattningar av ljusfördelningen inom Vintergatan och iakttagelser av stjärnfall och eldkulor. Därefter redogöres för de ökade möjligheter, som redan öppna sig för amatörastronomen, blott han till sitt förfogande har en vanlig teater- eller prismakikare. Lämpliga arbetsfält äro här studiet av ljusvariationerna hos föränderliga stjärnor, skattningar av totalmagnituder för stjärnhopar och nebulosor och skattningar av stjärnfärger. Författarna övergå där-

efter till de ännu mera vidgade studieområden, som en astronomisk kikare erbjuder. Inledningsvis redogöres här för den astronomiska tubens konstruktion, för olika typer av objektiv och okular och för de viktigaste bildfelen; amatören får lära sig, huru han själv skall kunna pröva sitt instruments kapacitet. Tubens parallaktiska uppställning och justering behandlas ingående. Som exempel på de många lösningar, som kunna komma ifråga, då det gäller att ordna med en fast uppställning av en astronomisk tub av större dimensioner, ges en beskrivning av artisten Tamms eget observatorium Kvistaberg och dess instrumentella utrustning. Ett kapitel ger råd och anvisningar för utförandet av visuella observationer, ett annat — bokens väl allra mest intressanta avsnitt — handlar om fotografien i den astronomiska forskningens tjänst och om hur amatörastronomen även på detta område med relativt enkla hjälpmedel kan nå värdefulla resultat. Läsaren får här bl. a. stifta bekantskap med den astronomiska fotograferingens teknik och den fotografiska plåtens egenskaper och får goda tips, hur man med relativt enkla medel själv skall kunna bygga hjälpapparater för bearbetningen av ett plåtmaterial. I sista kapitlet ges utförliga anvisningar för fotografiska undersökningar av variabla stjärnor. Boken avslutas med en serie för amatörastronomen synnerligen värdefulla tabeller.

Vad som här i korthet kunnat nämnas är endast avsett att ge en uppfattning om bokens omväxlande och rikhaltiga innehåll. Läsaren av boken förnimmer på varje sida, att det är inget andrahandsvetande, som bjudes; de båda författarna ha öst ur rika fonder av egna rön och erfarenheter, vilket åt framställningen förlänar en sällsynt friskhet och färg. Ej minst berömvärda äro de talrika illustrationerna, av vilka en stor del äro reproduktioner av fotografier tagna av Tamm på Kvistabergs observatorium. Boken är förtjänt av en vidsträckt spridning. Här bör kanske särskilt framhållas, att en del av de beskrivna observationerna torde vara synnerligen lämpliga som enskilt arbete vid den högre skolundervisningen.

Jöran M. Ramberg.

George Gamow, *Solens födelse och död.* Översatt av prof. Hans Pettersson. Albert Bonniers förlag 1942, 218 s., 16 pl., kr 12:—, inb. kr 15:—.

Här föreligger en utmärkt skickligt gjord populär framställning av modern kärnfysik och astrofysik. Den berömde ryskfödde atomteoretikern Gamow, professor i teoretisk fysik vid George Washington University, har presterat en populär bok, som är

mycket innehållsrik. Den berättar på ett ledigt och angenämt sätt allt av vikt rörande »atomernas anatomi», kvantumlagarna, radioaktiviteten och atomkrossning, neutroner, kärnreaktioner och subatomisk energi. Därmed föres man över till astronomiska problem och vänjes efterhand vid de enorma trycken och temperaturerna i stjärnornas inre, blir bekant med den cykliskt förlöpande reaktionskedja, varmed solen alstrar sin energi (med kol och kväve som katalysatorer), får en föraning om solens utveckling och död, och blir sedan bekant med stjärnornas och vintergatornas öden med allt mera växande vyer mot oändligheten i tid och rum. Detta allt utan att förlora kontakten med det lilla, med det minsta, atomkärnan och neutrinon. De vita dvärgarna, de röda jättarna, materiens sammanbrott, de extragalaktiska nebulosorna, det expanderande universum — allt blir man bekant med på ett oförgätligt sätt.

Det är en glädje att konstatera, att översättaren lagt ned omsorg på detaljer såväl beträffande form som innehåll. Kapitlet om kvantumlagarna är förebildligt i avseende på språkvård såväl för översättningar som vid författandet av svenska originaltexter, där kvantumteorien och dess terminologi beröras.

J. Tandberg.

R. Kolkwitz und F. Tödt, *Einfache Untersuchungen von Boden und Wasser.* Verlag Gustav Fischer, Jena 1941, 134 s., kr 7: 05.

I dessa tider, då markens gröda är mer värdefull än eljest, få metoderna att kemiskt och biologiskt undersöka jordmånens lämplighet för kultur den mest påtagliga betydelse, ej blott för fackmännen utan även för den bildade allmänheten och det uppväxande släktet. Dessa frågor behandlas i föreliggande bok i klar, lättförståelig och dock grundlig form.

Den kemiska avdelningen omfattar mätningar av surhetsgrad, halten fosfat, kväve, järn, kalk m. m. samt betydelsen av dessa och andra kemiska faktorer ävensom fysikaliska synpunkter. Den biologiska avdelningen, som behandlas utförligare, omfattar en mängd försök och utredningar inom skilda områden av vattnets och olika jordarters biologiska funktioner samt betydelsen av markens sammansättning för odlandet av olika växttyper. Boken är avsedd att användas som ledning vid enskilda arbeten i kemi, vartill den efter undertecknads erfarenhet är lämplig, samt i biologi, varom undertecknad ej vågar döma, varjämte även för lektionsundervisningen en lärare här finner åtskilliga goda uppslag och synpunkter. Den vackert illustrerade boken rekommenderas ej minst för lärare i biologi.

E. Nordefeldt.

A. Mittasch, *Kurze Geschichte der Katalyse in Praxis und Theorie.* Verlag Julius Springer, Berlin 1939, 139 s., kr 8: 95.

Alltsedan alkemisternas försök att medelst de vises sten omvandla metaller till guld har den grupp av hemlighetsfulla fenomen som Berzelius år 1835 sammanförde under begreppet katalys tilldragit sig livligt intresse. Redan Scheele studerade dylika processer, och de började snart tillämpas inom teknisk kemi, såsom vid framställning av socker, alkohol, svavelsyra och klor för att sedermera utvidgas till så skilda områden som hydrering, oxidation, kondensation, polymerisation, framställning av ammoniak, bensin, färgämnen, läkemedel och konstgummi.

Jämsides med framläggandet av dessa tekniska nyvinningar redogör boken för det intensiva teoretiska studiet av katalysens skilda typer och de olika förklaringssätt som under utvecklingens gång framkommit och varuti även svenska vetenskapsmän gjort betydande insatser. »Kemien utan katalys vore som en klinga utan fäste, en lampa utan sken, en klocka utan klang.»

För varje kemist, intresserad av denna vetenskapsgrens historiska utveckling, är boken en givande lektyr, ej minst emedan den författats av en utomordentlig fackman.

E. Nordefeldt.

K. Kobberø, *Kemi for Mellemskolen.* H. Hirschsprungs Forlag, København 1941, 56 s., 22 bilder. — Kemi for mat.-naturvid. gymnasium. Samma förlag 1942, 202 s., 30 bilder.

Kemien för mellanskolan är ungefär av samma omfång som motsvarande svenska läroböcker, men stoffet och dess anordning äro helt annorlunda och, det måste sägas, ganska främmande. Lärjungarna möta redan från början ett stort antal främmande ämnen av komplicerad sammansättning, såsom kaliumklorat och -permanganat, blynitrat, kaliumjodid, koldioxid, och ett antal förlopp, som för en nybörjare måste vara ganska svårbegripliga. Hela framställningen verkar mycket splittrad och föga ägnad att ge en logiskt genomförd uppbyggnad av systematiska, elementära, kemiska kunskaper från det enkla till det sammansatta. Atomer, molekyler och kemiska formler införas tidigt utan något försök till försöksmässig motivering. Det är svårt att tro, att eleverna efter en genomgången kurs av denna art skulle kunna äga annat än en ytlig och ganska splittrad uppfattning av de kemiska grunderna.

Läroboken för gymnasiet börjar med en kort teoretisk inledning, omfattande de stökiometriska lagarna och deras förklaring genom

atom- och molekylarteorierna, varefter grundämnena genomgås i på det hela taget sedvanlig ordning, dock att metallerna tagas i ordning av avtagande positiv karaktär utan hänsyn till det periodiska systemet, som behandlas först i det därpå följande kapitlet om »Fysisk kemi II». Mellan metalloider och metaller är inskjutet kapitlet Fysisk kemi I, innehållande rubrikerna normalvolym (gasers), ekvivalens och titrering, osmotiska egenskaper, elektrolytisk dissociation, syror och baser (dock ej enligt Brönsted), hydrolys. I Fysisk kemi II behandlas massverkans lag ganska ingående, sur och basisk reaktion, Brönsteds syra-basteori, löslighetsprodukt, det periodiska systemet, elektrovalenta och kovalenta bindningar. Radioaktiviteten saknas, den ingår tydligen i fysikkursen.

Den organiska kemien är jämförelsevis kortfattad och upptar endast 30 av bokens 202 sidor. Proteinämnen medtagas ej alls, och bensolkemien behandlas på två sidor. Vid en jämförelse med de utrymmen, som ägnats etylen och acetylen (3 sidor), aldehyder och ketoner (3 sidor), synes därför den organiska delens innehåll vara olämpligt avvägt.

Som totalomdöme om detta arbete må uttalas, att författaren är lyckligare som lärare för ett högre än för ett lägre stadium, att hans lärobok för gymnasiet är ett gott arbete på i det stora hela traditionell grund, men att det nya grepp på ämnet, som man kunde hoppas på i en dansk lärobok, inte kommer till synes.

G. Starck.

Paul Nylén och Nils Wigren, *Elementära kemiska räkneuppgifter med svar och anvisningar.* Fjärde omarbetade och tillökade uppl. Hugo Geber, Stockholm 1942, 217 s. och en lös logaritmtabell. Bunden kr 5: 75.

För 15 år sedan recenserades i tidskriften detta förträffliga arbetes första upplaga, och det lovordande omdöme, som då uttalades, gäller i minst lika hög grad den nu utkomna upplagan. Den har behållit de äldre upplagornas förtjänster och ökat dem genom en tidsenlig modernisering och omarbetning. Man rekommenderar med värme denna utmärkta exempelsamling, som på samma gång genom de alldeles förträffliga inledningarna till varje kapitel fyller vissa delar av en läroboks uppgifter.

G. Starck.

Gradualavhandlingar.[1]

PHILIP HAGLUND, *An Experimental Investigation into L-Emission Spectra.* Ark. f. Mat., Astr. o. Fys. 28 A, N:o 8, 1941. Disp. i Uppsala den 29 nov. 1941. Opponenter: docent STEN VON FRIESEN och fil. mag. GÖSTA BROGREN.

Genom de senare årens omfattande arbeten inom röntgenspektroskopien ha de olika spektra undersökts synnerligen ingående. Huvudlinjerna ha precisionsmätts och deras ursprung mestadels klarlagts. Inom vissa områden återstå dock en hel del arbeten, i det att den större noggrannhet och ökade ljusstyrka, som modernare spektrografkonstruktioner erbjuda, ännu ej tillfullo utnyttjats.

Det område, som varit föremål för förf:s undersökningar, är L-serien för elementen 53 J — 37 Rb, vilket omfattar våglängdsvärden mellan ungefär 2400 och 8400 X.E. Inom detta våglängdsområde är det nödvändigt — för att undvika absorption i luft — att den experimentella apparaturen är så anordnad, att strålarna helt gå i vakuum.

För undersökningarna har konstruerats och använts dels en vakuumtubspektrograf och dels en konkavkristallspektrograf enligt Johann-principen. Den förra användes för mätning av starkare linjer och noggrannheten i de angivna våglängdsvärdena uppgår till 0,02 — 0,04 ‰. Spektrografen för böjd kristall användes för de svagare linjerna. Ehuru de fokusserade spektrallinjerna äro belägna på en cylinder, användes för den fotografiska registreringen plåtar i plan kassett. Två skilda kassettlägen användes. Som läge A kunna vi beteckna det läge, då det infallande strålknippet träffar plåten under rät vinkel. I läget B åter tangerar plåten fokusseringscirkeln. Fördelarna med plan kassett äro flera. Dels kan man säkrare omräkna avstånden på plåten i vinkelmått eller våglängder. Och dels erbjuda de båda plåtställningarna A och B två möjligheter beträffande dispersionen. Förhållandet mellan dispersionen i de båda lägena är approximativt sin $\varphi : 1$ (φ = glasvinkeln). De använda kristallgittren äro kalkspat, kvarts, gips och glimmer. Kristallerna inböjdes i slipade hållare till 1 m:s radie. Felen i de med denna spektrograf erhållna våglängdsvärdena uppskattas till mellan 0,05 och 0,12 ‰. Felen härröra huvudsakligen från mätningen av plåtarna, vilken försvåras av linjernas relativt stora bredd inom det undersökta området.

I tidigare mätningar ha komponenterna i spindubbletten $L\alpha_1\alpha_2$ separerats och mätts var för sig ned t. o. m. 41 Nb. Den dispersion,

[1] När ej annorlunda anges, är referatet av vederbörande förf:s egen hand.

som nu använts, gjorde det möjligt att upplösa denna dubblett ned t. o. m. 37 Rb. Dubblettavståndet minskar med fallande atomnummer, dock ej kontinuerligt utan med tydliga diskontinuiteter, som sammanfalla med utfyllandet av ett yttre elektronskal. Samma är också förhållandet inom spindubbletten $\beta_3\beta_4$.

Beträffande linjerna $L\gamma_4$, γ_1 och β_2 visade sig dessa i vissa fall vara asymmetriska med snabbare intensitetsfall åt kortvågssidan. Denna asymmetri uppträder, när linjen ifråga är resultatet av en övergång från en yttre nivå, innehållande valenselektroner, till ett inre skal. För $L\gamma_4$ ($L_IO_{II,III}$) inträffar detta för element med lägre atomnummer än 53 J, för $L\gamma_1$ ($L_{II}N_{IV}$) och $L\beta_2$ ($L_{III}N_{IV,V}$) för elementet 46 Pd och nedåt. Denna asymmetri är i överensstämmelse med den bild av fördelningen av valenselektronerna inom ett yttre skal, som ges av den statistiska elektronteorien för metaller.

Enligt denna teori bör man även finna överensstämmelse mellan nämnda emissionslinjer och motsvarande absorptionskanter. Alltså samma våglängdsvärde för $L\gamma_4$ och L_I-kanten hos elementen 53 J — 49 In och motsvarande för $L\gamma_1$ och β_2 samt L_{II}- resp. L_{III}-kanterna hos elementen 46 Pd — 40 Zr. Detta har tidigare experimentellt verifierats av Sandström och bekräftades nu med undantag av ett par fall, där ytterligare undersökningar krävas för att kunna avgöra, om den erhållna diskrepansen är verklig eller ej.

Från andra spektralområden känner man ett flertal linjer — kvadrupollinjer — som svara mot övergångar varvid kvanttalen l och j även kunna ändras med 2. Inom det av förf. undersökta området har endast linjerna β_9 och β_{10} iakttagits. Dessa linjer svara mot övergångarna L_IM_V resp. L_IM_{IV}; de ha återfunnits och mätts hos elementen 53 J t. o. m. 46 Pd.

Under arbetets fortskridande blev det klart, att uppmärksamhet även måste ägnas åt den kemiska bindningens inverkan på våglängdsvärdena. Den vanliga och säkraste metoden att undersöka sådan inverkan är att använda sekundärstrålning. Metodens begränsning ligger dock i utbytet, d. v. s. förhållandet mellan intensiteterna för primär- och sekundärstrålningen. Detta förhållande minskar snabbt ej endast med fallande atomnummer, utan även om vi gå från K-serien till L- eller M-serierna för ett givet element. Inom det område, som det gäller (elementen under 47 Ag), är utbytet mindre än 10 % i L-serien.

Våglängden för linjerna $L\gamma_1$ och β_2 hos elementen 46 Pd och 45 Rh samt deras oxider bestämdes med användande av sekundärstrålning. Vid motsvarande mätningar på 42 Mo, 41 Nb och 40 Zr användes primärstrålning med vissa försiktighetsåtgärder. Mätningarna visade, att linjerna $L\gamma_1$ och β_2 hos nämnda element röna

en inverkan av kemisk bindning, som i vissa fall är högst avsevärd. Inte bara våglängdsvärdena påverkas utan även intensitetsfördelningen inom linjen. I ett par fall har också hos oxiden påvisats en uppspaltning i två komponenter. Däremot har ej någon kemisk inverkan kunnat påvisas på $L\alpha_1$ och β_1 från 40 Zr eller element med högre atomnummer. Man måste dock vid precisionsmätningar inom detta område ha uppmärksamheten riktad på den kemiska bindningens eventuella inverkan på slutresultatet.

Gunnar Wernberg, *A Spectrophotometric Investigation on Stars in Bright and Dark Regions in Cepheus.* Disp. i Uppsala 17 maj 1941. Opponenter: observator Carl Schalén och fil. mag. Erik Bodén.

Avhandlingen omfattar en undersökning av ljusabsorptionen inom vissa områden i stjärnbilden Cepheus, baserad på apparenta magnituder, spektral- och luminositetstyper samt färgekvivalenter för mer än 3 100 stjärnor ner till 11 storleken.

Efter en inledande allmän orientering av ändamålet med undersökningen ges i arbetets första del en beskrivning av observationsmaterialet och dess bearbetning. Materialet är insamlat av författaren själv och vilar på plåtar upptagna med Zeiss-Heyde astrografen i Uppsala i kombinationen prisma-gitter. Samtliga spektralbilder, vilkas antal uppgingo till mellan 18 000 och 19 000 stycken, ha registrerats med observatoriets fotoelektriska mikrofotometer.

I de erhållna registrogrammen ha sådana områden uppmätts, som äro särskilt korrelerade med spektraltyp och absolut ljusstyrka samt lämpliga för definition av en färgekvivalent. Som luminositetskriteria för de tidigare spektraltyperna har författaren använt sig av intensiteterna av vätgaslinjerna $H\gamma$ och $H\delta$. Därvid har luminositetsklassificeringen kunnat anslutas till tidigare klassificeringar med tillhjälp av vissa relationer mellan linjeintensitet och absolut magnitud. Stjärnor av senare spektraltyper ha uppdelats i undergrupper med användning av den s. k. g-effekten och en lämplig färgekvivalent. För särskiljande av jättar och dvärgar bland de färgade stjärnorna har Lindblads cyankriterium använts.

De skenbara magnituderna ha bestämts ur mätningar i de s. k. isofota våglängderna. Detta förfaringssätt innebär, att en stjärnas integrerade strålning ersättes med monokromatisk strålning för en viss bestämd våglängd.

Avhandlingens andra del innehåller den statistiska bearbetningen av stjärnornas apparenta magnituder och spektraltyper samt färgekvivalenter. Den upptar först en undersökning av den

skenbara fördelningen av stjärnor av olika spektraltyper över området. Resultatet har åskådliggjorts i ett antal kartor och diagram.

För ett mera ingående studium av vintergatsstrukturen indelades området i mindre areor på grundval av den apparenta stjärnfördelningen. Det visade sig därvid lämpligt att avgränsa två areor med normal stjärnfördelning samt fyra areor med mer eller mindre kraftig absorption.

Vid studiet av ljusabsorptionen i de stjärnfattiga områdena på grundval av stjärntalen för olika spektral- och luminositetsgrupper har författaren dels använt sig av de s. k. Wolfdiagrammen och dels av en nyare metod, utarbetad av Malmquist. Diskussionen ledde därvid till att de mörka nebulosorna, som förekomma i tre av områdena, ligga på 200 parsecs avstånd. Totalabsorptionen synes vara underkastad variationer från 0,8 magnituder till 1,3 magnituder. Studiet av de absolut ljusstarkaste stjärnorna avslöjade dessutom existensen av mörka nebulosor på mycket stora avstånd, omkring 900 parsecs.

De mörka Cepheusnebulosornas absorption visade sig vara selektiv, d. v. s. vara beroende av ljusets våglängd. Denna ljusets rödfärgning, bestämd ur B och A stjärnornas färgekvivalenter för ett visst våglängdsintervall, kan däremot försummas för de stjärnrika trakterna, om avstånden ej överstiga 1 000 parsecs. Med hänsyn tagen till denna effekt bestämdes selektiviteten för vart och ett av de mörka molnen.

En diskussion av den selektiva absorptionen gav vidare full bekräftelse på de nebulosadata, som erhöllos ur studiet av de observerade stjärntalen.

Vid en sammanställning av de två slagen av absorption visade det sig, att den selektiva absorptionen, som hänförts till våglängdsintervallet 395 $\mu\mu$ — 440 $\mu\mu$, utgör 11 % av totalabsorptionen. Med utgångspunkt från Mies teori om ljusets spridning och absorption i metalliska medier, måste detta betyda, att partiklar av en given storlek (diametern = 85 $\mu\mu$) förekomma i de mörka nebulosorna. En behandling av observationsdata för andra mörka moln i dessa och närgränsande himmelsregioner gav som resultat, att den funna partikelstorleken är dominerande i den mörka materien, i full överensstämmelse med tidigare undersökningar av framför allt Schalén i Uppsala.

Avhandlingen avslutas med ett studium av sjärnornas rymdtätheter samt med en metod att bestämma den allmänna absorptionskonstanten. I riktning mot stjärnbilden Cepheus synes denna konstant vara av storleksordningen 0,5 magnituder per 1 000 parsecs.

Problemavdelning.[1]

Matematiska uppgifter.

1219) *Inom en given spetsvinklig triangel ABC väljes en punkt P. Cirklar uppritas med PA, PB och PC som diametrar. När har den figur, som begränsas av dessa cirklars utanför triangeln liggande bågar, så liten yta som möjligt?* *X.*

1220) *Den i triangeln ABC inskrivna cirkeln tangerar sidorna a, b, c i resp.* A_1, B_1, C_1. *Cirkelns medelpunkt är I. Visa, att linjer dragna genom* A_1, B_1, C_1 *parallella med resp. AI, BI, CI råkas i samma punkt.* *X.*

1221) *Bestäm antalet kvadraträtter* $< N$, *vilkas första decimal är t, om för* $t = 0$ *de hela talen ej medräknas. N är ett helt, positivt tal.* *C.*

Enklare matematiska uppgifter.[2]

1222) Beräkna värdet av $y^2 + z^2 - x^2$ ur systemet

$$\left.\begin{aligned} 3x + 2y + 2z &= a \\ 2x + \ y + 2z &= b \\ 2x + 2y + \ z &= c \end{aligned}\right\}.$$

Svar: $b^2 + c^2 - a^2$.

1223) Beräkna exakta värdet av $\operatorname{tg} 12° \cdot \operatorname{tg} 24° \cdot \operatorname{tg} 48° \cdot \operatorname{tg} 96°$.

Svar: -1.

1224) Sidorna i en triangel äro proportionella mot $u^2 - uv + v^2$, $v^2 - u^2$, $2uv - v^2$, vilka antagas vara positiva tal. Visa, att en vinkel är 120°.

1225) *ABC* är en liksidig triangel, inskriven i en cirkel. AA_1, BB_1, CC_1 äro tre parallella kordor i denna cirkel. Visa, att en av dem alltid är lika lång som de båda andra tillsammans.

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. BÅGMAN, till vilken uppgifter och lösningar kunna insändas under adress: Högre allm. läroverket å Östermalm, Stockholm.

[2] Uppg. 1222—1225, 1229—1230 äro insända av *X.*, 1226 av *B. E. N.*, 1227 –1228 av *P.*, 1231 av *S. B.*

1226) I en rät cirkulär kon inskrives ett klot. Bestäm konens toppvinkel, om klotet är aritmetiska mediet till konens två övriga delar.

Svar: 81°,24 eller 13°,56.

1227) En fyrsidig pyramid i form av en halv regelbunden oktaeder och en regelbunden tetraeder ha en sidoyta gemensam. Hur stor del av tetraedern faller utom pyramiden?

Svar: 25 %.

1228) I vart och ett av tvenne horisontella plan på 3 cm inbördes avstånd har man ritat ett koordinatsystem med längdenheten 1 cm och i vilka varandra motsvarande axlar äro vända åt samma håll. Punkten (—1; 2) i det övre planet ligger lodrätt över punkten (2; 5) i det undre. Beräkna vinkeln mellan det plan, som innehåller de båda x-axlarna och det plan, som innehåller de båda y-axlarna.

Svar: 120°.

1229) Visa, att linjerna $ax + by + c = 0$, $a^3x + b^3y + c^3 = 0$, $x \cos A + y \cos B + \cos C = 0$ råkas i samma punkt, då a, b, c äro sidorna, A, B, C motstående vinklar i en triangel.

1230) Tangenten i en punkt P på kurvan $y = ax^3 + bx$ skär y-axeln i A och inflexionstangenten i B. Beräkna förhållandet $AB : BP$.

Svar: 2 : 1.

1231) Parametrarna i två konjugathyperbler skära varandra så, att produkten av den ena parameterns segment är lika med produkten av den andras segment. Angiv sambandet mellan excentriciteterna.

Svar: $e_1^2 + e_2^2 = 5$.

Lösn. till uppg. 1190—1192.

1190) *Upplös* $\frac{\sin 2x}{2} - \cos^2 v \sin x - \frac{\sin^3 v}{2}$ *i två faktorer.* X.

Vi sätta $\cos x = m$ och $\sin x = n$. Då $m^2 + n^2 - 1 = 0$, gäller det att bestämma en faktor λ så, att funktionen $\lambda(m^2 + n^2 - 1) + 2mn - 2n\cos^2 v - \sin^3 v$ sönderfaller i två faktorer. Uttrycket satt $= 0$ ger $m = \frac{1}{\lambda}(-n \pm \sqrt{n^2(1-\lambda^2) + 2\lambda n \cos^2 v + (\lambda^2 + \lambda \sin^3 v)})$. Villkoret för λ blir då $4\lambda^2 \cos^4 v = 4\lambda(1 - \lambda^2)(\lambda + \sin^3 v)$. Denna ekvation

har en rot $= -\sin v$. Uttrycket, uppdelat i faktorer, blir

$$-\frac{\sin v}{2}\left(\cos x - \frac{\sin x + \sin x \cos v - \sin v \cos v}{\sin v}\right)$$

$$\left(\cos x - \frac{\sin x - \sin x \cos v + \sin v \cos v}{\sin v}\right) \text{ eller}$$

$$\frac{1}{2\sin v}[\sin(x-v) + \sin x - \sin v \cos v]\ [\sin(x+v) - \sin x - \sin v \cos v]$$

eller $\left[\sin\left(x - \frac{v}{2}\right) - \cos v \sin\frac{v}{2}\right]\left[\cos\left(x + \frac{v}{2}\right) - \cos v \cos\frac{v}{2}\right]$. *X.*

1191) *I tetraedern ABCD är basytan ABC given. Normalen till basytan i en punkt P skär sidoytornas plan i Q_1, Q_2 och Q_3. Om $PQ_1 + PQ_2 + PQ_3$ bibehåller samma värde, hur P än väljes inom triangeln ABC eller på dess omkrets, var ligger då hörnet D?* *X.*

Normalens skärningspunkt med planet *DBC* är Q_1, pyramidens höjd *DE* är $= h$. Om *P* ligger i *E*, blir varje term i summan $= h$; dennas konstanta värde är alltså $3h$. Ligger *P* i *A*, försvinna två termer, medan $AQ_1 = 3h$. I basytan dragas linjer från *A*, *B* och *C* genom *E*; de råka motstående sidor i resp. R_1, R_2 och R_3. Likformighet ger då $R_1E : R_1A = h : 3h$ samt analoga samband. Således är t. ex. $\triangle ER_1R_2 \sim \triangle AEB$ i längdskalan 1 : 2; R_1R_2 är parallell med *AB* och $= \frac{1}{2}AB$. Alltså äro R_1, R_2 och R_3 sidornas mittpunkter och *D* ligger på basytans normal i tyngdpunkten. *B-r.*

Även löst av *Kåson.*

1192) *Genom en fix punkt på en cirkel drages en korda, som skär en fix diameter i P och periferin i Q. Bestäm maximivärdet av sträckan PQ.* *X.*

Om den fixa punkten är *A*, medelpunkten *O*, radien $= 1$, $\angle AOP = 2\alpha < 90°$, $\angle AOQ = 2x + 2\alpha$, ger sinusteoremet $PQ = \frac{\sin 2x}{\cos(x-\alpha)}$. Sättes derivatan $\frac{2\cos(x-\alpha)\cdot\cos 2x + \sin(x-\alpha)\cdot\sin 2x}{\cos^2(x-\alpha)} = 0$, erhålles $\operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg}(x-\alpha) = -2$, varav $\operatorname{tg} x = \sqrt[3]{\cot\alpha}$. Motsvarande värde på *PQ*, som enligt problemets natur är maximum, blir $\frac{2\sqrt{m^4 - m^2 + 1}}{m^2 + 1}$, om $\cot\alpha = m^3$. *S. B.*

Även löst av *B-r, E. Smn* och *L. Krogset.*

Följande vackra lösning till uppg. 1147 (se Elementa *24*, 169, 1941) har insänts av signaturen *N. J.* Förf. uppvisar, att triangeln måste vara likbent.

Om triangelns sidor äro a, b och c, vinklar α, β, γ, hörn A, B, C, deras spegelbilder A_1, B_1, C_1, omskrivna cirkelns radie R, ytan T samt den liksidiga triangelns sida k, så erhålles $k^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos 3\beta = b^2 + 2ac(\cos\beta - \cos 3\beta) = 4R^2\sin^2\beta + 4ac\sin\beta\sin 2\beta = 2R^2(1 - \cos 2\beta) + 8T\sin 2\beta$. Denna ekvation kan genom införande av hjälpvinkel skrivas $\sin(2\beta - w) = K$, där $\operatorname{tg} w = \frac{R^2}{4T}$. Den satisfieras även av α och γ samt har högst två rötter mellan 0° och 180°. Vi kunna därför antaga $a = c$. Spegla nu $\triangle CBA_1$ på CA_1, så att den övergår i CDA_1. Genom spegling på mittnormalen till CD överföres den brutna linjen B_1CDA_1 i $EDCF$. Då är $\sphericalangle B_1CD = 360° - 4\gamma = 2\beta$, $\sphericalangle B_1CF = 3\beta = \sphericalangle C_1BA_1$, varför $\triangle B_1CF \cong \triangle C_1BA_1$ och $B_1F = A_1C_1 = A_1B_1 = EF$. Således sammanfaller antingen F med A_1, d. s. v. $\beta = 60°$ eller också E med B_1, d. s. v. $2\beta = 60°$ eller 300° och $\beta = 30°$ eller 150°.

N. J.

Tidskrifter.

Populär astronomisk tidskrift, 1942: 1—2.

Ur innehållet: N. V. E. Nordenmark, Galilei dialog om de två världssystemen; K. G. Malmquist, De mörka nebulosornas avstånd och utsträckning; Å. Wallenquist, Utrechtobservatoriets nya atlas över solspektrum; Y. Öhman, Polarigrafiska undersökningar av den stora Andromedanebulosan; K. G. Malmquist, Uppsala observatoriums nya spegelteleskop; J. Ramberg, Om bestämning av radialhastigheter för ljussvaga stjärnor.

Svensk kemisk tidskrift, 1942: 2—4.

Ur innehållet: A. Fredga, Zur Frage der konfigurativen Beziehungen zwischen optisch aktiven Oxy- und Aminosäuren; S. Wideqvist, Phenylcyan-substituirte Karbonsäuren; K. Myrbäck und W. Thorsell, Mechanismus der enzymatischen Spaltung der Amylose; A. Larsson, Om bestämning av adenylsyra och adenosintrifosforsyra i blod; K. H. Gustavsson, The directing influence of the organization of proteins upon their reactivity; Karin Knutson, En granskning av Neubauers metod att bestämma kalk i saltsyreextrakt av jord. — Meddelanden från Sveriges Kemiska Industrikontor.

Teknik för alla, 1942: 7—22.

Ur innehållet: Television i naturliga färger; Omlindning och beräkning av småmotorer; Syntetiskt gummi; De största havsdjupen; De vanligaste mätverktygen; Korrosionskavitation; C. R. Nyberg, En märklig uppfinnare; Fotolaboratorium för amatören; Från Lumafabrikerna; En snabbräknare; Hangarfartygen; Kontrollanstalten för elmaterial; Emaljinläggning på

(Forts. sid. 127.)

Studentexamen och fyllnadsprövning efter studentexamen.

Mars 1942.

Matematiska uppgifter för latinlinjen.

1. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y - xy = 1, \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$$

2. En studerande, som vid början av ett år ärvde 30 000 kr, placerade hela detta belopp mot 5 % ränta. Under de tio första åren måste han vid varje års slut lyfta 3 000 kr för att bestrida kostnaderna för sin utbildning. Härtill åtgick, utom räntan för året, en del av kapitalet. Hur mycket återstod av detta efter det tionde årets slut?
3. I en kvadrat med ytan 1 dm² inskrives en annan kvadrat, vars yta är 75 cm². Beräkna de spetsiga vinklar, som de båda kvadraternas sidor bilda med varandra.
4. I en triangel är summan av två sidor 19 cm, den mellanliggande vinkeln 30° och ytan 21 cm². Beräkna triangelns sidor och övriga vinklar.
5. Två cirklar med radierna 1 cm och 2 cm tangera varandra utantill. Båda cirklarna tangera dessutom innantill en tredje cirkel, vars radie är 4 cm. Beräkna ytan av den figur, som begränsas av de mellan tangeringspunkterna liggande mindre cirkelbågarna.
6. I en regelbunden femhörning inskrives en annan regelbunden femhörning, så att den senares hörn dela den förras sidor i förhållandet 1 : 2. Beräkna förhållandet mellan de båda femhörningarnas ytor.

7. Bestäm koefficienterna a, b och c i funktionen $y = a + bx + cx^2$, så att den mot funktionen svarande kurvan går dels genom den punkt, i vilken linjerna $y = x + 1$ och $3x + y - 9 = 0$ skära varandra, dels genom de punkter, i vilka dessa linjer skära x-axeln. Upprita därefter kurvan och bestäm, med hjälp av diagrammet eller på annat sätt, koordinaterna för dess maximipunkt.
8. I en triangel är en median 9 cm och en annan 6 cm. Vinkeln mellan dessa medianer är 60°. Beräkna längden av den tredje medianen i de båda fall, som äro möjliga.

Resultat: **1.** $\begin{array}{c|c|c|c|c} x & 1 & 1 & 2 & -2 \\ \hline y & 2 & -2 & 1 & 1 \end{array}$; den första ekv. kan skrivas $(x-1)(y-1) = 0$. **2.** 11 130 kr. **3.** 80°,27 och 9°,73. **4.** Sidorna äro 6,893 cm, 7 cm och 12 cm; vinklarna äro 30°, 30°,52 och 119°,48. **5.** 1,97 cm². **6.** 1,443. **7.** Kurvans ekv. är $y = 3 + 2x - x^2$; max. i (1; 4). **8.** $\sqrt{63} = 7{,}94$ cm och $\sqrt{171} = 13{,}08$ cm.

Matematiska uppgifter för realgymnasiet.

Allmän kurs.

1. Lös ekvationen

$$\sin 4x = 4 \cos x.$$

2. En aritmetisk serie och en konvergent oändlig geometrisk serie ha samma första term. Den förra seriens differens är dubbelt så stor som den senares kvot. Tionde termen i den aritmetiska serien är lika med andra termen i den geometriska serien, och tredje termen i den förra serien är lika med den senare seriens summa. Vilka äro serierna?
3. Volymen av en sfärisk sektor är $\frac{1}{5}$ av hela sfärens volym. I sektorn inskrives en ny sfär, så att den tangerar såväl sektorns sfäriska som dess koniska yta. Hur stor del av den ursprungliga sfärens volym utgör volymen av den nya sfären?
4. Flera fysikaliska formler (t. ex. linsformeln) kunna skrivas $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$. Då två av storheterna a, b och f äro kända, kan man bestämma den återstående genom att använda ett s. k. nomogram. Detta utgöres här av en triangel AOB, där vinkeln $O = 120°$, sidan $OA = b$, sidan $OB = a$ samt längden av bissektrisen till vinkeln $O = f$. Visa, att

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}.$$

5. Punkterna A (2; 4) och B (3; -1) äro hörn i en triangel ABC. Bestäm för de möjliga fallen koordinaterna för punkten C, så att triangelns yta blir 7 ytenheter och linjen $y = 2x$ en median i triangeln.
6. AB är diameter i en cirkel med radien r. Från en punkt P på cirkeln drages normalen till tangenten i B. Normalens fotpunkt är C. Sök maximum för summan av sträckorna AP och PC.
7. Den kurva, som motsvarar ekvationen $y = ax^4 + bx^2$, där a och b äro konstanter, har ett minimum och två maxima, vilka utgöra hörn i en liksidig triangel. Bestäm tecknen för a och b, och angiv det algebraiska sambandet mellan dessa konstanter.
8. En kub och en regelbunden oktaeder genomtränga varandra på så sätt, att varje kantlinje i kuben skäres mitt itu av en av oktaederns kantlinjer, vilken själv halveras i skärningspunkten. De utanför de båda kropparnas gemensamma del belägna delarna av kuben ha tillsammans volymen v_1, medan motsvarande delar av oktaedern tillsammans ha volymen v_2. Bestäm förhållandet mellan v_1 och v_2.

Resultat: **1.** $90° + n \cdot 180°$. **2.** Den aritmetiska: 6, 5, 4 ...; den geometriska: 6, -3, $\frac{3}{2}$ ... **3.** $\frac{64}{729}$. **4.** Använd »ytteoremet» på hela triangeln och på deltrianglarna. **5.** C ligger i (-1; 5) eller (3; 13). **6.** 2,5 r; välj sträckan AP till oberoende variabel. **7.** $a < 0$, $b > 0$; $b^3 + 24a = 0$. **8.** $v_1 : v_2 = 1 : 3$.

Matematiska uppgifter för realgymnasiet.

Specialkurs.

1. Tre hörn i ett parallelltrapets $ABCD$ ligga i punkterna A (-3; 3), B (1; 5) och C (7; 3). Sök koordinaterna för det fjärde hörnet D, om AD är parallell med BC och vinkeln BCD är 135°. Beräkna även trapetsets yta.
2. En cirkel inskrives i den triangel, som bildas av båda asymptoterna och ena vertextangenten till en hyperbel. Visa, att denna cirkels radie är lika stor som det stycke av den utdragna parametern, som ligger mellan asymptoten och hyperbeln.
3. Bevisa, att ellipsen $2x^2 + y^2 = A$ och parabeln $y^2 = Bx$ skära varandra under räta vinklar, oberoende av värdena på konstanterna A och B.
4. Punkten P ligger på en ellips, vars ena brännpunkt är F. Ellipsnormalen i P skär den mindre axeln eller dess förlängning i N. Genom P drages en linje parallellt med den större

axeln. Sök orten för skärningspunkten mellan denna linje och linjen *FN*.

5. I en halvcirkel med diametern *AB* drages en korda *BP*. Om man från *P* fäller normalen *PC* mot *AB*, erhålles en triangel *BCP* och ett halvt cirkelsegment *ACP*. För vilket läge på *P* är skillnaden mellan ytan av den nämnda triangeln och ytan av det halva cirkelsegmentet så stor som möjligt?
6. Upprita kurvan $yx^3 + x^3 + 1 = 0$ i dess huvuddrag. Genom skärningspunkten mellan kurvans asymptoter drages en rät linje, som skär kurvan i två punkter *A* och *B*. Visa, att denna linje är normal till kurvan, då sträckan *AB* är så kort som möjligt.
7. En cirkel O_1 går genom brännpunkten *F* till en parabel och tangerar parabeln i en punkt P_1. En annan cirkel O_2 tangerar cirkeln O_1 i punkten *F* samt parabeln i en punkt P_2. Visa, att vinkeln P_1FP_2 alltid har samma storlek.

Resultat: 1. *D* ligger i (9; —1); ytan är 30 ytenheter. 4. De delar av linjerna $x = \pm \frac{a^2}{c}$ (styrlinjerna), som begränsas av linjerna $y = \pm b$. 5. Då *P* ligger så, att $AC : BC = 1 : 7$. 6. $AB_{\min}$ har vinkelkoeff $= -\frac{1}{\sqrt{3}}$. 7. Normalerna i P_1 och P_2 bilda de spetsiga vinklarna α_1 och α_2 med axeln; V är vertex. Då är $\sphericalangle VFP_1 = 2\alpha_1$ och $\sphericalangle VFO_1 = 3\alpha_1$ samt $\sphericalangle VFO_2 = 3\alpha_2$. Av $3\alpha_1 + 3\alpha_2 = 180°$ fås $2\alpha_1 + 2\alpha_2 = \sphericalangle P_1FP_2 = 120°$. Cirklarna antagas tangera varandra utantill.

Uppgifter i fysik.

Obs. Lösningarna till uppgifterna 1, 2, 4, 5, 6 och 8 böra åtföljas av enkla figurer. — Erforderliga konstanter, vilka ej äro uppgivna i problemens text, hämtas ur formelsamlingen.

1. En elektrisk motorvagn med två släpvagnar, den närmaste vägande 15,8 ton, den sista 13,0 ton, går med konstant hastighet uppför en stigning av 1 : 50. Friktionsmotstånden kunna för varje vagn uppskattas till 0,005 av vagnens tyngd. Beräkna dragspänningen i de båda vagnskopplingarna.
2. Två likadana stålkulor upphängdes i jämnhöjd i två lika långa otänjbara trådar. Avståndet mellan trådarnas fästpunkter var lika med en kuldiameter. Kulorna fördes från varandra, så att vardera tråden bildade vinkeln 20°,0 med lodlinjen; trådarna befunno sig därvid alltjämt i samma vertikalplan, och kulornas

medelpunkter lågo i resp. upphängningstrådars förlängning. Därpå släpptes kulorna, samtidigt och utan begynnelsehastighet. De studsade då mot varandra och slogo åter i sär. Utslagsvinkeln från lodlinjen steg nu blott till 18°,8. Sök förhållandet mellan kulornas hastigheter omedelbart efter och omedelbart före stöten.

3. Man har funnit, att en normal råggröda under tiden för den hastigaste tillväxten förökar sin torrsubstans med omkring 0,9 ton per hektar och vecka. Torrsubstansens kolhalt är 42 %. Denna kolkvantitet upptages av grödan vid kolsyreassimilationen på bekostnad av koldioxid, som delvis hämtas från luften och delvis alstras av lägre organismer i myllan. Om hela den behövliga mängden CO_2 hämtades ur luften, skulle den förbrukade koldioxiden motsvara en påfallande stor volym atmosfärisk luft. Beräkna den volym atmosfärisk luft av 15° C och 760 mm, som innehåller så mycket CO_2, som enligt ovanstående uppgifter per dygn förbrukas av 1 hektar gröda. Atmosfärisk luft innehåller 0,03 volymsprocent CO_2. Vid 0° C och 760 mm väger 1 m^3 CO_2 1,98 kg. 44 g CO_2 innehåller 12 g kol.
4. Ett smalt strålknippe infaller under 70° infallsvinkel mot en planparallell glasskiva av tjockleken 15 mm. En del av knippet reflekteras mot glasskivans framsida. En annan del reflekteras mot baksidan och lämnar glasskivan efter brytning i den främre ytan i en riktning, som är parallell med det förstnämnda reflekterade delknippet. Beräkna avståndet mellan de båda reflekterade strålknippena.
5. Man önskar avläsa en termometer, som är placerad så, att ögat eller det instrument, varmed avläsningen göres, måste hållas på 120 cm avstånd från termometerskalan. För att kunna avläsa med större noggrannhet begagnar man en s. k. distanslupp, som egentligen är en enkelrörs prismakikare, framför vars objektivlins man kan fästa en försatslins av lämplig styrka. Prismakikarens objektiv har styrkan 3,0 dioptrier, och kikaren ger 8,0 gångers förstoring, om den utan försatslins användes för att på vanligt sätt iakttaga mycket avlägsna föremål. Om vid termometeravläsningen en försatslins av styrkan 1,0 dioptrier användes, måste okularet förskjutas ett stycke, för att avläsaren, som förlägger bilden på oändligt avstånd, skall se en tydlig bild av skalan. Huru stor blir då förstoringen? Prismakikaren kan ritas som en Keplerkikare.
6. Fyra motstånd, $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 20\ \Omega$, $R_3 = 40\ \Omega$ och $R_4 = 80\ \Omega$, äro på vanligt sätt jämte galvanometer och ackumulator sammankopplade till en Wheatstones brygga. Galvanometerns mot-

stånd R_5 är 20 Ω, medan ledningstrådarnas motstånd kunna lämnas utan avseende. Motstånden R_1 och R_3 äro anslutna till samma pol på ackumulatorn och motstånden R_1 och R_2 till samma klämskruv på galvanometern. I vilket av de fem motstånden R_1 t. o. m. R_5 är värmeutvecklingen störst?

7. Ett ackumulatorbatteri med polspänningen 12 volt och kapaciteten 40 ampèretimmar är genom praktiskt taget motståndslösa ledningar anslutet till en liten motor, som avger en konstant effekt av $^1/_{20}$ hästkraft. Huru många timmar kan motorn hållas i gång för varje uppladdning av batteriet? Motorns verkningsgrad är 92 %.
8. Vid bestämning av elektromotoriska kraften hos ett termoelement användes följande kompensationsanordning. Strömmen från ett batteri leddes genom ett skjutmotstånd, en milliampèremeter och en grenad ledning AB tillbaka till batteriet. Den ena grenen ACB bestod av ett motstånd C på 1,00 ohm. Den andra grenen ADB utgjordes av motståndet AD på 98,9 ohm och precisionsmotståndet DB på 0,1 ohm. Termoelementet var inkopplat mellan D och den ena klämskruven på en galvanometer, vars andra klämskruv var förbunden med B. Termoelementets ena lödställe var nedsänkt i smältande is och det andra i ett oljebad, vars temperatur kunde ändras. För varje given temperaturskillnad mellan lödställena kunde man genom lämplig inställning av skjutmotståndet uppnå, att galvanometern blev strömlös. Man avläste då strömstyrkan på milliampèremetern och beräknade sedan därav den mot nämnda temperaturskillnad svarande elektromotoriska kraften. Följande avläsningar gjordes på oljebadets termometer resp. milliampèremetern:

Temp. i badet (grader C)	20	40	60	80	100	120	140
Strömstyrka (milliamp.)	35,0	61,2	78,6	87,2	87,0	78,0	60,2

Angiv den mot var och en av dessa temperaturdifferenser svarande elektromotoriska kraften i mikrovolt och upprita en kurva, som åskådliggör sambandet mella temperaturdifferens och elektromotorisk kraft. 1 mikrovolt $= 10^{-6}$ V.

Resultat: **1.** 325 och 720 kgf. **2.** 0,94. **3.** 352 000 m³. **4.** 8,2 mm. **5.** Förstoringen blir 7,6 (Försatslinsen måste vara positiv. En negativ försatslins skulle kräva större förlängning av kikaren än som är tänkbar). **6.** I motståndet R_2. **7.** 12 tim. **8.** Den mot varje temperaturskillnad svarande emk (i mikrovolt) uttryckes genom samma tal som den angivna strömstyrkan (i milliamp.).

Realexamen V. T. 1942.

Provräkning.

1. Lös ekvationen

$$4\tfrac{1}{6}(8x + 0{,}6) - 1\tfrac{7}{8}(10x + 1{,}8) = 2\tfrac{1}{1}\tfrac{1}{2}(4x - 0{,}2).$$

2. I ett hushåll förbrukades under en månad 4,5 kg av en viss vara. Priset var då 2,80 kr/kg. Sedan steg varans pris med 20 %, varför husmodern beslöt att minska förbrukningen, så att utgiften för varan under samma tid som förut skulle bli oförändrad. Med hur många procent måste förbrukningen då minskas?
3. Hur många varv gör ett hjul på en sträcka av 1 km, om hjulets diameter är 27 engelska tum? 1 engelsk tum $= {}^{1}/_{36}$ yard. 1 yard $= 0{,}91$ m. $\pi = 3\frac{1}{7}$.
4. En person innehade den 15 juli 1941 15 st 3 % försvarslåneobligationer à 100 kr, vilka han inköpt till parikurs och på vilka han redan tidigare erhållit räntan t. o. m. den 15 juli. Vid vinstutlottning i slutet av juli erhöll han en vinst av 100 kr på en av obligationerna. Vid utbetalningen avdrogs 10 % i skatt. Den 15 januari 1942 lyfte han halvårsräntan på samtliga obligationer. Hur många procents årlig ränta kan han anses ha erhållit för halvåret ${}^{15}/_{7}$ 1941—${}^{15}/_{1}$ 1942 på det kapital, som han placerat i obligationerna, om samtliga inkomster på dessa under detta halvår räknas som ränteavkastning?
5. Följande tabell utgör ett utdrag ur en tågtidtabell för en järnväg med dubbelspår, där möte mellan tåg alltså kan ske under gång.

P 3	Km	Wadköping—Österås järnväg	P 10
11.23	0	fr. Wadköping ..... t.	12.26
↓		↑	↑
12.33	70	t. Österås ..... fr.	11.30

Bestäm den tidpunkt, då de båda tågen P 3 och P 10 kunna beräknas möta varandra.

6. Från en otät vattenledningskran falla klotformiga vattendroppar av 5 mm diameter ned i ett förut tomt cylindriskt kärl med 9 cm höjd och 2 dm bottendiameter (invändiga mått). På 1 min falla 36 droppar. Hur länge dröjer det, innan kärlet blir fyllt?
7. Två cirklar med radierna 2 cm och 5 cm tangera en vinkels båda ben. Den mindre cirkelns medelpunkt ligger 7 cm från vinkelspetsen. Ännu en linje, som tangerar båda cirklarna, drages. Hur långt från vinkelspetsen skär denna linje vinkelns bissektris?

8. I en rätvinklig triangel ABC är hypotenusan AB 28 cm och en vinkel 30°. Kateterna AC och BC tagas till diametrar för cirklar. Beräkna storleken av den yta, som ligger inom båda cirklarna. $\pi = 3\frac{1}{7}$.

Resultat: **1.** $x = 0{,}1$. **2.** $16\frac{2}{3}$ %. **3.** 466 varv. **4.** 15 %. **5.** Kl 11.58. **6.** 20 tim. **7.** 10 cm. **8.** 43,46 cm².

Uppgifter i fysik för tekniska linjen.

1. Ett preparatrör, som väger 10,2 g, innehåller så mycket blyhagel, att det kan flyta lodrätt i denaturerad sprit. Röret kan anses som ett cylindriskt glasrör med plan botten; dess längd är 12,0 cm och dess yttre genomskärningsyta 1,75 cm². Man släpper ned mer hagel, varvid röret sjunker djupare, och fortsätter därmed, tills rörets mynning kommer i själva vätskeytan. Man finner då, att det innehåller sammanlagt 42 hagel. Varje hagel väger 0,165 g. Beräkna specifika vikten för denaturerad sprit.
2. En kraftledningsstolpe består av en 8 m hög lodrät stolpe och ovanpå denna ett 6 m långt vågrätt tvärstycke, vars tyngdpunkt vilar på den lodräta stolpen. På den ena av de vågräta armarna äro två kraftledningar upphängda, den ena på 1 m och den andra på 3 m avstånd från mitten, den förra utgörande en vertikal belastning på 400 kgf och den andra en på 200 kgf. Stolpen vilar på ett i jämnhöjd med marken liggande bultlager. För att hindra den att tippa över till följd av belastningen har man spänt en lina från den tomma armens yttersta punkt, alltså från en punkt, som ligger 3 m från stolpens mittlinje och 8 m över den horisontella marken, till en punkt på marken på avståndet 11 m från stolpens fotpunkt. Linan och stolpens båda delar ligga i samma plan. Beräkna spänningen i linan.
3. Från en vattenledningskran falla två droppar tätt efter varandra. Då den första droppen fallit 5 cm, börjar den andra falla. Huru stort är avståndet mellan dropparna, då den första hunnit falla 45 cm? Accelerationen vid fritt fall kan sättas lika med 10 m/sek².
4. En starkväggig glaskolv av 250 cm³ volym är försedd med en propp, varigenom det går ett kranrör. Då kranen är öppen och kolven således innehåller luft av samma tryck som den yttre luften (740 mm kvicksilver), befinnes kolven väga 90,48 g. Luften utpumpas därpå med en pump, varmed man kan komma ned till ett tryck av 75 mm kvicksilver, och därefter stänges kranen. Kolven befinnes nu väga 90,22 g. Huru mycket väger 1 liter luft vid 760 mm tryck och den rådande temperaturen?

5. En del av en snöyta beströddes med sot. Efter en vecka med stark sol hade snön nätt och jämnt smält bort inom det sotade området, men runt omkring, där snön var ren, låg det kvar ett snötäcke av 12 cm djup. Snöns specifika vikt var 0,45. Hur mycket större värmemängd hade 1 m² av snötäcket på det sotbelagda stället upptagit än 1 m² av den icke sotbelagda snön? Då snötäcket mättes, var snön fri från smältvatten och hade temperaturen 0° C. Smältvärmet för snö är 80.
6. För att kontrollera en kilowatt-timmätare, uppsatt i en lägenhet, inkopplas i en av lägenhetens elektriska kontakter en värmeapparat och i serie med denna en ampèremeter. Parallellt med värmeapparaten kopplas en voltmeter. När strömmen slutes, sätter sig kilowattimräknaren i gång och man ser att en skiva i mätaren roterar. Under försöket gör skivan 10 varv på 3 minuter och 20 sekunder. På instrumenten avläser man 3,2 A och 125 V. Hur många varv bör skivan rotera för att mätaren skall registrera 1 kWh? Vid beräkningen tages ingen hänsyn till energiförbrukningen i mätinstrumenten.
7. I en skola vill man för ett fysikaliskt försök taga ström från belysningsnätet, vars spänning är 120 volt. Den apparat man arbetar med har ett motstånd av 10 ohm, och strömstyrkan bör vara omkring 2 ampère. Då man inte har någon kopplingstavla, använder man som förkopplingsmotstånd ett lampmotstånd, bestående av ett antal parallellkopplade glödlampor. Varje lampa tager 50 watt vid en spänning av 120 volt. Huru många lampor böra tändas, för att strömstyrkan i apparaten skall bliva så nära 2 ampère som möjligt? Vid beräkningen antager man, att motståndet i en lampa är konstant.
8. En shuntmotor för 220 V polspänning förbrukar vid full belastning 8,4 kW. Verkningsgraden är 87 %. Huru många procent av den totala effektförlusten i motorn orsakas av värmeutvecklingen i magnet- och ankarlindningen? Den förras motstånd är 104 ohm och den senares 0,15 ohm.

Resultat: **1.** 0,82. **2.** 129 kgf. **3.** 25 cm. **4.** 1,189 g. **5.** 4 320 kcal. **6.** 450 varv. **7.** 6 lampor, varvid strömstyrkan blir 2,07 A. **8.** 61 %.

Uppgifter i beskrivande maskin- och byggnadslära för tekniska linjen.[1]

1. En bult, utsatt för dragning, är beräknad att ogängad uppbära en last av 1 ton. Hur stor last kan bulten uppbära, om den

[1] För betyget godkänd fordras nöjaktig behandling av minst 3 exempel.

gängas med närmaste standardgänga? Tillåten dragpåkänning = 350 kgf/cm².

2. Järnet i en kortlänkad, handsmidd kätting har en tjocklek av 15,5 mm. Hur stor last kan lyftas a) med en enkel part av kättingen? b) med dubbla parter, som äro parallella? c) med dubbla parter som bilda 90° och d) 120° vinkel med varandra? Tillåten dragpåkänning = 530 kgf/cm².
3. Beskriv ett par olika system för tillförsel av bensin från bensintanken till förgasaren i en automobil. Rita schematiska skisser och utsätt förklarande beteckningar på dem!
4. Spindeln till en borrmaskin matas mot arbetsstycket med en kuggstång, driven av ett kugghjul med 14 kuggar. Hjulets kuggar skola fräsas ur ett ämne, svarvat till 40 mm diameter. Beräkna modul och delningsdiameter. Hur långt matas borrspindeln, då kugghjulet vrides ett varv? Skissera och måttsätt hjulet (skala 2 : 1). Hjulet är uppkilat på en axel med 15 mm diameter och förses med kilspår av standardutförande. Kuggbredden = 22 mm.
5. Ett handdrivet vindspel till en stenkran har två vevar med 400 mm radie, en lintrumma med 200 mm diameter samt en enkel kugghjulsutväxling, där drevet har 12 kuggar och hjulet 60 kuggar. Spelets totala verkningsgrad antages vara 70 %. Hur stor last förmår spelet lyfta med en handkraft i vardera veven om 15 kgf?
6. Vid ett prov med en gengasdriven bilmotor uppmättes genom uppbromsning axeleffekten till 25 hk. Vedgasgeneratorn förbrukade 23,3 kg björkved per timme och avgav därvid till motorn 52 m³ gas per timme. Beräkna gasgeneratorns och motorns verkningsgrader. Värmevärdet för björkveden var 3 400 kcal/kg och för gengasen 1 200 kcal/m³.
7. En cylindrisk behållare, som väger 1 ton, skall rullas från landsvägen över landsvägsdiket och in i ett bygge. För ändamålet skall läggas *två* fyrkantiga bjälkar av trä över diket som underlag. Spännvidden anslås vid undersökning på platsen till 3 meter. Föreslå lämplig dimension för bjälkarna om tillåtna böjningsspänningen antages till 80 kgf/cm²!
8. På en konstruktionsritning finnes angiven en 3 m hög, cylindrisk betongpelare med 30 cm diameter. För att minska kostnaderna för formsättningen önskar man ersätta denna pelare med en kvadratisk. Hur stor blir kantlängden? Hur stor belastning kan pelaren med 4-faldig säkerhet uppbära, om elasticitetsmodulen = 150 000 kgf/cm²?

9. I en kemisk fabrik drives en långsamtgående, roterande blandningsmaskin med rem från en transmission i taket. Denna taktransmission skall i sin tur drivas med remledning från en på golvet placerad elektrisk motor, som gör 3 000 varv/min. Då blandningsmaskinen endast får gå med 16 varv/min., måste den elektriska motorn först kopplas till skruven på en skruvväxel och motorns remskiva flyttas till skruvhjulets axel. Skruven på växeln måste ha tre ingångar för verkningsgradens skull. Föreslå kuggantal för skruvhjulet samt diametrar för de fyra remskivorna: en på skruvhjulets axel, två i taktransmissionen och en på blandaremaskinen. Skruvväxelns utväxling kan väljas 1 : 30. De båda remutväxlingarna kunna utföras lika stora och minsta remskivediametern sättes till 200 mm.

Resultat: 1. 686 kg. 2. a) 2 000 kg, b) 4 000 kg, c) 2 830 kg, d) 2 000 kg. 4. a) 2,5 mm, b) 110 mm. 5. 420 kg. 6. a) 0,788, b) 0,253. 7. T. ex. 14 × 14 cm. 8. a) 26,3 cm, b) 164 ton (under förutsättning av tillräcklig tryckhållfasthet). 9. a) 90 st kuggar, b) I ordning från skruvväxeln t. ex. 200/500/320/800 mm.

(Forts. från sid. 116.)

metaller; Ljusne, ett modernt bruk med gamla anor; Ljudisolering. Under rubriken »Händigt folk» finner man ett stort antal intressanta notiser.

ERA, 1942: 2—5.

Ur innehållet: Spektralanalys i praktiken; Pumpdrivna värmeledningar; Elförsörjning i krig och kris; Fryskonservering; Ett besök i Försvarsväsendets Kemiska Anstalt; Dagens kraftfrågor; Elektrisk torvtäkt. Elnyheter.

Nordisk Astronomisk Tidsskrift, København 1942: 2.

Ur innehållet: E. Strömgren, Finsk Astronomi; E. Strömgren, Fra Linsernes og Linsesystemernes Historie; J. P. Møller, Kometerne; A. V. Nielsen, Solplethyppigheden; E. Strömgren, Tillsyneladene og absolut Størrelse; O. Hesselberg, Radiosignalerne.

Fysisk Tidsskrift, København 1942: 1—2.

Ur innehållet: J. K. Bøggild, Om Taagekammaret og den kosmiske Straaling; E. Krüger, Fremstilling af store Enkrystaller af Alkalihalogeniderne og deres Anvendelse til optiske Undersøgelser; J. Koch, Neutronens magnetiske Moment; Danske Eksamensopgaver.

Naturen, Bergen 1942: 1—5.

Ur innehållet: S. Einbu, Stutt oversyn over solsystemet; H. Hvidsten, Cellulosen som fôrmiddel; J. Molland, Blodsukkerets regulering; B. Helland-Hansen, Professor Vilhelm Bjerknes 80 år; H. Mosby, Temperaturvekslinger i Nordatlanteren; A. Bang-Andersen, Klimatiske vilkår i Keltertiden.

Föredrag under våren 1942 inom svenska matematiska, fysiska och kemiska föreningar.

Lund:

Matematiska Sällskapet, ordf. prof. M. Riesz, sekr. fil. mag. H. Björk.

Föredrag: docent Å. Pleijel, Om det isoperimetriska problemet ($^{12}/_{2}$); prof. N. Zeilon, Stereometrisk åskådning ($^{23}/_{4}$).

Kemiska Föreningen, ordf. prof. L. Smith, sekr. fil. lic. Ido Leden.

Föredrag: prof. K. Linderström-Lang, Nyere ægghvideundersøgelser paa Carlsberg Laboratoriet ($^{23}/_{1}$); civiling. T. Nordenskjöld, Om chokladframställning, en kemisk-teknisk orientering ($^{27}/_{2}$); laborator E. Schjånberg, Den svenska skifferoljan ($^{10}/_{4}$); prof. L. Smith, Elektron och valens ($^{8}/_{5}$). — Föreningen var dessutom inbjuden till Skånska Ingenjörsklubbens sammanträde ($^{6}/_{2}$) med föredrag av prof. A. Tiselius, Uppsala, om Kemisk analys genom adsorption.

Stockholm:

Matematiska Sällskapet, ordf. prof. F. Carlson, sekr. fil. lic. S. Danielson.

Föredrag: docent H. Wold, Om oändliga, icke negativt definita Hermiteska matriser samt motsvarande lineära ekvationssystem ($^{24}/_{4}$); prof. P. Myrberg, Helsingfors, Om analytiska funktioner på 2-bladiga Riemannska ytor ($^{11}/_{5}$).

Fysiska Sällskapet, ordf. prof. E. Holm, sekr. fil. lic. E. Lindholm.

Föredrag: prof. C. Benedicks, Om meteorjärn och invar ur teoretisk synpunkt ($^{9}/_{2}$); laborator S. Benner, Om elektronmikroskop ($^{23}/_{2}$); civiling. T. Eeg-Olofsson, Elastisk efterverkan i fina trådar och tunna band ($^{23}/_{3}$); byrådirektör J. W. Sandström, Modern arktisk forskning ($^{13}/_{4}$); fil. dr E. Elvegård, Dagsljusets styrka och spektrala sammansättning ($^{11}/_{5}$). —

Sällskapet har dessutom bevistat sammanträde i Tekniska Fysikers Förening med föredrag av prof. H. Alfvén om Gasurladdningar vid mycket höga frekvenser ($^{4}/_{3}$) och i Svenska Geofysiska Föreningen med föredrag av bergsing. A. Nordström om Lokala jordmagnetiska anomalier ($^{27}/_{4}$).

Svenska Fysikersamfundet, ordf. prof. A. E. Lindh, sekr. fil. dr fru Anna Beckman.

Årsmöte $^{27}/_{2}$ å Flygtekniska Anstalten, som besågs under ledning av av prof. I. Malmer.

Kemiska Sällskapet, ordf. prof. H. v. Euler, sekr. doc. L.-G. Sillén.

Föredrag: prof. K. Linderström-Lang, Volumenkontraktionen ved enzymatisk nedbrytning av proteinstoffer ($^{30}/_{1}$); Diskussion om »Akademisk kemiundervisning», inledare docent L.-G. Sillén ($^{17}/_{4}$).

Uppsala:

Matematiska Föreningen, ordf. doc. S. Täcklind, sekr. fil. lic. B. Kjellberg.

Fysiska Sällskapet, ordf. doc. B. Edlén, v. ordf. doc. S. v. Friesen.

Föredrag: docent B. Edlén, Spektrum av dubbelt joniserat järn ($^{30}/_{1}$); prof. A. Esau, Die Physikalisch-Technische Reichsanstalt ($^{10}/_{2}$); prof. H. Alfvén, Om planetsystemets ursprung ($^{11}/_{2}$).

Kemiska Sällskapet, ordf. prof. A. Fredga, sekr. docent I. Hedlund.

Föredrag: prof. dr K. Maurer, Neuere Fragen der Kunststoff-Chemie ($^{3}/_{2}$); prof. J. A. Hedvall, Kemisk aktivitet och reaktionsmekanism hos fasta ämnen, med tekniska tillämpningar ($^{26}/_{2}$).

Några formler för en fyrsidings yta.

Av NILS JURINGIUS.

Då vi här påminna om diverse satser, av vilka många äro kända liksom även en del av de anförda bevisen, göra vi följande vedertagna överenskommelser. Med en plan n-hörning menas n punkter i ett plan, med en plan n-siding n linjer i ett plan. Med en cirkel-n-hörning menas n punkter på en cirkel, med en cirkel-n-siding n tangenter till en cirkel. Till skillnad från denna fullständiga n-hörning och n-siding kan man som vanligt definiera n-siding synonymt med n-hörning, om de n linjerna, resp. punkterna tagas i en viss ordning. I denna mening kunna vi även tala om en »skev» n-hörning, alltså en n-hörning i rymden. Äro konsekutiva linjer icke parallella, kan en n-siding endast beskrivas i två riktningar. I denna mening kan man tala om en n-sidings yta, vilken helt allmänt definieras som $\int \frac{1}{2} r^2 dv$ längs polygonen, där r är radius vector och v polarvinkeln. Ytan är positiv eller negativ, alltefter-som polygonen vid integrationen beskrives i ena eller andra riktningen. För en »enkel» plan n-siding, en n-siding utan multipelpunkter, är ytan positiv, om integrationen tages motsols. Om polen ligger utanför polygonen eller om polygonen har multipelpunkter, skola vi göra följande överenskommelser:

A) En sida räknas negativ, om radius vector vrides i negativ led, när dess ändpunkt beskriver sidan i polygonens positiva omloppsriktning, om således polen ligger till höger om sidan.

Om polen ligger inom en konkav vinkel u och vinkeln mellan normalerna från polen till vinkelbenen är v, gäller likheten $u = 180° - v$. Vi generalisera nu detta på följande sätt:

B) Om vinkeln mellan normalerna N_1 och N_2 från polen till sidorna a_1 och a_2 är v, varvid v räknas negativ, när vridningen från N_1 till N_2 går i negativ led, så är vinkeln mellan sidorna $= 180° - v$.

Om således u är en vinkel i månghörningen och polen förlägges till höger om endast det ena vinkelbenet, utbyta vi u mot $180° + u$, men om polen ligger till höger om båda vinkelbenen, bibehålla vi u. I det följande skola vi lägga märke till, att de formler, från vilka vi utgå vid bevisen, även gälla för denna gene-

ralisering av sidor och vinklar. I förbigående må nämnas, att detta betraktelsesätt visar, att med i triangelgeometrien vanliga beteckningar formeln

$$T = (p - a)^2 \operatorname{tg} \alpha \cot \beta \cot \gamma$$

icke innebär något nytt i förhållande till formeln

$$T = p^2 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma .$$

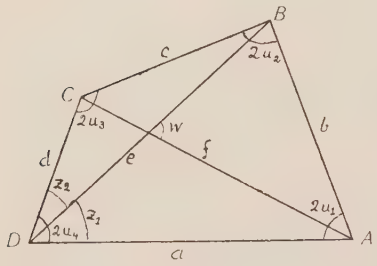


Fig. 1.

Vi skola nu härleda några formler för en godtycklig fyrhörnings yta F. Beteckningar på sidor och vinklar synas av fig. 1. Vidare införas beteckningarna:

$$p = \tfrac{1}{2}(a + b + c + d),$$
$$v_1 = u_1 + u_3 .$$
$$q = \tfrac{1}{2}(a - b + c - d),$$
$$v_2 = u_2 + u_4 .$$

Då erhålles

$$ab \sin 2u_1 + cd \sin 2u_3 = 2F.$$

Tillämpas cosinussatsen på $\triangle ABD$ och $\triangle CBD$, erhålles

$$ab \cos 2u_1 - cd \cos 2u_3 = \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2 - d^2).$$

Kvadreras och adderas, erhålles

$$a^2b^2 + c^2d^2 - 2abcd \cos 2v_1 = 4F^2 + \tfrac{1}{4}(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2,$$

varav

$$F^2 = R - abcd \cos^2 v_1,$$

där

$$R = \left(\frac{ab + cd}{2}\right)^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{4}\right)^2 = (p - a)(p - b)(p - c)(p - d); \quad (1)$$

$$\therefore F^2 = (p - a)(p - b)(p - c)(p - d) - abcd \cos^2 v_1 . \quad (2)$$

Som specialfall erhålles formeln för cirkelfyrhörningen:

$$F^2 = (p - a)(p - b)(p - c)(p - d).$$

Vi observera, att vi utgått från formlerna

$$T = \tfrac{1}{2} ab \sin 2u_1 \text{ och } e^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos 2u_1$$

och att dessa formler gälla även under förutsättningarna A) och B). Ligger således polen på yttersidan av d men på innersidan av c, byter d tecken, och $2u_3$ utbytes mot $180° + 2u_3$. Ligger polen på

yttersidan av både c och d, byta både c och d tecken, och $2u_3$ bibehålles. Vi äga därför rätt att utbyta d mot $-d$, om vi samtidigt ersätta $2u_3$ med $180° + 2u_3$ och således v_1 med $90° + v_1$. I stället för (1) erhålles då

$$R = (p-d-a)(p-d-b)(p-d-c)(p-d+d) =$$
$$= pq(p-a-d)(p-c-d);$$
$$\therefore F^2 = pq(p-a-d)(p-c-d) + abcd\sin^2 v_1. \quad (3)$$

Liksom (2) som specialfall gav formeln för cirkelfyrhörningen, ger (3) som specialfall en formel för cirkelfyrsidingen. För denna är $q = 0$, och man får

$$F = \sqrt{abcd}\cdot\sin v_1.$$

Av (2) och (3) erhålles

$$F^2 = F^2\sin^2 v_1 + F^2\cos^2 v_1 =$$
$$= (p-a)(p-b)(p-c)(p-d)\sin^2 v_1 + pq(p-a-d)(p-c-d)\cos^2 v_1.$$

Eftersom sidorna ingå symmetriskt i sista ledet i (1), kan man redan i föregående led låta b och c byta plats och får då

$$F^2 = \left(\frac{ac+bd}{2}\right)^2 - \left(\frac{a^2+c^2-b^2-d^2}{4}\right)^2 - abcd\cos^2 v_1. \quad (4)$$

Å andra sidan är

$$4F^2 = (ef)^2\sin^2 w. \quad (5)$$

Tillämpas cosinussatsen på trianglarna ABD och BCD, erhålles

$$b^2 = a^2 + e^2 - 2ae\cos z_1,$$
$$c^2 = d^2 + e^2 - 2de\cos z_2;$$
$$\therefore \tfrac{1}{2}(a^2+c^2-b^2-d^2) = e(a\cos z_1 - d\cos z_2) = ef\cos w. \quad (6)$$

Den sista likheten erhålles genom projektion på BD av sidorna i $\triangle ACD$. Av (4), (5) och (6) erhålles

$$(ef)^2 = (ac+bd)^2 - 4abcd\cos^2 v_1,$$

som för en cirkelfyrhörning ger Ptolemeiska satsen.

Av (5) och (6) erhålles ännu en formel för fyrhörningens yta:

$$F = \frac{a^2+c^2-b^2-d^2}{4}\cdot\operatorname{tg} w.$$

Den blir illusorisk, om diagonalerna äro vinkelräta mot varandra.

För en cirkelfyrsiding är

$$a + c = b + d, \quad (7)$$
$$p = r\sum\cot u_i. \quad (8)$$

Vi införa beteckningarna

$$S_t = \sum \operatorname{tg} u_i, \quad S_c = \sum \cot u_i,$$
$$S_{ef} = \cot u_e + \cot u_f - \operatorname{tg} u_g - \operatorname{tg} u_h,$$

där (e, f, g, h) är en permutation av talen (1, 2, 3, 4). Med användning av (8) erhålles då

$$F - pr = \frac{p^2}{S_c}.$$

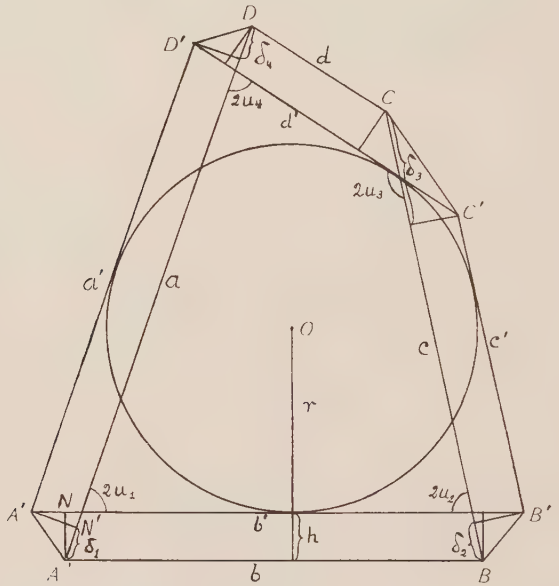


Fig. 2.

Generellt skall visas, att för en godtycklig fyrsiding är

$$F = \frac{p^2}{S_c} - \frac{q^2}{S_t} = \tag{9}$$

$$= \frac{(a+b-c-d)^2}{4S_{13}} + \frac{(a-b-c+d)^2}{4S_{24}} = \tag{9a}$$

$$\frac{(a+b+c-d)^2}{4S_{12}} + \frac{(a-b+c+d)^2}{4S_{34}}. \tag{9b}$$

Drag bissektriserna till vinkeln mellan AB och DC och vinkeln mellan BC och AD. Deras skärningspunkt är O. Antag avståndet från O vara $r+h$ till AB och CD och $r-h$ till BC och AD. Upp-

rita en cirkel med O till medelpunkt och r till radie. Omskriv kring cirkeln en fyrsiding $A'B'C'D'$, vars sidor äro parallella med sidorna i $ABCD$; deras längder vare a', b', c', d'. Då bli avstånden mellan de parallella sidorna $= h$. Drag AA' samt höjderna AN och $A'N'$. Då blir

$$AN' = A'N = h \operatorname{tg} u_1 = \delta_1 .$$

Motsvarande sträckor vid hörnen B, C och D betecknas med δ_2, δ_3 och δ_4. Om $\delta = \Sigma \delta_i$, erhålles

$$\begin{aligned} a + c - (a' + c') &= \delta , \\ b' + d' - (b + d) &= \delta , \end{aligned} \tag{10}$$

och genom subtraktion, resp. addition

$$p = p', \quad q = \delta = h \cdot S_t ,$$

eftersom $q' = 0$. Om ytorna av $AA'D'D$ och motsvarande parallelltrapets vid de övriga sidorna äro P_i, blir

$$\begin{aligned} F &= F' - (P_1 + P_3) + (P_2 + P_4) = \\ &= F' - \frac{h}{2}\left[a + a' + c + c' - (b + b' + d + d')\right] = \\ &= F' - hq = \frac{p^2}{S_c} - \frac{q^2}{S_t} . \end{aligned}$$

Uttrycken (9 a) och (9 b) erhållas ur (9), om man tänker sig polen utanför fyrhörningen och tillämpar villkoren A) och B). Man får (9 a), om polen förlägges »till höger» om både c och d, varvid u_3 blir oförändrad, men u_2 och u_4 utbytas mot $u_2 + 90°$ och $u_4 + 90°$. Och (9 b) erhålles, om polen förlägges till höger endast om d, varvid u_3 och u_4 utbytas mot $u_3 + 90°$ och $u_4 + 90°$. Formel (9 a) kommer speciellt till användning vid en cirkelfyrsiding med en konvex vinkel; den andra termen blir då $= 0$.

Formeln (2) för en fyrhörnings yta visar, att av alla fyrhörningar med givna sidor är cirkelfyrhörningen störst. Härav följer, att av alla n-hörningar med givna sidor cirkel-n-hörningen är störst. Ty antag, att en n-hörning har fyra hörn, som ej ligga på samma cirkel. Då kan den av dessa hörn bildade fyrhörningen förstoras genom att med bibehållande av sidornas längder omvandlas till en cirkelfyrhörning. De hörn i n-hörningen, som eventuellt ligga mellan två hörn i fyrhörningen, skola härvid tänkas fast förbundna med dessa båda hörn, varigenom motsvarande yta förblir oförändrad. Att verkligen den övre gränsen för ytan uppnås, inses av att n-hörningens yta är en kontinuerlig funktion av $n - 3$ av dess vinklar, vilka kunna tänkas variera på var sin cirkel, alltså inom en sluten punktmängd.

Formeln (9) för en fyrsidings yta visar, att av alla fyrsidingar med givna vinklar och given omkrets den cirkelomskrivna fyrsidingen är störst, om alla vinklar äro konkava, men minst, om en vinkel är konvex, ty överenskommelsen rörande en ytas tecken, tillämpad på en cirkelfyrsiding, visar, att S_c alltid är positivt, $S_t = \Sigma \cot (90° - u_i)$ blott i senare fallet negativt.

Ur det föregående kan man härleda, att av alla konvexa n-sidingar med givna vinklar och given omkrets den cirkelomskrivna n-sidingen är störst. Jag vet icke, om icke möjligen enklare härledningar äro publicerade än den här nedan givna.

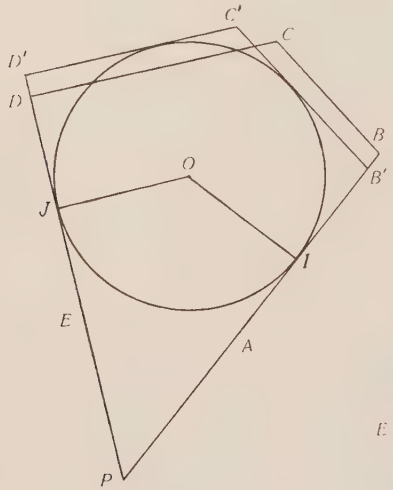


Fig. 3.

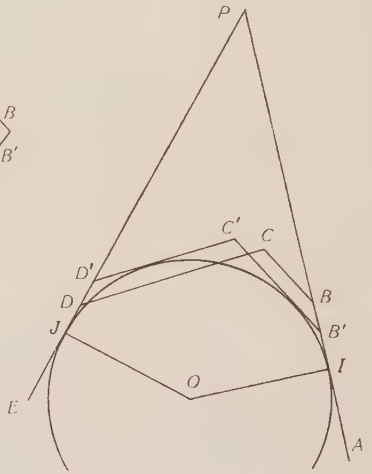


Fig. 4.

Låt *ABCDE* vara en bruten linje, där alla vinklarna mellan angränsande räta linjer äro konkava och som beskrives i positiv led. Antag vidare, att det ej finnes någon cirkel, som tangerar alla fyra linjerna. Antag, att *BA* och *DE* ej äro parallella, och drag ut dem, tills de råkas i *P*. Tag en punkt *O* på vinkeln *APE*:s bissektris till medelpunkt för en cirkel, som tangerar *AB* och *DE*. Beteckna halva vinklarna *DPB*, *ABC*, *BCD*, *CDE* med u_1, u_2, u_3, u_4. Den förstnämnda vinkeln betraktas som konkav eller konvex alltefter som *P* och *A* ligga på samma sida eller på motsatta sidor om *B*. Drag normalerna *OI* och *OJ* mot *AB* och *DE* samt tangenterna *B'C'* och *C'D'* parallella med resp. *BC* och *CD*, så att vinklarna *AB'C'*, *B'C'D'*, *C'D'E* bliva resp. $2u_2$, $2u_3$, $2u_4$. Då kan alltid *O* väljas så, att *IB'C'D'J* får samma längd som *IBCDJ*. I detta fall skär endast

en av sträckorna BC och CD, låt vara CD, cirkeln i (skilda) reella punkter. Beteckna ytorna av $OIBCDJ$, $OIB'C'D'J$, $PBCD$, $PB'C'D'$ med M, M', F, F', varvid enligt det föregående F och F' räknas negativa, om $2u_1$ är konvex, och M t. ex. kan vara skillnaden mellan en 7-sidings och en triangels positiva ytor, om O och B ligga på olika sidor om CD. Inför vidare beteckningarna

$$g = \tfrac{1}{2}(IB + BC + CD + DJ) \quad \text{och} \quad S_t = \Sigma \operatorname{tg} u_i.$$

Då är

$$M' = \frac{g^2}{\cot u_2 + \cot u_3 + \cot u_4}$$

$$M' - M = F' - F = \frac{q^2}{S_t} \tag{11}$$

där

$$q = \tfrac{1}{2}(PB - BC + CD - DP) = \tfrac{1}{2}(IB - BC + CD - DJ). \tag{12}$$

Här måste man komma ihåg, att PB och DP räknas negativa, om $2u_1$ är konvex (se fig. 3 och 4!). Om slutligen AB och DE äro parallella, skall O fortfarande ligga på lika avstånd från dessa linjer, och man finner genom limesövergång, att formeln (11) gäller även för detta fall: $\operatorname{tg} u_1$ blir $= 0$. Eftersom S_t alltid blir positivt (jämför ovan), blir $M < M'$, och M ökas, om man genom parallellförflyttning av BC och CD närmar den förra polygonen till den senare så, att g hålles konstant, medan q minskas till sitt absoluta belopp.

Om nu en konvex n-siding har den egenskapen, att till varje grupp av fyra konsekutiva sidor finnes en cirkel, som tangerar alla fyra sidorna, måste dessa cirklar sammanfalla, ty en cirkel är entydigt bestämd genom tre tangenter och den sida, på vilken de tangeras. Således är n-sidingen en cirkel-n-siding. I motsatt fall måste det således finnas fyra konsekutiva sidor a_m, a_{m+1}, a_{m+2} och a_{m+3}, som ej kunna tangeras av en och samma cirkel. Då företager man en tillräckligt liten parallellförflyttning av a_{m+1} och a_{m+2} på sätt nyss beskrivits, så att den uppkommande variabla n-sidingen ej upphör att vara konvex, och så att den g motsvarande storheten hålles konstant och den mot q svarande storheten minskas till sitt absoluta värde. Då hålles omkretsen konstant i den variabla n-sidingen, under det att dess yta ökas med samma belopp som M. Adjungeras n-sidingar med försvinnande sidor, bildas en sluten mängd av konvexa n-sidingar med positiva sidor, given omkrets och givna vinklar. Då måste en sådan n-sidings yta såsom kontinuerlig funktion av $n-3$ bland dess sidor uppnå sitt maximum antingen för en av dessa degenererade n-sidingar eller för den entydigt bestämda kring en cirkel om-

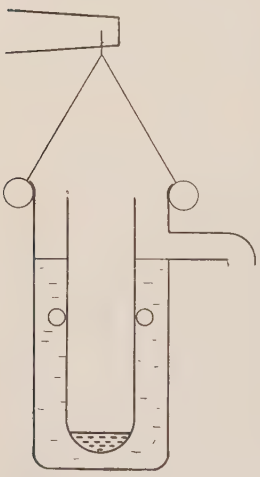
skrivna n-sidingen. I förra fallet tänka vi oss, att sidorna $a_1 \ldots a_m$ ha försvunnit. Vi giva då a_1 ett litet positivt värde genom avskärande av en infinitesimal triangel under bibehållande av vinklarna mella a_1 och dess närliggande sidor a_{m+1} och a_n. Den sålunda bildade månghörningen får omkretsen $2p\,(1-\eta)$ och ytan $M_1 = M\,(1-\varepsilon)$. Sedan bildas en med denna likformig månghörning med omkretsen $2p$. För dess yta M_2 gäller då:

$$M_2 = \frac{M_1}{(1-\eta)^2} = M \cdot \frac{1-\varepsilon}{(1-\eta)^2}.$$

Men η är oändligt litet av första ordningen och ε oändligt litet av andra ordningen. Om den avskurna triangeln väljes tillräckligt liten, blir därför $M_2 > M$. Således kan ej en degenererad månghörnings yta motsvara maximivärdet, utan detta tillkommer den entydigt bestämda cirkel-n-sidingen.

Arkimedes lag för flytande kroppar.

En bägare med avloppsrör förses med en grepe av tunn, styv mässingstråd. Denna häktas lämpligen på en spiral av 0,75 mm pianotråd, som spänts runt bägaren omedelbart nedanför dess rand. Den ena vågskålen till en balansvåg borttages och ersättes med bägaren. Eventuellt använder man i stället en lagom känslig visarvåg.



Man fyller bägaren med en lämplig vätska och tarerar. Ett provrörsfartyg så stort som möjligt t. ex. ett tunnväggigt preparatrör 30 mm · 100 mm med blyhagel eller kvicksilver nedsänkes i bägaren. Den undanträngda vätskan rinner ut, men vägens jämvikt rubbas ej. Om man sedan gör röret tyngre, sjunker det djupare, givetvis fortfarande utan att jämvikten ändras. — Om en tunn pianotrådspiral trädes på röret under vattenlinjen, hindras det från att komma invid bägarens väggar, varigenom störande kapillära krafter undvikas. Av samma skäl kan det här vara bättre att använda alkohol än vatten.

Vid detta försök får man utan omständliga vägningar *flera* exempel på lagen.

Alfred Nilsson.

Moderna kopplingstavlor.

Av NILS WIGREN.

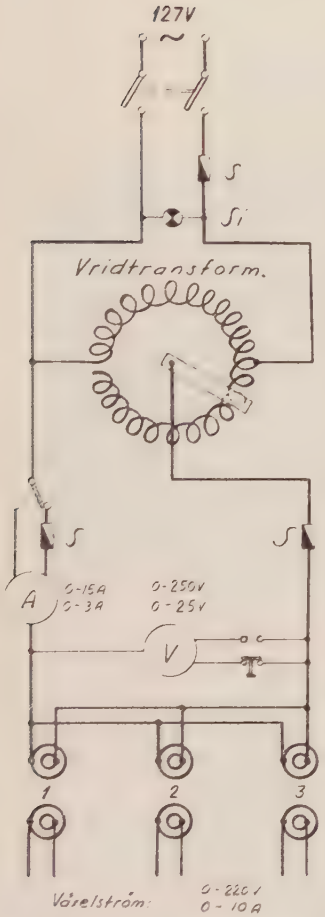


Fig. 1. Schema till kopplingstavla för växelström. Fysiklab. vid Skellefteå högre allm. lärov. S = säkring; Si = signallampa; 1, 2, 3 uttag för växelström: 0—220 V, 0—10 A.

I det följande beskrivas i korthet tre typer av kopplingstavlor, som äro installerade i Skellefteå h. a. läroverks fysiska institution.

Kopplingstavla för växelström. (Fig. 1). En 1-fas vridtransformator, i vilken antalet lindningsvarv ändras medelst en släpkontakt, är primärt ansluten till 127 volt växelspänning. Från sekundärsidan kan uttagas maximalt 10 A mellan 0—220 V. Regleringen av den uttagna växelspänningen sker praktiskt taget kontinuerligt, då större språng än 0,2 V ej förekommer. Inställning av spänningen sker med hjälp av en ratt på tavlans framsida.

Kopplingstavla för likström. (Fig. 2). Kopplingsschemat visar, att inkommande 3-fas växelspänning, 220 V, 50 p/s över smältsäkringar och strömbrytare föres fram till en vridtransformator. Från denna transformator, som alltså avger 3-fas växelspänning, föres spänningen fram till primärsidan av en stjärnkopplad 3-fas transformator. Dennas sekundärsida är uppdelad i fyra sinsemellan lika, triangelkopplade lindningar. Varje lindning avger spänning till sin selenlikriktargrupp, och spänningen från dessa fyra likriktargrupper föres över smältsäkringar till en speciell omkopplare. Med hjälp av denna omkopplare kan tre olika kopplingsmöjligheter väljas:

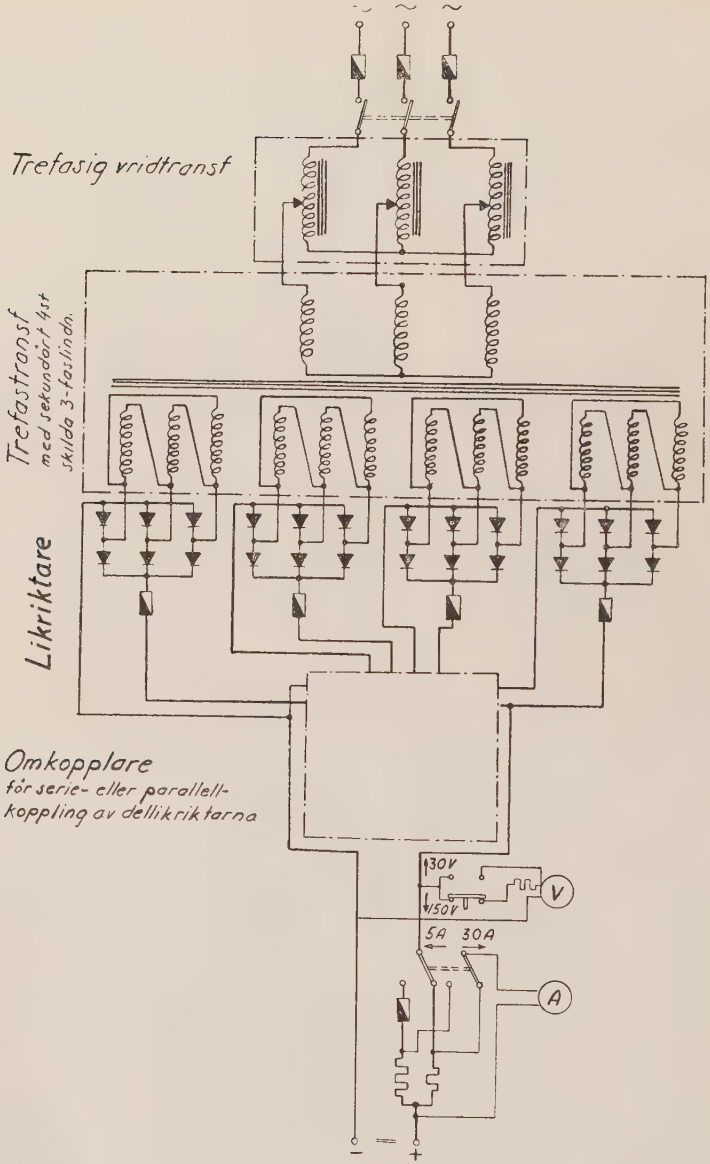


Fig. 2. Schema till kopplingstavla med inbyggda likriktare.

I. Alla fyra likriktargrupperna seriekopplas. Strömstyrkan kan varieras mellan 0—5 A vid 0—120 V.
II. Likriktargrupperna seriekopplas två och två och dessa så bildade grupper parallellkopplas. Strömstyrkan kan varieras mellan 0—10 A vid 0—60 V.
III. Alla fyra likriktargrupperna parallellkopplas. Strömstyrkan kan varieras mellan 0—20 A vid 0—30 V.

Vid alla dess tre alternativ är sålunda den avgivna maximala effekten 600 watt. Spänningen regleras med hjälp av en ratt, som står i förbindelse med vridtransformatorn.

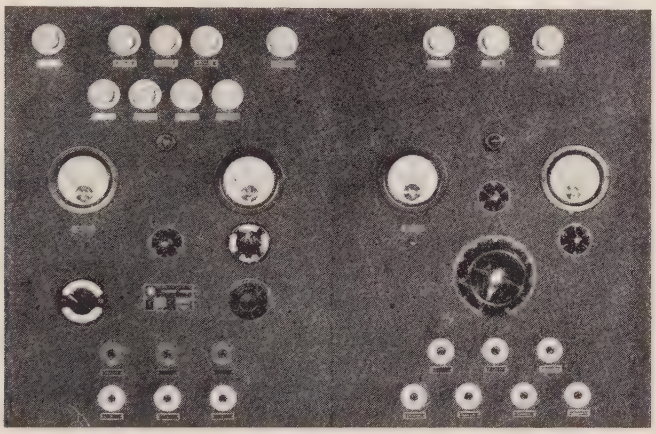


Fig. 3. Sammanbyggda kopplingstavlor för de fysiska lärosalarna.

För kontrollering av ström och spänning på likströmssidan finnas volt- och ampèremeter av vridspoletyp, försänkt monterade på tavlans frontsida. Voltmetern har två mätområden, 0—30 V och 0—150 V. Det lägre mätområdet inkopplas medelst tryckknapp. Ampèremetern har likaledes två mätområden, 0—5 A och 0—30 A. För val av mätområde finnes en särskild omkastare. Instrumentet är skyddat med en särskild smältsäkring för det lägre mätområdet.

De beskrivna tavlorna äro byggda för väggmontage och dimensionerna äro c:a 60 cm · 80 cm · 25 cm. De upptaga sålunda mycket litet väggutrymme och särskilt anmärkningsvärt är, att djupet från väggen kunnat hållas nere vid 25 cm. Därigenom inkräktas endast obetydligt på värdefullt golvutrymme. Båda kopplingstavlorna äro monterade i de fysiska lärosalarna på samma vinkeljärnsstomme (fig. 3), och det hela är så anordnat att tavlorna kunna svängas ut,

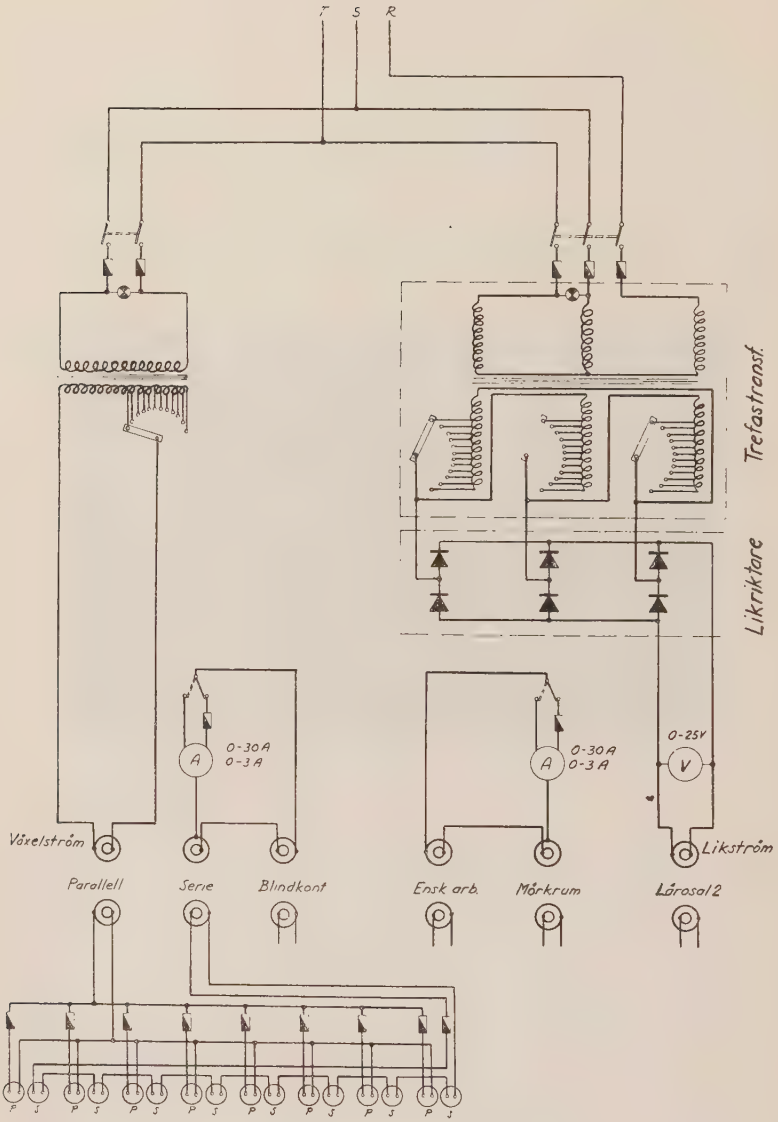


Fig. 4. Schema till kopplingstavla för lik- och växelström i övningslaboratoriet.

en åt vardera sidan, varigenom man utan vidare kan överblicka och inspektera kopplingen och anordningarna i detalj. Alla smältsäkringar äro av gängse standardtyp och åtkomliga från frontsidan.

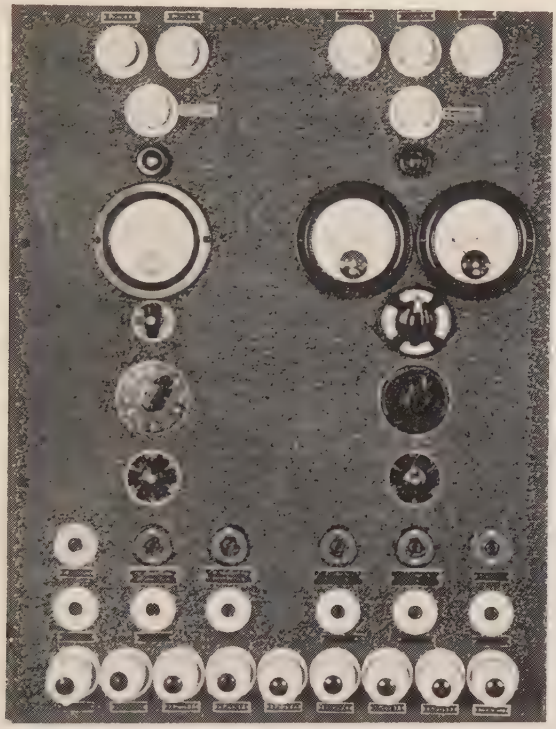


Fig. 5. Kopplingstavla för lik- och växelström i övningslaboratoriet.

De i likströmstavlorna inbyggda selenlikriktarelementen äro synnerligen rikligt dimensionerade och av absolut driftsäker typ. Tillfällig överbelastning eller kortslutning har ingen som helst inverkan. Endast värmeutvecklingen vid längre tids överbelastning kan skada dem. Genom anslutning till 3-fas växelspänning har uppnåtts, att den avgivna likspänningen endast är behäftad med en restvåg på c:a 4 %, av frekvensen 300 p/s. Denna restvåg torde vid så gott som alla i undervisningen förekommande försök vara utan betydelse, då dess inverkan i regel faller inom gränserna för mätinstrumentens felvisning. Då så befinnes nödvändigt, kan den bortfiltreras genom en enkel filteranordning.

De inbyggda transformatorerna äro luftkylda och fordra ingen eftersyn.

I jämförelse med kopplingstavlor av äldre konstruktion, där överflödig energi måste upptagas av förkopplingsmotstånd, ha de nu beskrivna tavlorna den fördelen att även vid låga spänningar stora strömstyrkor kunna uttagas. Särskilt påfallande är detta förhållande vid likströmstavlan, vilken just vid de lägsta spänningarna ställer de största strömstyrkorna till förfogande.

Kopplingstavla för lik- och växelström i övningslaboratoriet (Fördelningstavla). (Fig. 4 och 5). Tavlan har en växelströms- och en likströmskrets.

Växelströmskretsen innehåller en 1-fas regleringstransformator, på sekundärsidan försedd med 12 spänningssteg för 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12 och 15 V. För varje spänning medges en maximal strömstyrka av 25 A. Strömstyrkan kontrolleras av en ampèremeter av mjukjärnstyp.

Likströmskretsen innehåller en 3-fas transformator, på sekundärsidan försedd med 12 uttag i varje fas samt en selenlikriktare. Den uttagna likspänningen kan inställas på 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 16 och 20 V, och maximalt 30 A kan uttagas för varje spänning.

För parallellkoppling av de åtta bordsplatserna finnes en speciell kontakt, och efter denna är kopplad 8 st. automatiska säkringar för 3 A. För seriekoppling av alla arbetsplatserna finns det även en särskild kontakt med tillhörande proppautomat för 15 A. Skulle vid någon enstaka laboration större spänningar än de nu angivna erfordras, kunna dessa över tavlan uttagas från en likströms- eller växelströmstavla i en av lärosalarna.

Uttagning av växelström från tavlorna sker genom grå, av likström genom blå, koncentriska kontakter. Från tavlorna utgående ledningar ha vita koncentriska kontakter.

Kopplingstavlorna äro genom sin enkla och överskådliga konstruktion mycket lättskötta och därför synnerligen lämpliga för undervisningsändamål. De äro utförda av Elektroskandia och ha framgått som resultatet av ett samarbete mellan Elektroskandias ingenjörer och förf. Konstruktionerna bygga delvis på principer, som förut använts och beskrivits av G. Leimbach.[1] Till lektor C. Bergholm, som granskat ritningarna och därvid framställt förslag till vissa förbättringar, får förf. härmed uttala sitt varma tack.

[1] Neue Anschlussgeräte für Wechselstrom. Praktische Schulphysik, Heft 6, 1938.

Jonvandring och elektrofores.

Av HERMAN RINDE.

Ett viktigt experiment inom kemiundervisningen är bestämning av en färgad jons vandringshastighet. För detta försök användes vid våra läroverk vanligen den av Nernst (1897) konstruerade apparaten, och även vid våra universitet tycks denna apparat fortfarande vara i bruk.[1] Den är dock behäftad med ett par svagheter, som gör, att många lärare dra sig för detta försök. Strömmen tillföres direkt medelst ett par Pt-elektroder, och då man använder sig av spänningar mellan 40–100 volt, inträffar vid elektroderna gasutveckling, som stör försöket. För det andra är det rätt besvärligt att med denna apparat skikta den färgade lösningen under en lämplig elektrolytlösning. Om man misslyckas, får man ta sönder apparaten, rengöra den och börja om från början. För att underlätta skiktningen brukar man i den underliggande lösningen lösa något ämne, som ökar lösningens spec. vikt men ej deltager i jonvandringen. Vanligen användes urinämne. Eucken-Suhrmann[2] föreslår borsyra, som tillsättes till mättning. Även andra ämnen begagnas. Den frågan uppkommer då: Inverkar ej denna icke-elektrolyt på jonernas vandringshastighet?

Vid h. allm. läroverket i Bromma har för demonstration av jonvandringen sedan några år tillbaka använts en av prof. Tiselius konstruerad apparat för studiet av elektrofores vid proteinämnen. Fördelen med denna apparat är, att ingen gasutveckling erhålles vid elektroderna. Skulle skiktningen misslyckas, är det lätt att tappa ut en del av lösningen och börja om på nytt, utan att apparaten behöver söndertagas. Då hela apparaten är nedsänkt i en termostat, erhålles inga konvektionsströmmar, som störa försöket.

Teori. Om man mellan två elektroder i en lösning har ett spänningsfall av F volt/cm, kommer en jon att på t sek förflytta sig en vägsträcka Δl, och $\Delta l = Fut$, där u betyder jonens vandringshastighet. Om man känner lösningens ledningsförmåga ($\varkappa$) och vandringen sker i ett jämntjockt U-rör med genomskärningsarean q cm² samt strömstyrkan är i amp., blir $F = \frac{i}{q\varkappa}$. Man behöver där-

[1] L. Smith: Lärob. i oorg. undervisningsexp.
[2] Eucken-Suhrmann: Physikal-Chem. Praktikumsaufg.

för vid försöken uppmäta strömstyrkan, bestämma lösningens ledningsförmåga samt över densamma skikta en ofärgad lösning med samma ledningsförmåga som den färgade lösningen. Om detta villkor är uppfyllt, gäller ovanstående formel. Vid elektroforesförsök i buffertlösningar är denna formel lämplig att använda, men vid jonvandringsförsök har den lösning, som innehåller en färgad jon, och den däröver skiktade ofärgade lösningen vanligtvis ej samma ledningsförmåga. Försöken bli i dessa fall ej så nog-

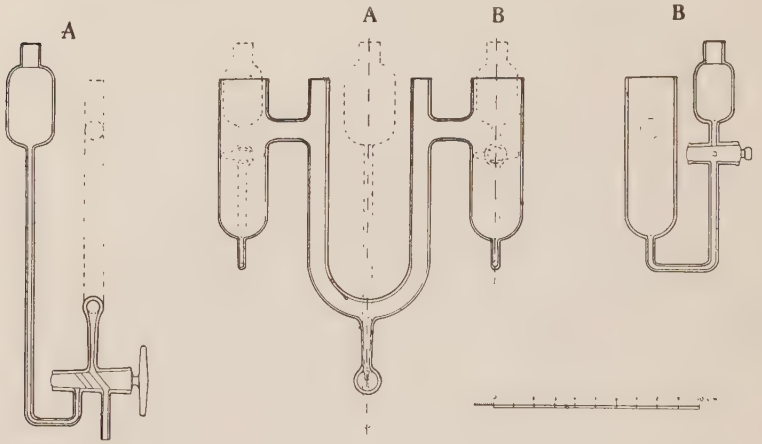


Fig. 1.

granna, och det kan där vara lämpligt att genom införda sonder direkt mäta potentialfallet. Man sluter strömmen genom den till dessa kopplade voltmetern några gånger under försöket för att avläsa och kontrollera spänningsfallet. Vid lektionsförsök är denna metod att direkt avläsa spänningsfallet att rekommendera.

När en spänning pålagts elektroderna, blir rörelsen i första ögonblicket accelererad, men då friktionskrafter uppträda, som motverka rörelsen, blir partiklarnas vandringshastighet snart konstant. Om friktionsmotståndet är P för sfäriska partiklar med radien r, blir enligt Stokes' lag: $P = 6\pi\eta r v$, där v är partikelns vandringshastighet, och η är lösningens viskositet. Löser man en icke-elektrolyt, t. ex. urinämne, i lösningen, ökas dess viskositet, och jonernas vandringshastighet bör bli mindre.

Vid bestämning av vandringshastigheten avläses gränsytans förskjutning i bägge skänklarna, och om medelvärdet mellan dessa förskjutningar är Δl, och spänningsfallet mellan de införda son-

derna är V volt, samt avståndet mellan dessa är a cm, blir $F = \frac{V}{a}$; och partiklarnas vandringshastighet blir:

$$u = \frac{\Delta l \cdot a}{Vt}.$$

Apparaten. Den apparat, som användes vid dessa försök, var, såsom redan nämnts, i huvudsak konstruerad såsom den, som använts av prof. Tiselius vid undersökningar över proteiners elektrofores.[1] Dess storlek, utseende och konstruktion framgår av fig. 1 och fig. 2. Under försöken var den nedsänkt i en termostat fylld med vatten, där den jämte lösningarna fick stå under ett par timmar före försöken, för att temperaturjämvikt skulle inträda. Då denna säkert uppnåtts, öppnades tvåvägskranen i botten av U-röret, och den färgade lösningen skiktades under den ofärgade. För att tvåvägskranen bekvämt skulle kunna öppnas var på dess kik fastsatt en rund bakelitplatta, försedd med en del hål vid periferien. Medelst en koppartråd, som var böjd i rät vinkel i ena ändan, och som bekvämt kunde stickas in i hålen i bakelitplattan, kunde kranen vridas. Kaliumnitratlösningen eller buffertlösningen påfylldes i elektrodkärlen i sådan mängd, att den efter avslutad skiktning stod över förbindelserören mellan elektrodkärlen och U-röret. Före försöket och innan apparaten nedsattes i termostaten, skiktades elektrolyten kring elektroderna. Dessa bestodo av koppar i konc. kopparsulfatlösning, zink i konc. zinksulfatlösning eller silver, överdraget med silverklorid i konc. kaliumkloridlösning. Vid bestämning av permanganatjonens vandringshastighet användes kopparelektroder i konc. kopparsulfatlösning, emedan man då lättare kunde se, att kopparsulfatlösningen låg oförändrad kring elektroderna under hela försöket. Vid elektroforesförsöken användes i regel silverklorid-kaliumkloridelektroden, enär kopparsulfat- eller

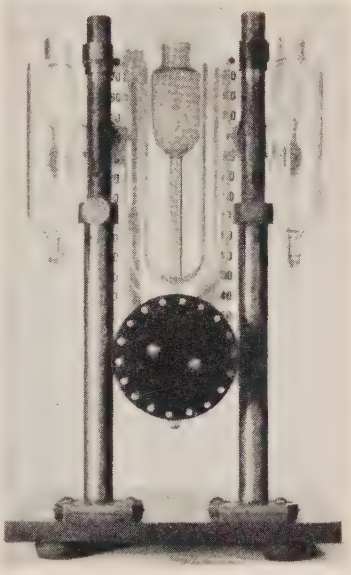


Fig. 2.

[1] Tiselius: Inaug. diss. Upsala 1930.

zinksulfatlösningarna gåvo fällningar med de över dessa skiktade buffertlösningarna.

För att underlätta skiktningen gjordes tilloppsröret av ett kapillärrör med 0,6—0,8 mm diameter. Sedan lösningen passerat tvåvägskranen, kom den in i en trattformad utvidgning av kapillärröret och därefter i botten av U-röret. Denna del av skiktningen är den svåraste, och om ej en skarp skiktyta utbildades i denna tratt, vreds tvåvägskranen 180°, och sedan den färgade lösningen genom en hävertanordning runnit ut i en skål utanför termostaten, kunde skiktningen påbörjas på nytt, utan att apparaten behövde söndertagas. Sedan den underskiktade vätskan delat på sig i U-rörets båda skänklar, kunde skiktningen drivas fortare.

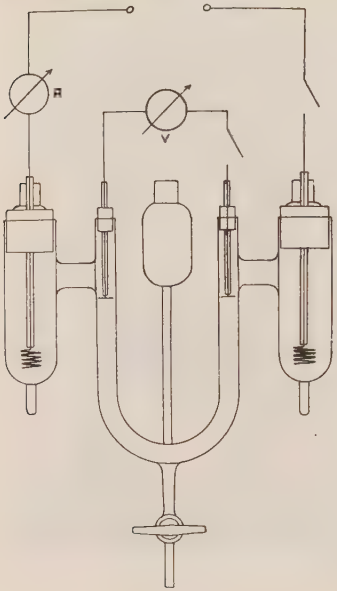


Fig. 3.

Vid skiktning av kaliumpermanganatlösning under en kaliumnitratlösning av samma molaritet uppkom ofta en konisk förhöjning av permanganatlösningen mitt i röret förmodligen beroende på friktionen mellan rörets glasvägg och den strömmande lösningen. Om sedan, efter avslutad skiktning, lösningen fick stå några minuter, gick denna koniska upphöjning i permanganatlösningen tillbaka, och man fick en jämn horisontell yta. Vid kolloider, eller då permanganatlösningen försatts med någon procents urinämne, uppkom ej detta fenomen.

Kopplingen och den färdigmonterade apparatens utseende framgå av fig. 3 och fig. 4. Med den i strömkretsen inkopplade ampèremetern kunde man kontrollera, att strömmen var konstant under försöket. Sedan spänningen, som varierades vid de olika försöken inom området 50—200 volt, pålagts elektroderna, gjordes avläsningen av nolläget efter en halv minut, och därefter avlästes gränsytornas läge varje minut under så lång tid, att förskjutningen uppgick till maximalt 1 cm. Strömmen omkastades därefter, och sedan en halv minut ånyo gått, avlästes det nya nolläget, och vandringshastigheten i motsatt riktning bestämdes.

Permanganatjonens vandringshastighet. På sätt, som förut beskrivits, skiktades en permanganatlösning under en kaliumnitratlösning av samma molära koncentration som permanganatlösningen. Förförsök har gjorts med olika koncentrerade permanganatlösningar. Vid högre koncentrationer uppkom under försöket lätt konvektionsströmmar förmodligen på grund av den elektriska strömmens värmeverkningar. Vid låga koncentrationer var det svårt att direkt avläsa gränsytans läge. Den i läroböcker föreskrivna koncentrationen, 0,003 m, förefaller vara ganska lämp-

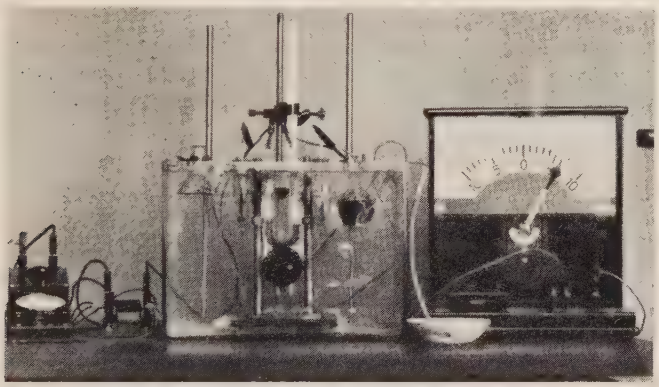


Fig. 4.

lig. Den över permanganatlösningen skiktade elektrolytlösningen bör ha samma positiva jon som denna, och dess negativa jon bör ha samma vandringshastighet som permanganatjonen. Enligt förefintliga uppgifter varierar vandringshastigheten för negativa joner, mätt i $cm^2\,sek^{-1}\,volt^{-1}$, mellan $7{,}1 \cdot 10^{-4}$ för SO_4'' och $5{,}6 \cdot 10^{-4}$ för permanganatjonen.[1] Vid de i det följande beskrivna försöken har en kaliumnitratlösning skiktats över permanganatlösningen, och NO_3'-jonens vandringshastighet har uppgivits till $6{,}5 \cdot 10^{-4}$.

För avläsning av gränsytornas förskjutning hade bakom U-röret placerats mjölkglasskalor med nollpunkten mitt på skalan. Som exempel på en dylik mätning kunna anföras resultat, som återgivas i tab. I. I denna betyder t tiden i sek, K avläsning vid katoden och ΔK gränsytans förskjutning vid katoden. Motsvarande storheter vid anoden ha betecknats A och ΔA. Medelvärdet mellan ΔK och ΔA har betecknats Δl; u är vandringshastigheten beräk-

[1] Eggert: Lehrb. der Phys. Chemie.

nad enligt i det föregående härledd formel. De olika försöken ha sammanställts i tab. II.

Uppgiften har varit att undersöka, huruvida jonernas vandringshastighet påverkas av det i permanganatlösningen lösta urinämnet, och om jonernas vandringshastighet är konstant vid olika spänningar mellan elektroderna.

Av tab. I framgår, att värdet på vandringshastigheten är något så när konstant vid ett och samma försök. Omkastas strömriktningen, får man vanligtvis ett något högre värde på vandringshastigheten. Någon »gång» i värdena vid varierande spänningar har icke kunnat konstateras. Däremot förefaller det, som om vandringshastigheten skulle sjunka med ökad urinämneskoncentration. Detta är vad man kan vänta sig, då lösningens viskositet stiger med urinämneskoncentrationen. Enligt Stokes' lag ökar friktionsmotståndet prop. mot viskositeten, och man kan därför vänta sig en minskad jonrörlighet med ökad urinämneskoncentration. Resultatet i tab. II tyder också på, att så är förhållandet. Såsom värde på MnO_4'-jonens hastighet anföres vanligen[1] $5{,}6 \cdot 10^{-4}$. Av tab. II framgår, att detta värde på permanganatjonens vandringshastighet erhållits för lösningar innehållande 10 % urinämne. För urinämnesfri lösning har ett högre värde, $6{,}8 \cdot 10^{-4}$, erhållits.

Vid de i det föregående beskrivna försöken är dock variationerna i de olika bestämningarna stora och det experimentella materialet för litet, för att några slutsatser med säkerhet skola kunna dragas. Genom fotografering av jonvandringen och fotometrering av plåtarna skulle diffusionen kunna elimineras, och säkrare värden på jonvandringshastigheten erhållas.

I elementära läroböcker i kemi föreslås, att jonvandringen demonstreras med försök, där såväl katjon som anjon äro färgade. Såsom lämpliga elektrolyter ha bland andra angivits koppartetraminpikrat och den lösning, som erhålles, om lösningar av kopparsulfat och kaliumbikromat blandas. Dessa försök ha prövats med den ovan beskrivna apparaten, och även en rad andra försök ha gjorts med lösliga komplexa salter, där katjon och anjon äro olikfärgade. I en del fall har en viss separering av jonerna kunnat påvisas, men något försök, som är värt att rekommendera såsom demonstrationsförsök, har icke påträffats.

Elektrofores. Tiselius[2] har ingående studerat proteinmolekylers rörelse i elektriska fält, och han fann, att vandringshastigheten ändrades med lösningens surhetsgrad. Vid passerandet av den isoelektriska punkten omkastades partiklarnas rörelseriktning. För

[1] Eggert: Lehrb. der Phys. Chemie.
[2] Tiselius: Inaug. diss. Upsala 1930.

Tab. I.

0,003 m $KMuO_4$ och 0,003 m KNO_3; 1 % urinämne; strömst. 1,3 m A; avståndet mellan sonderna 14 cm och spänningen 36 V; temp. 21°.

t	K	ΔK	A	ΔA	Δl	$u \cdot 10^4$	$u_m \cdot 10^4$
0	+ 0,20		— 0,40				
120	0,0	0,20	— 0,20	0,20	0,20	6,48	
180	— 0,10	0,30	— 0,10	0,30	0,30	6,48	
240	— 0,25	0,45	0,0	0,40	0,425	6,89	
300	— 0,30	0,50	+ 0,15	0,55	0,525	6,81	
360	— 0,40	0,60	+ 0,25	0,65	0,625	6,75	
420	— 0,50	0,70	+ 0,35	0,75	0,725	6,71	6,69

Sedan strömriktningen omkastats, fortsattes försöket, och vandringshastigheten bestämdes på nytt. Dess medelvärde blev då $6{,}94 \cdot 10^{-4}$. I allmänhet erhölls ett högre värde på vandringshastigheten vid denna andra del av försöket.

Tab. II.

0,003 m $KMuO_4$ och 0,003 m KNO_3; u_1 är vandringshastigheten under den första delen av försöket och u_2 under den andra delen, sedan strömriktningen omkastats; avståndet mellan sonderna 14 cm; temp. 21°—22°.

Urinämne	Strömst. (m A)	Spänning (volt)	$u_1 \cdot 10^4$	$u_2 \cdot 10^4$	$u_m \cdot 10^4$
0 %	1,3	36	6,48	7,58	
	2,6	60	6,40	7,10	
	2,9	80	6,49	7,20	
	3,4	97	6,54	6,81	6,83
1 %	1,3	36	6,69	6,94	
	2,1	59	7,09	7,39	
	2,9	80	5,54	7,19	
	3,6	102	6,42	7,05	6,79
5 %	1,45	40	5,65	6,17	
	2,0	52	6,86	7,10	
	2,8	80	5,51	5,84	
	4,1	109	5,69	6,59	6,08
10 %	1,4	41	5,15	5,83	
	2,15	63	5,70	5,93	
	3,0	83	5,14	6,47	
	4,2	110	5,58	5,63	5,68
20 %	1,4	36	6,20	6,04	
	2,0	63	5,65	5,51	
	2,9	92	4,88	5,21	
	4,2	111	5,83	4,96	5,54

att utröna om likartade förhållanden vore rådande hos oorganiska kolloider, har elektroforesen undersökts för Sb_2S_3-, As_2S_3- och Fe_2O_3-hydrosoler. De flesta försöken ha gjorts med en Sb_2S_3-sol. Denna framställdes genom att inleda svavelväte i en svagt surgjord lösning av kaliumantimonyltartrat. Lösningen fick vara högst 0,003 m, i annat fall koagulerade solen irreversibelt. Solen befriades från elektrolyter genom dialys i kollodiumsäckar, som framställdes genom att gjuta en kollodiumhinna på insidan av en Erlenmeyerkolv och låta den torka där en lämplig tid, varefter den lossades

Tab. III.

u_1 är elektroforeshastigheten under den första delen av försöket och u_2 under den andra delen, sedan strömriktningen omkastats.

pH	$u_1 \cdot 10^4$	$u_2 \cdot 10^4$	pH	$u_1 \cdot 10^4$	$u_2 \cdot 10^4$	pH	$u_1 \cdot 10^4$	$u_2 \cdot 10^4$
4,80	5,80	5,62	6,64	2,22	2,16	8,84	2,56	2,53
5,29	4,74	5,00	7,00	1,43	1,42	9,24	3,10	3,12
5,59	4,27	4,23	7,38	0,50	0,52	9,70	3,84	3,96
5,9	3,70	3,72	8,04	0,90	0,88	9,90	4,23	4,13
6,24	3,15	3,02	8,31	1,53	1,53	10,40	4,90	4,90
6,47	2,85	2,88	8,50	1,97	1,97			

från glaset och kunde dragas ur kolven samt försågs med en gummipropp och ett stigrör. Dylika kollodiumsäckar användes vid härvarande läroverk även för demonstration av det osmotiska trycket i stället för den vanligen använda metoden med en ferrocyankopparmembran i en lercell. Vid användning av en dylik kollodiumsäck och en sockerlösning av lämplig koncentration erhålles en tryckökning av 30—50 mm vatten på en lektionstimme beroende på, huru tät man gjort kollodiummembranen.

Sb_2S_3-solen dialyserades i en trelitersbägare, som påfylldes med nytt destillerat vatten dagligen under nära en månads tid. Solen koncentrerades därefter på följande sätt. Dialyserad sol från flera kollodiumsäckar slogs samman i en kolv, och från denna ledde en hävert, i vars längre skänkel en kollodiumsäck var fastsatt, så att kolven med kolloiden stod 60—75 cm högre än kollodiumsäcken. Häverten och kollodiumsäcken fylldes med sol. Vatten sipprade ut genom porerna i kollodiumsäcken, och då ny sol strömmade till genom häverten, koncentrerades solen. Denna filtrering genom kollodiummembran fortsattes, tills tecken på begynnande koagulation visade sig i kollodiumsäcken. Solen filtrerades därefter för att befrias från koagulum.

Vid försöken blandades därefter lika delar av solen och en buffertlösning. I elektroforesapparaten skiktades denna lösning under en annan lösning, som erhållits genom att blanda lika delar buffertlösning och dest. vatten. Härigenom erhölls samma pH-värde i solen och den ovanför densamma skiktade lösningen. Buffertlösningens pH-värde bestämdes med en potentiometer; som buffertlösningar användes borax-borsyra, monokaliumfosfat-dinatriumfosfat och borax-kolsyrefri natriumhydroxid. Resultatet har sammanställts i tab. III och fig. 5. Härav framgår, att elektroforesen alltid är anodisk. Vid växande pH sjunker den, och vid pH = 7,6 (den isoelektriska punkten) är den noll samt stiger ånyo med växande pH. Liknande är förhållandet vid en As_2S_3-sol; dess isoelektriska punkt ligger vid pH = 6,3.

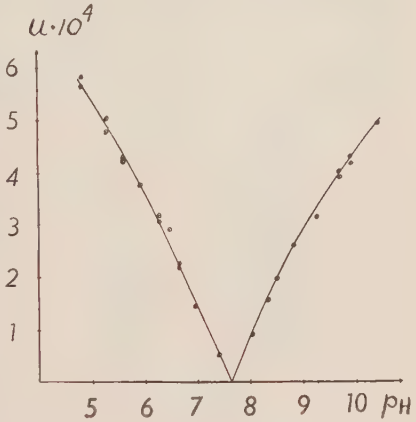


Fig. 5. Anodisk vandring. Sb_2S_3-sol.

Av Tiselius' undersökningar framgår, att proteinämnens molekyler omladdas vid den isoelektriska punkten. I motsats härtill kommer hos Sb_2S_3- och As_2S_3-soler vandringsriktningen alltid att vara oförändrad, men vandringshastigheten förändras kontinuerligt med pH.

Hos järnoxidsolen var vandringen katodisk, och solen var stabil inom området pH = 1,5 – 5,0. Elektroforeshastigheten sjönk med växande pH-värden; genom extrapolation erhölls, att den isoelektriska punkten ligger vid pH = 5,6.

Ovanstående experimentella undersökning av permanganatjonens vandringshastighet och Sb_2S_3- samt As_2S_3-solernas elektrofores har utförts som enskilt arbete av eleven i R III b vid Bromma högre allm. läroverk, L. O. Spetsig.

Principen för kilowattimmätaren för växelström.

I fig. 1 föreställer Sp en spole med omkring 1 000 varv koppartråd, försedd med järnkärna. Ena spolen på en elektromagnet, transformator e. d. brukar kunna användas. En kopparskiva K, vridbar kring en axel A, är placerad framför ena änden av järnkärnan. Släppes växelström genom spolen, induceras virvelströmmar i kopparskivan framför järnkärnan.

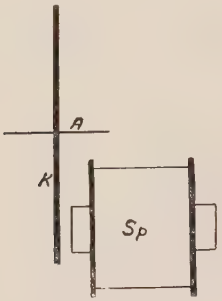


Fig. 1.

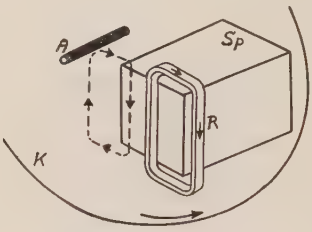


Fig. 2.

Framför halva järnkärnan placeras en ring R av koppartråd (c:a 2 mm diameter) (fig. 2). Kopparskivan börjar nu att rotera. I kopparringen induceras kraftiga strömmar. Därigenom avskärmas magnetfältet framför denna. I den del av kopparskivan, som befinner sig mitt för kopparringen induceras för den skull inga strömmar. Mitt för den icke avskärmade delen av järnkärnan uppstå emellertid strömmar i kopparskivan. Strömmarna i ringen och kopparskivan äro riktade åt samma håll, och påverka givetvis varandra. Då ringen sitter fast, kommer skivan att vrida sig i pilens riktning. Om ringen flyttas till den andra halvan av järnkärnan, ändras rotationsriktningen. Ändras kärnans avstånd till skivans centrum, ändras rotationshastigheten. Kopparringens form är utan betydelse. I stället för ring kan man använda t. ex. en kopparskiva.

Anordningen användes som kilowattimmätare för växelström. Skivan är då förbunden med en varvräknare, graderad i kilowatttimmar. Järnkärnan är försedd med två trådlindningar, en spänningsspole och en strömspole. Även vissa relän äro byggda enligt denna princip.

Stig Lindholm.

Meddelande från Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning.

Den av Folkuniversitetsföreningen i samarbete med Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning anordnade fortbildningskursen i fysik sommaren 1942 genomfördes programenligt den 27 juli till den 8 augusti. Syftet med kursen var att bereda lärare i fysik vid olika skolor tillfälle att studera ett begränsat men viktigt område av fysiken, nämligen elektricitetsläran och speciellt elektroteknik. Inbjudan till deltagande i kursen utsändes redan i februari. Då anmälningstiden utgick den 15 april, hade 210 anmälningar inkommit från huvudsakligen lärare vid högre allmänna läroverk, realskolor, kommunala mellanskolor och flickskolor, folkhögskolor och folkskolor. Det stora antalet sökande nödvändiggjorde en betydlig utökning av deltagarantalet utöver vad som från början var avsett. Till sektion A uttogos sålunda 48 och till sektion B 64 deltagare. Av dessa hade 58 akademisk examen, 5 examen från andra högskolor, 33 voro utexaminerade från högre lärarinneseminarier och 16 hade avlagt folkskollärarexamen. Denna förutsedda inhomogenitet var orsaken till kursens uppdelning på två sektioner. Till sektion A uttogos sålunda huvudsakligen sökande med akademisk examen.

Arbetsprogrammet upptog dels föreläsningar, dels laborationer och studiebesök vid industrier, museer m. m. Föreläsningarna voro gemensamma för alla kursdeltagarna och höllos i regel på Stockholms höskola. De inleddes av lektor E. Ingelstam, som talade över elektricitetslärans historiska utveckling. Föreläsningen kompletterades med ett besök på Tekniska museet under ciceronskap av intendent T. Althin. Sedan följde en föreläsningsserie, som behandlade Sveriges kraftförsörjning; föredragshållare voro driftsdirektör Å. Rusck samt ingenjörerna G. Welmer och S. Tennander. Till denna avdelning anknöt sig ett besök på Elverkets utställning, där ingenjör G. Nilsson höll ett belysningstekniskt föredrag. Dr. G. Siljeholm och ingenjör A. Schleimann-Jensen föreläste om glödlampor och deras tillverkning, moderna urladdningsrör samt radiorör och deras fabrikation. I samband därmed besöktes Lumas fabriker vid Hammarbyleden. En föreläsningsserie var ägnad åt kärnfysiken; föreläsare voro professorerna A. Lindh i Uppsala och E. Hulthén i Stockholm. Tisdagen den 4 augusti besökte kursen Uppsala, där demonstrationer utfördes på högspänningsinstitutet vid Husbyborg samt på den fysiska institutionen. Förutom den

nyss nämnda föreläsningen av professor Lindh ingick i programmet en föreläsning av professor H. Norinder över några aktuella problem beträffande blixtens fysik. Utöver det egentliga programmet gästade kursen söndagen den 2 augusti Stockholms observatorium på Saltsjöbaden, där professor B. Lindblad föreläste över världsbildens utformning i den moderna astronomien. Till sist ingick i föreläsningsprogrammet tre metodiska föreläsningar: av rektor A. Nordhult om elektrotekniken i skolan, fil. lic. M. Helde om användningen av röntgenrör samt av lektor Eva Ramstedt om ett skolprogram för studiet av radioaktivitet och kärnfysik.

Kursens tyngdpunkt låg dock i laborationerna. Inom sektion A hade deltagarna 8 laborationer i starkströmsteknik för lektor G. Funke om inalles 20 timmar, 5 timmar laborationer i fotocells- och radiorörsteknik för fil. lic. M. Helde samt 5 timmar demonstrationer av modern fysikmateriel av teknolog S. Lindholm. Laborationerna inom sektion B voro mera lagda som en allmän översikt av elektricitetsläran, vari dock elektroteknik ingick som ett huvudmoment. De leddes av lektor B. Grundström, som även inledde laborationskursen med en serie föreläsningar. Dessutom hade B-sektionen 5 timmar glasblåsning under ledning av fil. dr. G. Ehrensvärd samt 5 timmar verkstadsteknik för mekaniker Edv. Hedlund.

För att underlätta arbetet med laborationerna hade kursbestyrelsen låtit ledarna för laborationskurserna utarbeta kompendier. Dessa ingå i en av Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning startad pedagogisk skriftserie. Den första skriften i serien har utgivits i tryck: G. Funke, Elementär elektroteknik med laborationer. Den kan erhållas från lektor B. Gustaver, Ålsten, genom insättning av kr. 2:50 på föreningens postgirokonto 85825. Dr. Heldes kompendium om elektriska urladdningsförlopp i gaser av lågt tryck och i vakuum, kommer troligen även att ges ut i tryck. Av lektor Grundströms kompendium i elektricitetslära och elektroteknik med laborationer finns ett litet antal exemplar kvar. Priset är kr. 2:50.

Till Folkuniversitetsföreningen, som anordnat fortbildningskursen och möjliggjort utgivandet av de nämnda kompendierna vill styrelsen för Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning uttala ett vördsamt tack. Styrelsen vill även varmt tacka samtliga medverkande vid kursen. Tack vare deras stora intresse och osparda möda och den skicklighet varmed de löste sina uppgifter blev kursen en obestridlig framgång. Även till deltagarna i kursen riktas ett tack för nit och intresse i kursarbetet.

Bror Gustaver.

Bokanmälningar.

James Jeans, *Välljud och missljud.* Natur och Kultur, Stockholm 1942, 232 s., kr 7: —, inb. 9: 50.

Förf. vill i populär form framställa fysikens förklaringar till musikens grundbegrepp. Han vill även visa, hur dessa förklaringar kunna utnyttjas till musikens främjande, vare sig det gäller tonskalans uppbyggnad, förbättring av tonernas klangfärg eller det ömtåliga problemet om rumsakustik.

Ämnet angripes på så sätt, att den mot ett ljud svarande svängningskurvan får bli den röda tråd, som genomlöper framställningen. Kurvan ifråga presenteras genom hänvisning till telefon och grammofon, vilket synes vara ett gott grepp. Med hjälp av en särskilt enkel kurva (stämgaffelns) härledas så de fundamentala begreppen för all svängningsrörelse.

Kapitlet om svängande strängar är enligt min mening bokens bästa. Att Fouriers teorem blir slarvigt framställt är ganska förlåtligt, då ju matematik ej användes. Tack vare detta teorem kan förf. tala om begreppet naturliga övertoner, som spelar stor roll i fortsättningen. Hur klangfärgen påverkas, har förf. beskrivit klart och intressant. Även kapitlet om luftvibrationer är mycket bra.

Endast då det blir fråga om mer eller mindre estetiska omdömen, kan man ibland ställa sig tveksam. Antagligen har förf. ej menat dem allvarligt, vilket ej hindrar att en känslig musikintresserad kan känna sig illa berörd — t. ex. då han säger att »kurvan *är* symfonien» (s. 22) eller att »pianokompositioner bibehålla sina emotionella egenskaper, även när de utföras på pianola» (s. 168). Problemen om pianistens anslag och om tonarternas olika karaktär kan man väl ej heller anse att förf. lyckats lösa. Sådant förekommer dock endast i obetydlig utsträckning.

Boken rekommenderas, ty den är intressant. Den är även väl översatt. Några oegentligheter: rena toner (i motsats till sammansatta), period (i st. f. svängningstid; växelströmsläran menar något annat, se f. ö. s. 29, rad 6 nerifrån) samt några andra detaljer.

Ett antal goda planscher visa ljudkurvor upptagna med oscillograf m. m.

Stig Comét.

Hilding Faxén, *Mekanik.* Föreläsningar vid Tekniska Högskolan i Stockholm, tryckt 1942. A.-B. Seelig och C:o i distribution, Del I i rotaprint-häfte, 80 s., kr 6:—, Del II, III i rotaprint-häfte, 115 s., kr. 9:—.

Arbetet är tydligen avsett som kompendium för studerande vid Tekniska Högskolan i Stockholm. Del I behandlar partikelns rörelse, friktion samt luft- och vätskemotstånd. Då vektorer spela en stor roll inom mekaniken har författaren medtagit en kort redogörelse för derivering av vektorer. Del II, III innehåller materiella kroppars kinetik. Följande uppräkning av några titelrubriker torde ge en föreställning om arbetets omfattning: Tröghetsmoment, d'Alemberts princip, Påkänningar på lagren vid en stel kropps rotation, Infinitesimala förflyttningar, Lagranges rörelseekvationer, Hamiltons princip, relativ rörelse m. m.

Framställningen är mycket utförlig. Författaren har icke sparat sig någon möda att in i minsta detalj redogöra för de olika lagarna, definitionerna och fenomenen. Enkla, intressanta tillämpningar och ett stort antal lösta exempel öka i hög grad arbetets värde. Det bör dock framhållas, att det icke lämpar sig för enskilt arbete vid de högre allmänna läroverken. Lärare, ingenjörer och studerande, som syssla med mekanik, borde ha tillgång till dessa böcker.

Ett par skönhetsfel vidlåder den för övrigt utmärkta framställningen. Förf. använder ordet normaltryck i betydelsen normalkraft samt definierar 1 kgf som en »lokal» kraftenhet, som varierar på samma sätt som tyngdaccelerationen.

C. Bergholm.

F. Getman and F. Daniels, *Outlines of Theoretical Chemistry,* Wiley and Sons, New York 1937, 662 s., kr 24:50.

Att boken är ett förstklassigt arbete framgår redan av att den under sju år hunnit utkomma i sex upplagor. I 24 kapitel behandlas hela den fysikaliska kemien på ett fängslande sätt, och den klara framställningen i förening med ett stort antal vackra illustrationer och en förstklassig typografisk utstyrsel gör dess studium till en njutning. För den som vill grundligare fördjupa sig i ämnet finnes efter varje kapitel en samling frågor och räkneexempel jämte litteraturhänvisningar. Ehuru det samlade innehållet naturligtvis sträcker sig långt utöver gymnasiets kurs, finner en intresserad lärare många partier, t. ex. rörande kolloider samt atomstrukturens nyare landvinningar, som kunna direkt tillämpas inom skolans undervisning. Även för akademiska studier synes boken vara synnerligen lämplig.

E. Nordefeldt.

H. Lux, *Praktikum der quantitativen anorganischen Analyse.* Verlag Julius Springer, Berlin 1941, 161 s., kr 8: 95.

Som en helt förändrad upplaga av Stock-Stählers välkända Praktikum framträder denna bok, innehållande noggranna praktiska anvisningar om olika analysmetoder i förening med moderna teoretiska utredningar. Här finnes ej blott ett stort antal exempel på de vanliga gravimetriska och titrimetriska bestämningarna utan även analyser grundade på specifika fällningsreagens, hydrolys, komplexbildning, valensändring, utlösning och destillation samt elektroanalys och kolorimetri jämte komplicerade analyser.

Några av de titrimetriska övningarna kunna tack vare sin snabbhet med fördel användas vid elevlaborationer på gymnasiet och ett flertal av de övriga såsom uppgifter för enskilt arbete, varjämte de teoretiska utredningarna äro värdefulla för varje kemilärare.

E. Nordefeldt.

Harry Willstaedt och Ebba Virgin, *Kemi och biokemi.* Svenska bokförlaget 1942, 322 s., kr 12: 50.

Enligt förff:s förord har boken ursprungligen tillkommit för att tillgodose behovet av en lärobok i kemi och biokemi för blivande skolkökslärarinnor och för dem, som genomgå en liknande utbildning. Den har emellertid utformats även med tanke på alla, som behöva kemiska kunskaper som grund för biologiska studier.

Det är ett i svensk läroboksliteratur ganska ensamtstående arbete, som förff. härmed utgivit. Man behöver endast framhålla, att av de tre kemiska huvudområden, som här behandlas, den oorganiska (och allmänna) kemien upptager $^1/_4$, den organiska kemien och biokemien vardera $^3/_8$ av innehållet, en avvägning som avspeglar kemiens allmänna utveckling under det senaste halva seklet, samtidigt som den synes väl motsvara de elevers behov, för vilka boken närmast är avsedd. I själva verket är arbetet förtjänt av en större spridning än så; den organiska delen är grundlig och fylligare än vad som normalt kan medhinnas i läroverken. I ännu högre grad gäller detta om biokemien; med tacksamhet hälsar man här en vederhäftig och översiktlig framställning av denna sist, men icke minst utvecklade delen av kemien. För gymnasieelever med intresse för kemi utgör boken ett välkommet tillskott till möjligheterna att bedriva självstudier i organisk och biokemi. Och även gymnasieläraren har icke så litet att hämta därur av nytta för undervisningen, bl. a. tack vare de noggrant beskrivna biokemiska försöken.

G. Starck.

Bonniers Konversationslexikon, band VI, Stockholm 1942, hfrb. kr 21:—.

Detta sjätte band omfattar *Grafologi—Ihlen* och upptager 1448 spalter jämte 7 planscher och 1 karta. Bland de naturvetenskapliga artiklar, som här äro av intresse, må nämnas: *Grundämnen* (att nr 85 och 87 »*fått namnen alabamin* (*Ab*), *resp. virginium* (*Vi*)» torde ännu varken vara internationellt känt eller erkänt), *von Guericke* (uppgiften att G. demonstrerade sin luftpump »*inför riksdagen i Regensburg 1654*» är historiskt oriktigt; det var först *efter* riksdagens avslutande som experimentet utfördes, och många deltagare hade då redan lämnat staden), *Guld, Gummi, Gyrokompass, Hartser, Hastighet, Helium, Hormoner* (med översiktlig 2-sidig tabell som bilaga), *Hållfasthet, Hästkraft* (»... *enhet för effekt, ... d. v. s. den kraft, som åtgår för att lyfta 75 kg 1 m el. 1 kg 75 m på 1 sek*». Härmed har *kraft* gjorts betänkligt nära synonymt med *arbete* och *effekt*).

De här noterade små inadvertenserna äro utan betydelse för helhetsomdömet, som blir mycket gott, enär artiklarna med mycket få undantag äro korrekta, koncisa och förda fram till hög grad av aktualitet.

J. Tandberg.

Internationella bokstavsbeteckningar för fysikaliska storheter och måttenheter, utg. av Sveriges Standardiseringskommission och Tekniska Nomenklaturcentralen, Seelig & Co., Stockholm 1942, 16 s., kr 2:—.

Föreliggande samling bokstavsbeteckningar utgör det hittills nådda resultatet av ett mångårigt arbete inom Internationella Elektrotekniska Kommissionen, IEC, och Internationella Standardiseringsorganisationen, ISA.

I förordet lämnas en kort redogörelse för detta arbete, i vilket bl. a. Sverige tagit en mycket verksam del. Man var på god väg mot en internationell överenskommelse, då den politiska krisen avbröt arbetet. Då det kan dröja länge, innan det internationella samarbetet kan återupptagas, och då de vunna arbetsresultaten i allt väsentligt torde bli bestående, har man ansett lämpligt publicera resultaten i det skick de föreligga. På sammanträde i dec. 1941 har Sveriges Standardiseringskommission beslutat rekommendera dessa beteckningar till praktisk användning.

Förteckningen upptar inga definitioner av fysikaliska storheter och måttenheter, endast deras bokstavsbeteckningar.

C. E. B.

Gradualavhandlingar.[1]

Carl-Gustav Danver, *A Morphological Investigation of Some Near Galaxies.* Annals of the Observatory of Lund. No. 10. Lund 1942. Disputation vid Lunds universitet den 21 februari 1942. Opponenter: professor K. Lundmark och docent A. Reiz.

De flesta vintergatorna ha en spiralformad struktur. Den första gång man finner en nebulosa omnämnd såsom varande spiralformad var år 1845. Det var Lord Rosse, som gjorde denna betydelsefulla upptäckt; objektet var NGC 5194 beläget i stjärnbilden Jakthundarna. Men det dröjde ända till år 1887, innan man fann, att även det stora stjärnsystemet i Andromeda — synligt för blotta ögat — var spiralformat. Det var pioniären inom den astronomiska fotograferingen, Isaac Roberts, som har äran härav. Sedan denna tid har det visat sig, att kanske de flesta vintergatorna utmärkas av spiralformade armar, som vanligen två till antalet utgå från diametralt motsatta punkter från den centrala kärnan. Uppkomsten av dessa armar ävensom formen av desamma ha länge intresserat astronomerna. Flera äro de teoretiska avhandlingar, som sysslat med dessa problem. Man måste emellertid säga, att de teoretiska lösningar som framkommit icke äro baserade på ett tillräckligt antal mätningar av de förekommande spiralarmarna.

Det föreliggande arbetet avser att närmare undersöka de geometriska formerna av vintergatornas spiralarmar och uppmäta längderna av dessa samt söka erhålla en entydig bestämning av objektsplanens lutning.

Innan själva mätningarna ha kunnat utföras, har det varit nödvändigt att så mycket som möjligt förstärka de på plåtarna ofta ganska svaga bilderna av objekten. Vid dessa förstärkningar ha visserligen nyanserna gått förlorade, men vad viktigare är i detta fall, själva armarna ha kommit att framträda med betydligt större skärpa.

I samband med bestämningen av ett objekts lutning mot himmelssfärens tangentplan diskuteras olika möjligheter att erhålla ett entydigt värde på denna vinkel. De olikheter i ljusfördelning och den asymmetri som uppträder med avseende på storaxeln i ett objekt påvisas vara en följd av lutningen.

[1] När ej annorlunda anges, är referatet av vederbörande förf:s egen hand.

Om vintergatorna i det högre systemet ha sina principalplan parallella, måste de ha gemensam pol. (Ett objekts pol är den punkt mot vilken normalen till objektets principalplan pekar.) För undersökning av den inbördes orienteringen gjordes en upplösning med avseende på de apparenta objektbildernas stor- och lillaxlar. Den erhållna fördelningsellipsoiden gav som resultat en pol, som ger en god överensstämmelse med den av K. Lundmark och E. Holmberg på annat sätt erhållna polen för det metagalaktiska systemet. Medelfelen ge dock vid handen, att det erhållna resultatet får betraktas med en viss försiktighet.

Den ifrågavarande undersökningen har även utförts på så sätt att de individuella polerna för samtliga vintergator beräknats. Man får två grupper av poler beroende på vilken sida av objektet, som antages ligga oss närmast. En svag koncentration föreligger för den grupp av poler, som erhållits under förutsättningen, att den sida av ett objekt som innehåller den kortare delen av lillaxeln är den närmaste. Denna koncentration befinnes ligga i samma riktning som den tidigare erhållna polen.

Sedan lutningsvinkeln för de skilda objekten bestämts, ha ett antal punkter för varje spiralarm uppmätts i ett polärt koordinatsystem med origo i vintergatans kärnparti och polaraxeln utefter dess nodlinje, d. v. s. skärningslinjen mellan himmelssfärens tangentplan och objektets principalplan.

Efter en diskussion av de matematiska spiraler som kunna komma i fråga samt av motsvarande kraftlagar framgår, att den logaritmiska spiralen bäst representerar vintergatornas spiralarmar. Den mot varje spiralarm svarande logaritmiska spiralen har beräknats med hjälp av minsta kvadratmetoden. Man finner ganska ringa variationer i värdet på den för den logaritmiska spiralen karakteristiska vinkeln μ. För de undersökta 190 armarna erhölls medelvärdet $73°{,}4 \pm 0°{,}4$. Detta värde överensstämmer bra med det av professor Bertil Lindblad på rent teoretisk väg funna, $\mu = 73°$.

Även armarnas längder ha mätts, dels i grader och dels med respektive objekts storaxel som enhet. De funna medelvärdena voro respektive $330° \pm 11°$ och $1{,}76 \pm 0{,}04$.

Oftast har varje vintergata endast tvenne armar. Om dessa båda jämföras inbördes, finner man, att som regel den ena armen är väsentligt längre än den andra. Detta gäller såväl för de allra närmaste vintergatorna som för de längre bort belägna. Någon förklaring härför har icke kunnat givas.

Cyrill Brosset, *Elektrokemisk och röntgenkristallografisk undersökning av komplexa aluminiumfluorider*, Stockholm 1942. Disp. vid Stockholms Högskola den 22 maj 1942. Opponenter: professor A. Ölander och fil. lic. H. Arnfelt; extra opponent: docent L. G. Sillén.

De komplexa aluminiumfluoriderna utgöra en grupp föreningar bland vilka flera olika typer kunna särskiljas. Dessa uppvisa inbördes olikheter bl. a. med avseende på det stoikiometriska förhållandet mellan fluor och aluminium, vilket tycks kunna variera mellan 4 och 6. För att fastställa bildningsbetingelserna för några typer av ifrågavarande föreningar ha jämviktsförhållandena i lösningar innehållande aluminium- och fluorjoner studerats. Detta har skett på så sätt, att den genomsnittliga mängden komplext bunden fluor pr aluminium bestämts som funktion av fluorjonkoncentrationen. Mätningarna av den senare ha utförts enligt två olika metoder, vilka basera sig på elektometriska bestämningar av vätejonkoncentrationen resp. ferrijonkoncentrationen i lösningar, där jonstyrkan och sålunda även aktivitetsfaktorerna hållits konstanta genom en stor tillsats av ett neutralsalt. Dessa mätningar visade, att i lösningar innehållande aluminium- och fluorjoner med stigande fluorjonkoncentration inträffar en succesiv bildning av komplexen AlF^{2+}, AlF_2^+ ..... AlF_5^{2-} samt troligen även av AlF_6^{3-}. Förekomsten av flerkärniga komplex ävensom av komplexa syror kunde i de undersökta koncentrationsintervallen icke påvisas.

Genom liknande mätningar har utfällningen av vissa komplexa aluminiumfluorider studerats. Härvid fastställdes, att olika typer av komplexa aluminiumfluorider kunna erhållas som fällning beroende på den fluorjonkoncentration vid vilken utfällningen ägt rum. Slutligen har också visats, att utfällda kryoliter kunna ha variabel sammansättning i det en del fluorjoner i dessa kunna substitueras med vattenmolekyler, varvid det mot den negativa laddningsminskningen svarande antalet katjoner bortfaller ur gittret. Sålunda har den vid måttliga fluorjonkoncentrationer utfällda natriumkryoliten sammansättningen $Na_{2,5}\ AlF_{5,5}\ (H_2O)_{0,5}$.

Arbetets sista del omfattar en röntgenkristallografisk undersökning av några olika typer komplexa aluminiumfluorider. Atomernas anordning har bestämts i följande föreningar: $TlAlF_4$ (jämte några isomorfa föreningar), $Na_5Al_3F_{14}$ (mineralet chiolit), Tl_2AlF_5, $K_2AlF_5 \cdot H_2O$ och K_3AlF_6. Härvid visade det sig, att i samtliga dessa föreningar aluminiumatomen alltid är omgiven av 6 fluoratomer i oktaedrisk gruppering. Det synes som om AlF_6-oktaedern vid uppbyggnaden av komplexa aluminiumfluorider spelar samma roll som SiO_4-tetraedern hos silikaten.

Problemavdelning.[1]

Matematiska uppgifter.

1232) *En tangent till kurvan* $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *avskär ett segment, i vilket en rektangel inskrives. Bestäm maximum av förhållandet mellan rektangelns och segmentets ytor.* *X.*

1233) *Ekvationen* $(\cos x - a)(\cos v - a) + \sin x \sin v = \frac{a^2 - 1}{2}$ *förutsättes ha två olika lösningar* x_1 *och* x_2. *Visa, att*

$$(\cos x_1 - a)(\cos x_2 - a) + \sin x_1 \sin x_2 = \frac{a^2 - 1}{2}.$$ *X.*

1234) *Tangenten till en kurva i punkten P skär två fasta linjer i A och B. Konstruera tangenten i M till orten för AB:s mittpunkt M.* *X.*

Enklare matematiska uppgifter.[2]

1235) I en rätvinklig triangel bilda de båda linjer, som från den inskrivna cirkelns medelpunkt utgå till tyngdpunkten och den räta vinkelns spets, vinkeln 135° med varandra. Beräkna förhållandet mellan triangelns sidor.

Svar: 3 : 4 : 5.

1236) I en likbent triangel går den inskrivna cirkeln genom den omskrivna cirkelns medelpunkt. Beräkna toppvinkeln.

Svar: 90° eller 34°,06.

1237) I en rätvinklig triangel, vars ena spetsiga vinkel är α, drages höjden mot hypotenusan. De gemensamma tangenterna till de cirklar, som kunna omskrivas kring deltrianglarna, bilda vinkeln β med varandra. Visa, att $2 \sin 2\alpha = 1 + \cos \beta$.

1238) Lös ekvationen

$$\cos 2x(1 - 4 \cos x) + 2 \sin^2 x = 2.$$

Svar: $\pm 60° + n \cdot 360°$; $\pm 72° + n \cdot 360°$; $\pm 144° + n \cdot 360°$.

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. Bågman, till vilken uppgifter och lösningar kunna insändas under adress: Högre allm. läroverket å Östermalm, Stockholm.

[2] Uppg. 1235—1237, 1239 äro insända av *P.*, 1238, 1242 av *Ewe*, 1240—1241 av *T. Edqvist*, 1243 av *S. B.*, 1244 av *X.*

1239) I en pyramid med toppen O och den rektangulära eller kvadratiska basytan $ABCD$ äro alla sidokantlinjerna 12 cm. Ett plan lägges genom B och två punkter E och F på resp. OA och OC så, att $OE = 3$ cm och $OF = 4$ cm. Planet skär OD i G. Beräkna längden av OG samt förhållandet mellan de delar, vari pyramiden delas av planet.

Svar: $OG = 2$ cm. Förh. $= 7 : 137$.

1240) En regelbunden tetraeder med höjden h är given. Ett klot med den variabla radien r tangerar tre bestämda sidoytor (men icke deras förlängningar). Beräkna största och minsta värdet på den del av klotets yta, som befinner sig inom tetraedern. Undersök även de fall, då tetraedern ersättes med en kon, vars toppvinkel är större eller mindre än den i en regelbunden tetraeder inskrivna konens, och klotet tangerar konmanteln (ej förlängd) längs en cirkel.

Svar: Största värdet $= \frac{\pi h^2}{4}$ för $r = \frac{h}{4}$.

Minsta » $= \frac{3\pi h^2}{16}$ för $r = \frac{3h}{8}$.

1241) Man vill draga omkull ett vertikalt stående träd genom att i en punkt P på stammen, belägen på avståndet x från trädets rot R, fästa ett rep och draga i det med konstant kraft. För vilket värde på x är kraftens vridningsmoment så stort som möjligt, om repets effektiva längd är l och händerna måste befinna sig på höjden h över den horisontella marken?

Svar: $x = \frac{1}{4}(3h + \sqrt{h^2 + 8l^2})$.

1242) Genom de, från origo räknat, bortre belägna skärningspunkterna mellan kurvan $y = x^4 - 4x^2 + 3$ och x-axeln dragas tangenterna. Beräkna ytan av den triangel, som begränsas av dessa tangenter och tangenten genom kurvans minimipunkter.

Svar: $\frac{121\sqrt{3}}{12} = 17{,}47$ ytenheter.

1243) Angiv ekvationerna för dubbeltangenterna till kurvan $y = x^5 - 5x^3 + 10x$.

Svar: $y = 5x + 2$, $y = 5x - 2$, $y = 3{,}75x$.

1244) Dubbeltangenten till kurvan $y = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ berör kurvan i A och B. Tangenten i C är parallell med dubbeltangenten. Visa, att $2x_C = x_A + x_B$.

Lösn. till uppg. 1204—1206.

1204) *Toppen i en pyramid utgöres av ett regelbundet n-sidigt hörn. Tre på varandra följande sidokanter ha längderna a, b och c. Beräkna de övrigas längd.* *X.*

Pyramidens topp är O, $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ de tre givna kanterna samt $OX = x$ en godtycklig kant. Vi tänka oss en pyramid $O(A_1B_1C_1X_1)$ med alla sidokanter $= m$. Enl. en känd sats är då $O(ABC) : O(A_1B_1C_1) = abc : m^3$. Likheten $O(ABC) + O(ACX) = O(ABX) + O(BCX)$ jämte satsen : pyramider med samma höjd förhålla sig som basytorna ger nu

$$\frac{abc}{m^3} \cdot \triangle A_1B_1C_1 + \frac{acx}{m^3} \cdot \triangle A_1C_1X_1 = \frac{abx}{m^3} \cdot \triangle A_1B_1X_1 + \frac{bcx}{m^3} \cdot \triangle B_1C_1 \cdot X_1.$$

Sättes $\sphericalangle B_1A_1C_1 = \alpha = \frac{180^\circ}{n}$, $\sphericalangle C_1A_1X_1 = \beta$, så bli ytorna av triangelarna $A_1B_1C_1$, $A_1C_1X_1$, $A_1B_1X_1$, $B_1C_1X_1$ enl. ytteoremet och formeln $a = 2R \sin A$ proportionella mot $\sin^2 \alpha \sin 2\alpha$, $\sin 2\alpha \sin \beta \sin (2\alpha + \beta)$, $\sin \alpha \sin (\alpha + \beta) \sin (2\alpha + \beta)$, $\sin \alpha \sin \beta \sin (\alpha + \beta)$. Ovannämnda ekv. ger alltså värdet på x. *S. B.*

1205) *Lös ekvationssystemet*

$$\left.\begin{aligned} 1 + (y - z)^2 &= 2x \\ 16 + (z - x)^2 &= 8y \\ 81 + (x - y)^2 &= 18z \end{aligned}\right\}. \qquad X.$$

Sätt $y - z = u$ och $z - x = v$, så blir $x - y = -(u + v)$. Systemet övergår i $1 + u^2 = 2x$, $16 + v^2 = 8(x + u + v)$, $81 + (u + v)^2 = 18(x + v)$. Elimination av x ger $4u^2 - v^2 + 8u + 8v - 12 = 0$, $8u^2 - v^2 - 2uv + 18v - 72 = 0$ eller $(2u - v + 6)(2u + v - 2) = 0$, $(2u - v + 6)(4u + v - 12) = 0$, som sönderfaller i $2u - v + 6 = 0$ (1) och $\begin{cases} 2u + v - 2 = 0 \\ 4u + v - 12 = 0 \end{cases}$

I (1) sättes $v = 4 - 4t$, $\because u = -1 - 2t$, $x = 1 + 2t + 2t^2$, $y = 4 - 4t + 2t^2$, $z = 5 - 2t + 2t^2$. Det senare systemet ger $u = 5$, $v = -8$, $x = 13$, $y = 10$, $z = 5$. Då t är ett godtyckligt tal, medger systemet alltså ett obegränsat antal lösningar. *S. B.*

Även löst av *Sbm.*, *H. M.* och *O. Borgersen.*

1206) *I likheten* $(1 + \sqrt{5})^n = A_n + B_n \cdot \sqrt{5}$, *där* $n = 1, 2, \ldots$, *äro* A_n *och* B_n *positiva, hela tal. Visa, att såväl* A_n *som* B_n *äro jämnt delbara med* 2^{n-1}. *Stig Comét.*

Av $A_{n+1} + B_{n+1} \cdot \sqrt{5} = (A_n + B_n \sqrt{5})(1 + \sqrt{5}) = A_n + 5B_n + (A_n + B_n)\sqrt{5}$ framgår: $A_{n+1} = A_n + 5B_n$ (1), $B_{n+1} = A_n + B_n$ (2). Enligt (2) är $A_n = B_{n+1} - B_n$ och $A_{n+1} = B_{n+2} - B_{n+1}$. Insatt i (1) ger detta $B_{n+2} = 2B_{n+1} + 4B_n$ (3). På samma sätt erhålles

$A_{n+2} = 2A_{n+1} + 4A_n$ (4). Antages nu A_n delbar med 2^{n-1} och A_{n+1} delbar med 2^n, ger alltså (4): $A_{n+2} = 2 \cdot 2^n \cdot a_{n+1} + 4 \cdot 2^{n-1} \cdot a_n =$ $= 2^{n+1}(a_{n+1} + a_n)$ (5), där a_n och a_{n+1} äro hela tal. A_{n+2} är i så fall delbar med 2^{n+1}. Men för $n = 1$ är antagandet riktigt, ty $A_1 = 1$ är delbar med 2^0 och $A_2 = 6$ är delbar med 2^1. Därigenom är påståendet bevisat för talen A_n. Samma bevis gäller för talen B_n. Även löst av *H. M.* *Lars Krogset.*

Resultat av pristävlan.

I tidskriftens decemberhäfte 1942 inbjödos elever vid allmänna läroverk, tekniska gymnasier och med dessa jämställda enskilda läroanstalter till en pristävlan. Det gällde att lösa minst tre av fyra matematiska uppgifter.

Efter granskning av de inkomna tävlingsskrifterna ha följande pris utdelats:

Första pris, årg. 1—22 (1920—41) av Populär Astronomisk Tidskrift, vilka skänkts av Svenska Astronomiska Sällskapet, har tilldelats Tord Gustafsson, elev (våren 1942) i R III[4] vid Högre reallärov. å Norrmalm i Stockholm.

Andra och tredje pris ha tilldelats resp. Gösta Carlson, student våren 1942 vid Högre allm. lärov. i Eskilstuna och Olle Andersson, elev (våren 1942) i R II[3] vid Högre allm. lärov. i Falun. Prisen utgjordes av årgångsserier av Elementa, årg. 15—24, resp. 20—24.

Utom tävlan ha lösningar insänts av signaturerna *B-r, N. J.* och *X.*

Här nedan meddelas några av de bästa lösningarna; 1 a, 2, 3 a, 4 a representera analytiska metoder och 1 b, 3 b, 4 b geometriska.

1. Till en parabel dragas två fasta tangenter. En rörlig tangent skär dessa i A och B. Vilket är det minsta värde sträckan AB kan antaga?

a. Inlägg ett rätvinkligt koordinatsystem med x-axeln utefter parabelns axel och låt tangeringspunkternas ordinator vara a och b $(a > b)$ för de fasta och y_1 för den rörliga tangenten. Man får då $y_A = \frac{a + y_1}{2}$; $y_B = \frac{b + y_1}{2}$. Skillnaden $y_A - y_B$ är alltså konstant $= \frac{a - b}{2}$, och AB blir då minst, om $x_A - x_B = 0$, d. v. s. om den rörliga tangenten är vertextangent. Dess minsta värde är då $\frac{a - b}{2}$.

B-r.

b. De fasta tangenterna råka vertextangenten i C och D; CD skär AB i P; F är fokus och O vertex. Då $\angle FPA = \angle FCA = 90°$, kan en cirkel läggas genom punkterna F, P, C och A. Alltså blir $\angle FCP = \angle FAP$. På samma sätt blir $\angle FDP = \angle FBP$ och $\therefore \triangle FCD \sim \sim \triangle FAB$. Då för de likbelägna höjderna FO och FP gäller, att $FO < FP$, blir även $CD < AB$. Om den rörliga tangenten är vertextangent, blir alltså AB minst. *G. Carlson.*

2. Den vid C rätvinkliga triangeln ABC:s yta är T. På sidan AB väljes punkten D så, att de i trianglarna ACD och BCD inskrivna cirklarna bli lika stora. Visa, att längden av CD är $\sqrt{T}$.

Omkretsarna av trianglarna ABC, ACD och BCD antagas vara resp. $2p$, $2p_1$ och $2p_2$, inskrivna cirkelns radie antages vara r i den förra samt r_1 i vardera av de senare; sätt $CD = x$. Dragas bissektriser till vinklarna A och B, får man $\frac{r_1}{r} = \frac{p_1 - x}{p - a} = \frac{p_2 - x}{p - b} = \frac{p_1 + p_2 - 2x}{2p - a - b} = \frac{p - x}{c}$. Vidare är $T = p_1 r_1 + p_2 r_1 = r_1(p + x)$, alltså blir $p^2 - x^2 = \frac{cT}{r} = cp$ och $x = \sqrt{p(p - c)} = \sqrt{pr \cot \frac{C}{2}} = \sqrt{T \cot \frac{C}{2}}$; för $C = 90°$ erhålles $x = \sqrt{T}$. *B-r.*

3. Från en rörlig punkt P på en cirkel fällas normalerna PN_1 och PN_2 mot två fixa diametrar i cirkeln. Sök geometriska orten för de in- och vidskrivna cirklarnas medelpunkter i triangeln PN_1N_2.

a. Den givna cirkeln antages vara $x^2 + y^2 = r^2$, diametrarna AB och CD antagas vara $y = \pm x \operatorname{tg} \alpha$ och OP $y = x \operatorname{tg} v$ med $-\alpha < v < \alpha$. Fyrhörningen ON_1PN_2 kan inskrivas i en cirkel med radien $\frac{r}{2}$; således är $N_1N_2 = r \sin 2\alpha$. Vidare är $PN_1 = r \sin(\alpha - v)$ och $PN_2 = r \sin(\alpha + v)$. I triangeln PN_1N_2 är då $p = r \sin \alpha (\cos \alpha + \cos v)$. Medelpunkterna M i den inskrivna och M_1 i den vid N_1N_2 vidskrivna cirkeln ha samma ordinata som P, och abscissorna äro resp. $r \cos v - \frac{p - N_1N_2}{\sin \alpha} = r \cos \alpha$ och $r \cos v - \frac{p}{\sin \alpha} = -r \cos \alpha$. Således ligger M på den korda, låt vara AC, som faller i samma vinkelöppning mellan diametrarna som P. M_1 ligger på den motsatta kordan BD. De båda andra cirklarnas medelpunkter M_2 och M_3 ha samma abscissa som P samt ordinatorna $r \sin v + \frac{p - PN_2}{\sin(90° - \alpha)} = r \sin \alpha$ och $r \sin v - \frac{p - PN_1}{\sin(90° - \alpha)} = -r \sin \alpha$. De ligga alltså på förlängningarna av DA och BC.

Utsträckes samma betraktelse till alla fyra vinkelöppningarna, får man då, att:

> M och M_1 båda beskriva omkretsen av rektangeln $ACBD$; M_2 och M_3 beskriva de L-formiga stycken utanför rektangelns hörn, som den kring cirkeln omskrivna kvadraten avskär av rektangelsidornas förlängningar; vardera punkten beskriver två diagonalt motsatta av dessa figurer. *B-r.*

b. Om N_1 och N_2 ligga på resp. radierna OA och OB av de givna diametrarna AC och BD, så skall visas, att PA och D_AA_B halvera varandra, likaså PB och A_BB_C, PC och B_CC_D samt PD och C_DD_A, där A_B är centrum för den inskrivna cirkeln, B_C för den vid PN_2 vidskrivna cirkeln, C_D för den vid N_1N_2 och D_A för den vid PN_1 vidskrivna cirkeln. Cirkeln genom P, N_1 och N_2 halverar till en början PA, PB, PC och PD i A', B', C' och D', emedan den har OP till diameter och således är likställd med den givna cirkeln med P som yttre likställighetspunkt och likställighetsförhållandet $1:2$. A', B', C' och D' ligga på resp. bissektriser i triangeln PN_1N_2. Enligt satsen om vinkelns konstans i ett cirkelsegment är nämligen $\angle PN_1B' = \angle POB' = \frac{1}{2}\angle POB = \frac{1}{2}\angle PN_1N_2$; $\angle PN_2A' = \frac{1}{2}\angle PN_2N_1$; N_1D' halverar sidovinkeln till $\angle PN_1N_2$, eftersom den är vinkelrät mot bissektrisen N_1B'. $B'D'$ är nämligen på grund av likställigheten diameter i cirkeln PN_1N_2. N_2C' halverar sidovinkeln till $\angle PN_2N_1$. Betrakta vi slutligen triangeln $A_BB_CD_A$ så går cirkeln PN_1N_2 genom höjdernas fotpunkter. Den är alltså s. k. niopunktscirkel [1] och halverar därför sidorna. Av samma skäl halverar den C_DD_A och C_DB_C. Härav framgår, att PA och D_AA_B halvera varandra i A', PB och A_BB_C i B', PC och B_CC_D i C' samt PD och C_DD_A i D'. Emedan $\angle A_BPD_A$ är rät, är således A_BAD_AP en rektangel, och analogt A_BBB_CP, D_ADC_DP och B_CCC_DP, vilket innebär, att sträckorna AB och CD samt förlängningarna av sträckorna DA och CB åt A och B till äro orterna för resp. den inskrivna cirkelns centrum A_B och de utanför N_1N_2, PN_1 och PN_2 vidskrivna cirklarnas centra C_D, D_A och B_C, så länge P befinner sig i vinkelrummet AOB; motsvarande resultat för de andra vinkelrummen BOC, COD och DOA erhållas, om bokstäverna A, B, C och D permuteras cykliskt.

N. J.

[1] Niopunktscirkeln går genom höjdernas fotpunkter, sidornas mittpunkter samt mittpunkterna av höjdernas närmast spetsen belägna segment.

4. En triangels vinklar äro α, β och γ; de inre bissektriserna äro l_a, l_b och l_c. Visa att punkterna $\left(l_a; \frac{\alpha}{2}\right)$, $\left(l_b; \frac{\beta}{2}\right)$ och $\left(l_c; \frac{\gamma}{2}\right)$ i ett polärt koordinatsystem $(r; v)$ ligga på en rät linje. Jämför ytan av den triangel, som denna linje bildar med strålarna $v = 0$ och $v = \frac{\pi}{2}$ med den givna triangelns yta.

a. Med sedvanliga beteckningar är $p - a = r \cot \frac{\alpha}{2}$ och $T = \frac{1}{2} b l_a \sin \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} c l_a \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(2p - a) l_a \sin \frac{\alpha}{2}$. Elimineras a, får man $T = pr = \frac{1}{2} p l_a \sin \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} r l_a \cos \frac{\alpha}{2}$ eller i interceptform:

$$\frac{l_a \cos \frac{\alpha}{2}}{2p} + \frac{l_a \sin \frac{\alpha}{2}}{2r} = 1.$$

Punkten $\left(l_a; \frac{\alpha}{2}\right)$ ligger alltså på linjen genom $(2p; 0)$ och $\left(2r; \frac{\pi}{2}\right)$. Då analoga samband tydligen gälla för $\left(l_b; \frac{\beta}{2}\right)$ och $\left(l_c; \frac{\gamma}{2}\right)$, följer härav, att dessa tre punkter ligga på samma räta linje. Denna bildar med $v = 0$ och $v = \frac{\pi}{2}$ en triangel med ytan $\frac{1}{2} \cdot 2p \cdot 2r = 2T$.

B-r.

b. På varje bissektris ligger dels den inskrivna cirkelns medelpunkt I, dels medelpunkten I_a för den vid motstående sida a vidskrivna cirkeln. Punkterna I och I_a dela bissektrisen harmoniskt. Om även dessa punkter utmärkas i det polära systemet, så falla de tre punkterna I på linjen $y = r\,(i)$, punkterna I_a, I_b, I_c på linjen $x = p\,(j)$ i det rätvinkliga systemet, som på vanligt sätt är adjungerat till det polära. Linjerna i och j råkas under räta vinklar i P $(p; r)$. Därav följer,[1] att bissektrisernas ändpunkter alla tre ligga på spegelbilden av OP i linjen i (eller j), en linje som (kan) kallas polaren till O med avseende på linjeparet $(i; j)$. Då denna polar har intercepten $2r$ och $2p$, är den med axlarna bildade triangelns yta $= 2pr = 2T$.

X.

[1] Linjeparet $(i; j)$ utgör ett urartat kägelsnitt. Orten för 4-e harmoniska punkten, då en sekant till kägelsnittet vrider sig kring O, är en rät linje, polaren till O.

Not om lösningen av problem 1191.

Vid lösningen av problem 1191 i föregående häfte (25, 115) har förf. endast visat, att villkoret för att D skall ligga på basytans tyngdpunktsnormal är nödvändigt, men ej att det är tillräckligt. Detta följer av följande resonemang. Till tre punkter på en rät linje kan man tillordna en punkt, kallad medelpunkt, vars koordinat är medelvärdet till de tre givnas. Om tre plan P, Q och R gå genom en linje, så ligga mittpunkterna på alla linjer, parallella med R och begränsade av P och Q i ett plan S; P, Q, R och S bilda ett harmoniskt planknippe. Om ordet mittpunkterna i föreg. sats ersättes med delningspunkterna i förhållandet $m : n$, så erhålles ett annat plan S_1. Om tre plan P, Q och R gå genom en punkt och skäras av en skara parallella linjer, L, så ligga medelpunkterna till skärningspunkterna mellan L och P, Q, R i ett plan T (följer av föreg. två satser).

I uppgift 1191 skäras sidoytorna av linjer, parallella med höjden. Medelpunkterna komma således att ligga i ett plan. Om D ligger på basytans tyngdpunktsnormal, visas, att $\frac{PQ_1 + PQ_2 + PQ_3}{3}$ blir konst. för de tre hörnen. Alltså ligga medelpunkterna i ett plan, parallellt med basen. *F. E.*

Fyllnadsprövning efter studentexamen.

Augusti—september 1942.

Matematiska uppgifter för latinlinjen.

1. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2\,\frac{1}{2}; \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$$

2. En person ämnar vid slutet av varje år fr. o. m. år 1942 t. o. m. år 1951 i en bank insätta ett så stort belopp, att han vid början av vart och ett av tio på varandra följande år fr. o. m. 1963 kan lyfta 1 000 kr. Hur stort skall det förstnämnda beloppet minst vara, om räntefoten hela tiden antages vara $3\frac{1}{2}$ %?
3. I ett cirkelsegment är kordan 6 cm och höjden 4 cm. Beräkna segmentets yta.
4. I triangeln ABC är vinkeln A 70°. Genom mittpunkten på sidan AB och en punkt på förlängningen av AC från A räknat drages en rät linje, så att avståndet från B till denna blir fjärdedelen av höjden mot AC. Hur stor vinkel bildar linjen med AC:s förlängning?

5. Från ett fartyg med rakt nordlig kurs och 10 knops fart ser man kl 13 i ostlig riktning en motorbåt på ett avstånd av 12 sjömil. Kl 13.30 ser man den i nordostlig riktning på ett avstånd av 6 sjömil. Beräkna motorbåtens hastighet, om denna liksom rörelseriktningen kan förutsättas vara densamma hela tiden. 1 knop = 1 sjömil per timme.
6. En triangel är inskriven i en cirkel med radien 5 cm. Summan av två sidor i triangeln är 13 cm, och höjden mot den tredje sidan är 4 cm. Beräkna triangelns sidor. Två fall förekomma, vilka båda böra behandlas.
7. I en cirkel med radien R och medelpunkten O_1 är AB en diameter. Med AO_1 som diameter uppritas en andra cirkel med medelpunkten O_2; med O_1O_2 som diameter en tredje cirkel med medelpunkten O_3; med O_2O_3 som diameter en fjärde cirkel med medelpunkten O_4 o. s. v. På detta sätt erhålles en serie cirklar, vilka avtaga i storlek och av vilka var och en tangerar den närmast föregående innantill. Då antalet cirklar växer obegränsat, närma sig cirklarnas medelpunkter en viss punkt. Hur långt från A kommer denna punkt att ligga?
8. I en triangel ABC äro hörnen belägna på den kurva, som erhålles, om man representerar funktionen $y = x^2$ grafiskt i ett rätvinkligt koordinatsystem, där längdenheten på såväl x- som y-axeln är 1 cm. Hörnen A, B och C ha x-koordinaterna 1, 2 och -3 respektive. Beräkna storleken av vinkeln A samt triangelns yta.

Resultat: **1.** $\begin{array}{c|c|c|c|c} x & 1 & 2 & -1 & -2 \\ \hline y & 2 & 1 & -2 & -1 \end{array}$. **2.** 502,6 kr. **3.** 20,73 cm². **4.** 41°,98. **5.** 24,1 knop. **6.** 5 cm, 8 cm, $(4\sqrt{3} \pm 3)$ cm. **7.** $\frac{2}{3}$ av radien. **8.** 45° och 10 cm².

Matematiska uppgifter för realgymnasiet.

Allmän kurs.

1. En rät linje genom punkten P (5; 4) bildar med x-axeln och den räta linjen $2x - y - 6 = 0$ en triangel. Då den förstnämnda linjen vrider sig kring P, inträffar det för vissa lägen, att triangelns yta blir 14 ytenheter. Vilken är då linjens ekvation?
2. Bestäm konstanterna a och b i funktionen $y = a + bx - x^2$, så att motsvarande kurva går genom punkterna $(-1; 0)$ och $(0; 2)$. Beräkna därefter ytan av den triangel, som bildas av kurvans normaler i de nämnda punkterna samt dessa punkters sammanbindningslinje.

3. Vinkeln mellan de linjer, som i en romb förena en sidas mittpunkt med den motstående sidans ändpunkter, är 45°. Beräkna rombens vinklar.
4. Lös ekvationen $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin 4x + \cos 4x$.
5. *ABCD* är basyta i en kub och *E* ett av kubens hörn så beläget, att *AE* är diagonal i kuben. Man kan då finna en punkt *P* på *AE* och en punkt *Q* på basytans diagonal *BD*, så att linjen *PQ* blir vinkelrät såväl mot *AE* som mot *BD*. Sök läget av *P* och *Q*.
6. I en triangel är höjden mot den längsta sidan fjärdeproportional till de tre sidorna samt tredjeproportional till de båda andra höjderna. Beräkna triangelns vinklar.
7. En given rät cirkulär kon är liksidig (d. v. s. en plan sektion genom höjden är en liksidig triangel). Ett sfäriskt segment har samma plana begränsningsyta som konen och är vänt åt samma håll som denna. En sfär, belägen utanför segmentet, tangerar dettas buktiga yta och dessutom längs en cirkel konens mantelyta. Bestäm förhållandet mellan höjderna i segmentet och konen, då summan av sfärens och segmentets ytor är så liten som möjligt.
8. En geometrisk serie består av de olika stora termerna t_1, t_2, t_3, ..., t_n. Var och en av termerna t_1, t_2, t_3, ..., t_{n-1} multipliceras successivt med var och en av de termer i serien, som ha högre ordningsnummer. Summan av dessa produkter betecknas med *S*. Summan av de *r* första termerna i den geometriska serien betecknas med s_r. Bestäm seriens kvot, så att sambandet $S = \frac{3}{4} s_{n-1} \cdot s_n$ kommer att gälla.

Resultat: **1.** $4x + 5y - 40 = 0$; $4x - 9y + 16 = 0$. **2.** $a = 2$; $b = 1$; $5\frac{1}{4}$ ytenheter. **3.** 48°,59 och 131°,41. **4.** $n \cdot 90°$; $26°,57 + n \cdot 90°$. **5.** Punkterna *Q* och *P* ligga så, att $BQ = \frac{1}{2} BD$ och $AP = \frac{1}{3} AE$. **6.** 90°; 51°,83 och 38°,17. **7.** $\frac{4}{13}$. **8.** Kvoten är 3. Storheten *S*, här betecknad S_n, är summan av de tvålediga produkterna av t_1, t_2, t_3, ... t_n. Av $S_n - S_{n-1} = t_n(t_1 + t_2 + t_3 + \ldots t_{n-1}) = s_{n-1}(s_n - s_{n-1})$ erhålles genom införande av $S_n = \frac{3}{4} s_n \cdot s_{n-1}$ och $S_{n-1} = \frac{3}{4} s_{n-1} \cdot s_{n-2}$ ekvationen $\frac{3}{4} s_{n-1}(s_n - s_{n-2}) = s_{n-1}(s_n - s_{n-1})$ eller $4s_{n-1} = s_n + 3s_{n-2}$ eller $4(k^{n-1} - 1) = k^n - 1 + 3(k^{n-2} - 1)$. Efter reduktion och division med k^{n-2} fås $4k = k^2 + 3$, varav $(k = 1)$ och $k = 3$.

Matematiska uppgifter för realgymnasiet.

Specialkurs.

1. I en konvergent oändlig geometrisk serie med positiva termer är första termen lika med kvadraten på kvotens inverterade värde. Bestäm det minsta värde, som seriens summa kan antaga.
2. Vilken är excentriciteten hos en hyperbel, vars parameter, om den utdrages, träffar konjugathyperbelns parameter i dess ändpunkt?
3. Bestäm konstanterna a och b, så att kurvan $y = a(x^2 + 2) + bx$ skär kurvan $y = x^3 - 3x^2$ under rät vinkel i den senare kurvans inflexionspunkt. Bestäm därefter kurvornas skärningspunkter, och upprita kurvorna.
4. Punkterna P och Q äro belägna på en ellips och utgöra ändpunkter för var sin av två konjugatdiametrar. F och F_1 äro ellipsens brännpunkter, O dess medelpunkt. Visa, att PO är medelproportional till QF och QF_1.
5. Från en parabels vertex dragas två mot varandra vinkelräta kordor, vilkas andra ändpunkter äro P och Q. Sök och konstruera orten för mittpunkten på sträckan PQ.
6. Omkring ett givet halvklot omskrives en regelbunden tresidig pyramid, så att halvklotets plana yta och pyramidens basyta ligga i samma plan. Hur stor vinkel bilda sidoytorna med basytan, då pyramidens totala yta är så liten som möjligt?
7. Mellan variablerna x, y och z gälla sambanden

$$y = z - e \sin z, \quad \operatorname{tg} \frac{z}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2},$$

där e är en konstant. Uttryck derivatan av y med avseende på x som en funktion av x, innehållande endast $\cos x$.

Resultat: **1.** $6\frac{3}{4}$. **2.** $\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$. **3.** $a = -2\frac{1}{3}$ och $b = 5$. Skärningspunkterna äro: $(1; -2)$, $(2; -4)$ och $(-2\frac{1}{3}; -29\frac{1}{27})$. **5.** Om parabelns ekv. är $y^2 = 2px$, är ortens ekv. $y^2 = p(x - 2p)$. **6.** 60°. **7.** $\frac{(1-e^2)^{3/2}}{(1+e\cos x)^2}$. (Den andra ekv. ger efter kvadrering $\cos z = \frac{e+\cos x}{1+e\cos x}$).

Uppgifter i fysik.

Obs. Lösningarna till uppgifterna 1 och 2 samt 5—8 böra åtföljas av enkla figurer. — Erforderliga konstanter, vilka ej äro uppgivna i problemens text, hämtas ur formelsamlingen.

1. En flaggstång, som är 4,0 m lång och väger 20 kg, fästes i 45° vinkel mot en vägg. Nedre ändan är rörlig kring en horisontell sprint, parallell med väggen. Stången hålles i sitt läge medelst ett stag, som utgår vinkelrätt mot stången på ett avstånd av 0,50 m från sprinten och är fastgjort i väggen. Stången och staget ligga båda i ett mot väggen vinkelrätt vertikalplan. Stången avsmalnar mot toppen; dess tyngdpunkt ligger på $^2/_3$ av stångens längd från toppen räknat. Huru stor blir dragspänningen i staget? Stagets egen vikt kan lämnas ur räkningen.
2. Ett 1,5 m långt otänjbart snöre uppbär två kulor. Den ena är fastgjord i snörets ena ända. Den andra, som är genomborrad längs en diameter, är uppträdd på snöret och kan glida utan nämnvärd friktion. Genom en stöt bringas kulorna att rotera i en vertikal cirkel med snörets andra ända som medelpunkt, varvid hastigheten blir sådan, att den rörliga kulan i sitt högsta läge berör den fastgjorda kulan utan att dock nämnvärt trycka mot densamma. Huru många gånger större är tryckkraften mellan kulorna i lägsta läget än den rörliga kulans tyngd? Kulans radie kan försummas i jämförelse med snörets längd.
3. För kontroll av bromsarna på bilar användes stundom en apparat, som i princip är en liggande fjädervåg, fästad vid vagnsgolvet så, att en mot fjäderns fria ända anbragt horisontell kraft i körriktningen sammantrycker fjädern och kommer en tillhörande visare att slå ut. Graderingen är utförd så, att visarutslaget angiver kraftens storlek direkt i kgf. Vid fjäderns fria ända är fastsatt en vikt, som är rörlig i horisontell led utan nämnvärd friktion. Då vagnen står stilla eller rör sig med konstant hastighet, erhålles intet utslag, men väl då vagnen bromsas. — Vid ett dylikt prov var fjädern försedd med en vikt av 1,0 kg, och bilen rörde sig på en horisontell bana med en fart av 60 km/tim. Vid kraftigaste möjliga uppbromsning av bilen ställde sig visaren konstant på 0,50 kgf. Huru stor bromssträcka måste bilen tillryggalägga, innan den stannade?
4. En elektrisk motor, som vid full belastning förbrukar 600 kW, har en verkningsgrad av 92 %. Den energi, som ej omsättes i mekaniskt arbete, övergår i värme i motorn. Motorn avkyles med luft, som medelst fläktar drives genom densamma. Den

uppvärmda luften får ej ha högre temperatur än 50° C. Huru många m^3 luft av trycket 760 mm kvicksilver och temperaturen + 10° C måste minst tillföras motorn per timme? Luftens spec. värme vid konstant tryck är 0,24 cal per g och grad.

5. Två likadana rätvinkliga glasprismer sammanfogas medelst kanadabalsam. I det sammansatta prismat *ABCD* äro vinklarna vid *A* och *C* vardera 68°, och vinklarna vid *B* och *D* 112°; sammankittningen har skett utefter diagonalen *BD*. Under vilken vinkel bör en monokromatisk ljusstråle infalla i huvudsnittet mot sidan *AB*, för att den nätt och jämnt skall totalreflekteras vid gränsytan mellan glas och kanadabalsam? Brytningsexponenterna äro: för glasprismat 1,658 och för kanadabalsam 1,549.
6. Genom att mellan objektivet och okularet i en astronomisk kikare inskjuta en lins, som rättvänder bilden, erhåller man en s. k. terresterkikare. I en dylik kikare var mellanlinsen placerad så, att den bild, som objektivet alstrade av ett mycket avlägset föremål, förstorades lineärt två gånger av mellanlinsen. Objektivets brännvidd var 40 cm och okularets 5 cm. Ögat förlade slutbilden långt bort. Huru stor var kikarens vinkelförstoring?
7. I punkten *A* är den positiva polen till ett galvaniskt element förenad med den negativa polen till en ackumulator. Elementets negativa pol *B* och ackumulatorns positiva *C* förbindas genom en 1 000 mm lång homogen mättråd *BC*, vars motstånd är 1,30 ohm. En bryggledning innehållande ett galvanoskop förbinder *A* med en glidkontakt *D*, som man förskjuter längs mättråden, tills galvanoskopet blir strömlöst. Detta inträffar, då $BD = 308$ mm. Man utbyter sedan mättråden mot en annan, likaledes 1 000 mm lång homogen tråd *B'C'*, vars motstånd är 6,20 ohm. Bryggströmmen försvinner nu för ett sådant läge *D'* av glidkontakten, att $B'D' = 404$ mm. Beräkna härav det galvaniska elementets elektromotoriska kraft, om ackumulatorns är 2,00 volt. De inre motstånden i elementet och ackumulatorn få icke försummas.
8. Man vill för uppvärmningsändamål under kortare tid med full belastning använda en värmeplatta för 1 500 W effekt. Förutom stadens likströmsnät, vars spänning kan anses vara konstant 110 V, vill man taga i anspråk ett ackumulatorbatteri med elektromotoriska kraften 78 V och inre motståndet 0,6 Ω. Båda strömkällorna skola parallellkopplas till plattan, batteriet direkt, stadsledningen över ett motstånd. Huru stort bör detta motstånd tagas, för att en fjärdedel av den av plattan utvecklade

effekten skall lämnas av batteriet? Ledningarna äro försedda med säkringar för 15 A, varigenom högre strömstyrka än 15 à 20 A icke kan uttagas.

Resultat: **1.** 37,7 kgf. **2.** 6 ggr. **3.** 28,3 m. **4.** 3463 m^3. **5.** Infallsvinkeln vid AB bör vara 36°,3. Enligt uppgiften angående vinklarna kan $\angle ABD$ vara antingen 90° eller 22°. Endast i förra fallet kan en stråle mot AB träffa BD på uppgivet sätt. **6.** 16 ggr. **7.** 1,50 volt. **8.** $2\frac{1}{3}$ ohm.

Tidskrifter.

Svensk kemisk tidskrift, 1942: 5—7.

Ur innehållet: E. SPERBER, Respirometer für die Zulaufzüchtung von Hefe; K. MYRBÄCK, INGA WALLIN o. B. KIHLBERG, Om hållbarheten av aneurin-natriumpyrofosfat-lösningar; K. MYRBÄCK und G. STENLID, Über die Spaltung der Gerstenstärke und den Mechanismus der Dextrinierung; A. FREDGA und GERD BENZ, Über einige γ-Selenderivate der n-Buttersäure; O. SAMUELSON, Om användningen av basutbrytande ämnen i den analytiska kemien; R. NILSSON, L. ENEBO o. E. BRUNIUS, Om vitamin A-verkan hos Rhodotorula. Meddelanden från Sveriges Kemiska Industrikontor om bl. a.: Återblick på Kemikontorets verksamhet under de gångna 25 åren; Den kemiska industrien och folkförsörjningen; Fosfat, kali o. kväve i kristid; Den svenska oljeväxtodlingen; Förberedande försök till syntetisk framställning av kautschuk.

Teknik för alla, 1942: 23—36.

Ur innehållet: Järnvägstelefon; Om småmotorer; Torvbriketter; Polisradio; Världens minsta järnväg; Färgtelevision; Fallskärmen; Carl G. Munters; Cykelbilen; Pumpen som »pumpar rakt»; Skogens revolution; Italiensk cellulosa; Biograforgel i närbild; Ur förbränningsturbinens utvecklingshistoria; Malmbanan Luleå—Gellivara—Riksgränsen; En U-båt går till havs. »Den unge kemisten», en artikelserie av I. Bolin. Mycket av intresse finnes under rubriken »Händigt folk».

Populär radio, 1942: 2—7.

Ur innehållet: Hur man gör en kondensatormikrofon; Reaktans för en spole vid lågfrekvens (nomogram); Rörvoltmeter för växel- och likspänningar; Radiomusiken och den akustiska kvaliteten; Rumsakustik och mikrofonplaceringen; De ultrakorta vågornas utbredning; Om enheterna decibel, neper och phon.

Ljuskultur, 1942: 1—2.

Ur innehållet: Volfram, glödlampans livsnerv; Belysningen i L. M. Ericssons nya fabrik; Något om scenbelysningens utveckling; Belysningen i Bolinder-Munktells bergverkstäder; Mätningar på lysämneslampor; Luxmetrars färgkänslighet; Elektriska lampors flimring.

Flygning, 1942: 4—15.

Ur innehållet: Flygplansbyggets material: Kolstål, Legerade stål; Den elektriska utrustningen i flygplan; Dykbromsar; Rullsträckan vid land-

ning; Gamla väderleksmärken till heders; Insprutningsflygmotorn; Om faror i lufthavet; Modernt vädermakeri; Vinden och landningssträckan; Konsthartser vid framställning av större flygplandelar; Den civila flygtrafiken i krigstid; Glimtar ur flygplanets förhistoria. Ett stort antal mindre artiklar om aktuella flygproblem.

Fysisk Tidsskrift, København 1942: 3.

Ur innehållet: H. M. Hansen, Professor A. W. Marke; H. Holst, Fysik og Determinisme; J. Ambrosen, Hurtig-registrering af atomare Partikler; J. Ambrosen, F. Nielsen og Th. Sigurgeirsson, Elektronrøret ELL1 som »scale of two».

Naturens Verden, København 1942: 1—6.

Ur innehållet: H. Mortensen, Tycho Brahes Grav; V. Madsen, Jordskorpens Bygning; Sophie Petersen, En Rejse i Västerbotten Sommeren 1941; E. Hovmøller, De strenge Vintre 1940, 1941, 1942; C. V. Sølver, Vikingernes Kompas; H. Petersen, Om en mulig Forbindelse mellem visse Epidemier og Sollyset.

Norsk Matematisk Tidsskrift, Oslo 1942: 1—2.

Ur innehållet: H. L. Selberg, Om en ulikhet fra den matematiske statistikk; W. Ljunggren, En egenskap ved de midtre binominalkoeffisienter; C. Størmer, Øvelseseksempel til forelesningene over algebrans fundamentalsats; L. Reitan, Om løsningen av ligningen $am^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Eksamensoppgaver; Oppgaver til løsning; Løste oppgaver.

Fra Fysikkens Verden, Oslo 1941—42: 3—4.

Ur innehållet: O. Devik, Vilhelm Bjerknes 80 år; Ellen Gleditsch, Kirstine Meyer, In memoriam; Kristine Bonnevie, Makro-mikroevulosjon; V. M. Goldschmidt, Om super-uraner; E. A. Hylleraas, Beregning av multiple integraler i kjernefysikken; E. A. Hylleraas, Galileo Galilei; H. v. Ubisch, En antikoinsidens-forsterker; F. Bugge, Om transformatorers vikemåte; O. Lindstad, Synsmåter og erfaringer fra fysikkundervisningen; O. Dahl og B. Trumpy, Høyvoltanlegget ved Haukeland Sykehus, Bergen; J. E. Fjeldstad, Tidevannsbølger med endelig amplitude; A. K. Brynildsen, Noen forsøk fra fysikk-kjemi; H. Bull, Varmestrålningens invirkning på lysutstrålingen fra fosforescerende stoffer.

Naturen, Bergen 1942: 6—7.

Ur innehållet: G. Ålvik, Om plantenes vekst-stoffer og deres virkemåte; S. Johnsen, Hvordan fuglene flyr, svømmer og dukker; K. Langlo-Olsen, Hvad er »atmospherics»?

Uppsatser i läroverkens årsredogörelser 1941—1942.

S. Norlindh, Om utnyttjandet av de officiella kartbladen vid geografiundervisningen. Morfologisk analys av två top. kartblad från dalslandsformationen (Högre allm. lärov. i Linköping).

H. Waldert, Några satser ur likformighetsläran (Samrealskolan i Huskvarna).

Nya rön och problem i fotometrien.[1]

Av GUNNAR NILSSON.

Samtidigt som fotocellernas utveckling medfört avsevärda lättnader i de fotometriska mätmetoderna har tillkomsten av nya ljuskällor med mer eller mindre diskontinuerliga spektra givit upphov till nya problem, som ofta äro rätt svåra att bemästra. Båda dessa förhållanden leda emellertid till en allt mera allmän användning av fotoceller eller fotoelement (spärrskiktceller).

De nya ljuskällorna äro alla grundade på luminescens genom elektrisk urladdning i gas eller metallånga. Det ligger i detta fenomens natur, att det erhållna ljuset får ett mer eller mindre diskontinuerligt spektrum, ehuru en uttänjning till breda band kan äga rum vid höga tryck, eller en kontinuerlig bakgrund till de karakteristiska linjerna kan erhållas genom fluorescens.

Bland fullt färdiga, för praktiskt bruk användbara lampor har man numera att räkna med natriumlampan och kvicksilverlampan med typiska linjespektra och rätt extrema resulterande ljusfärger samt kvicksilver-blandljuslampan och lysämneslampan som representanter för ett på kvicksilverångans starka spektrallinjer lagrat kontinuerligt spektrum. Detta åstadkommes i blandljuslampan med en glödtråd och i lysämneslampan genom tillvaratagande av den ultravioletta strålningen medelst fluorescerande ämnen. Den resulterande ljusfärgen blir i förra fallet snarlik det naturliga dagsljusets färg vid mulen himmel och kan i det senare teoretiskt varieras hur mycket som helst genom användning av olika lysämnen. I de hittills använda lysämneslamporna är dagsljusfärgen dominerande. Motsvarande färgvariationer finna vi även hos de huvudsakligen för ljusreklam använda lysrören, som kort och gott

[1] Denna uppsats utgör ett komplement till en uppsats av samme förf.: »Ljustekniska definitioner och enheter samt mätmetoder inom fotometrien», Elementa, *19*, 85—101, 1936. I denna tidigare uppsats lämnades en redogörelse för de grundläggande begreppen och definitionerna inom fotometrien och för de klassiska, subjektiva mätmetoderna. Föreliggande uppsats ägnar förf. åt det nya som tillkommit under de senare åren bl. a. den nya ljusnormalen och framför allt åt de objektiva mätmetoderna. *Red.*

bruka kallas neonrör, oavsett vilken sammansättning gasfyllningen har.

En blick på spektraldiagrammen (fig. 1) för dessa lampor säger nästan omedelbart, att de vanliga ljusmätningsmetoderna ej utan vidare kunna användas. Den subjektiva fotometrien går ju i regel ut på jämförelse av belysning från två ljuskällor, av vilka den kända, normalen, brukar vara en glödlampa eller i varje fall en temperaturstrålare med ett starkt överskott i rött och gult, dvs.

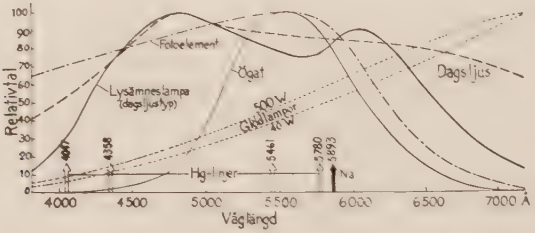


Fig. 1. Relativ spektral energifördelning för de vanligaste urladdningslamporna och för dagsljus samt känslighetskurvor för öga och selenfotoelement. Pilarna för Hg- och Na-linjerna ange endast läget. Intensiteten varierar med ångtryck och strömtäthet.

i det långvågiga synliga området. För subjektiva jämförelser — med ögat — stå i huvudsak två metoder till buds, nämligen filter- resp. flimmermetod.[1] Vid så stora färgskillnader, som det här rör sig om är det svårt att uppnå tillräcklig färglikhet med filter, och även flimmermetoden ger ganska stor osäkerhet, i synnerhet vid långvariga mätserier, som bli mycket tröttande för ögat.

Objektiv mätning med fotocell är därför att föredraga men förutsätter, att man antingen har en för ifrågavarande ljusfärg kalibrerad cell eller också en cell, vars spektrala känslighetskurva med lämpliga filter bringats att överensstämma med det »internationella normalögats» kurva.

1. Färgseendet.

Hur ögat reagerar för ljus av olika våglängd har man sedan mycket lång tid tillbaka sökt förklara med hjälp av olika hypoteser av vilka Youngs och Helmholtz' väl äro de mest kända. Först på senare tid har man kunnat angripa detta problem från fastare och mera verklig grund, sedan fysiologien tagit elektrotekniken till hjälp för direkta mätningar av synorganens reak-

[1] Se Elementa *19*, 93, 1936.

tioner för ljusretningar av olika slag. Synnerligen eleganta undersökningar ha utförts på olika djurs ögon av bl. a. professorn vid Karolinska institutet Ragnar Granit, som genom att anbringa en mikroelektrod på det öppnade ögats näthinna och förstärka impul-

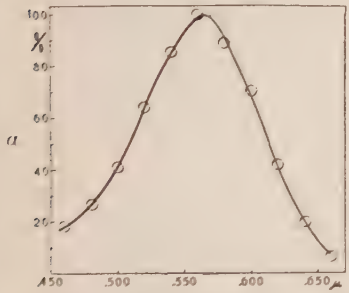


Fig. 2 a. Ljuskänslighetens fördelning i spektrum för sinneselement i grodögat, vilka tillhöra den typ som benämnts dominatorer på grund av dominerande förekomst och brett spektralband. Maximum omkring 5600 Å.

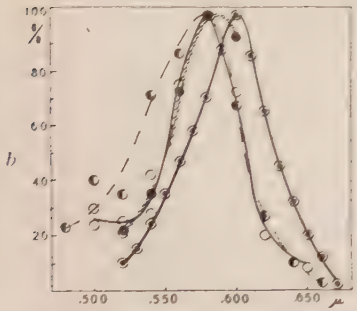
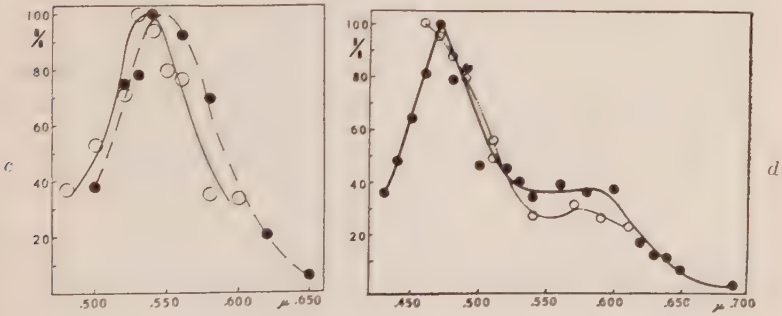


Fig. 2 b—d. Känslighetsfördelningen i spektrum för sinneselement hos groda, vilka tillhöra den typ som benämnts modulatorer. Dessa äro färre till antalet och representera smala känslighetsband. Diagrammen *b*, *c* och *d* visa kurvor för modulatorer, känsliga för resp.: långvågigt rött-gult, grönt och blått.



serna inemot en miljon gånger kunnat registrera dem med katodstråleoscillograf och samtidigt avlyssna dem i högtalare. Professor Granit redogjorde i ett föredrag nyligen i Svenska Belysningssällskapet för en del av sina forskningsresultat och påvisade, att färgseendet ingalunda är så enkelt, som man tidigare föreställt sig,

men också att det nu finns möjligheter att experimentellt klara ut sammanhangen. Av särskilt intresse äro de undersökningar, som gjorts på grodögat, vilket säkert är färgseende och mycket liknar människoögat. Det principiella resultatet är att det finns en dominerande receptortyp med ett brett spektralt känslighetsband, som kan kallas *dominator* (fig. 2 a) och som får anses förmedla intrycket av ljustäthet, den bakgrund av vitt, som är grunden för allt seende. Dessutom förekomma andra nervelement, som äro känsliga för smalare spektralband. De kunna kallas *modulatorer*. I grodögat finnas tre sådana, känsliga för resp. rött och gult—grönt—blått (fig. 2 b—d).

Man bör härav kunna dra den slutsatsen, att de smala modulatorerna tjäna till att avväga grundintrycket av ljustäthet till färg, i den proportion, varmed de medverka i retningen.

2. Normalögat.

De här i korthet nämnda undersökningarna understryka tyvärr det förut bekanta förhållandet, att alla subjektiva ljusmätningar bero av det öga, som utför dem. Och särskilt framträder vanskligheten i subjektiva färgmätningar, i det att modulatorerna variera hos olika individer.

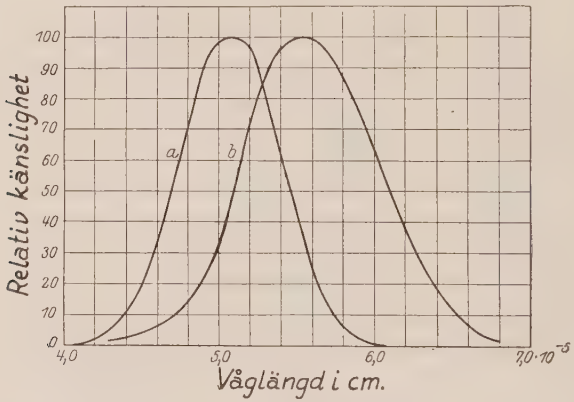


Fig. 3. Den internationella känslighetskurvan för normalögat vid ljus adapterat öga (tappseende, kurva b) samt motsvarande kurva för skymningsseende (stavkurvan, a).

Den normalkurva för det ljusadapterade ögat (fig. 3 eller utförligare, Elementa, *19*, s. 86), som fastställts av Internationella Belysningskommissionen, har också upprepade gånger varit föremål för

diskussion, och olika forskare ha bevisat, att den är felaktig. En sådan diskussion är enligt författarens åsikt ganska överflödig, ty man kommer alltid att få nya medelvärdeskurvor, ju flera ögon man tar med vid en undersökning. Och sedan man mer och mer börjat övergå till objektiva mätningar, är det huvudsaken, att man har en kurva fastlagd, efter vilken fotocellerna kunna anpassas. I den mån subjektiva mätningar med stora anspråk på noggrannhet fortfarande måste göras, får man antingen leta upp en observatör, vars öga har den rätta kurvan, eller korrigera med filter på samma sätt som för fotocellen.

3. Ny ljusnormal.

En sak, som just sammanhänger med färgseendet och som ställt till mycken oreda i fotometrien, är förekomsten av olika ljusnormaler. I Frankrike och engelsktalande länder hade man först Carcellampan och senare en »10-ljus pentanlampa» som normal, vilken sedermera ersattes med en serie mycket konstanta koltrådslampor, med vilka det s. k. internationella normalljuset upprätthölls. Det var dock ingalunda internationellt, då Tyskland m. fl. centraleuropeiska länder aldrig accepterade koltrådslamporna som normaler på grund av att de ej kunde reproduceras. Man fasthöll i dessa länder därför vid Hefnerlampan som urnormal, fastän man naturligtvis använde glödlampor som arbetsnormaler. Genom ömsesidiga kontrollmätningar i de statliga laboratorierna fastställdes emellertid 1909 relationstalet mellan de båda enheterna till 10/9.

Sedan först den lufttomma och sedan den gasfyllda metalltrådslampan med allt högre färgtemperatur kommit i bruk, fann man genom förnyade kontrollmätningar, att den fastlagda omräkningsfaktorn inte var riktig vid annan ljusfärg än den, som svarade mot koltrådslampans färgtemperatur. Från 1927 räknade man därför med följande omräkningsfaktorer för förhållandet mellan den internationella enheten (ICP) och Hefnerenheten (HK) vid olika färgtemperaturer:

$$2000\ ^\circ\mathrm{K} - 1{,}11;\quad 2360\ ^\circ\mathrm{K} - 1{,}145;\quad 2600\ ^\circ\mathrm{K} - 1{,}17.$$

Dessa värden fastställdes dock först 1938 och betraktades även då som ett provisorium. Man var nämligen vid de statliga laboratorierna i färd med att framställa en ny ljusnormal, grundad på ljustätheten hos stelnande platina. Normalens praktiska utformning var fullt klar, när kriget bröt ut och meningen var, att den nya enheten skulle tagits i bruk den 1 jan. 1940. Så blev nu inte fallet, men det ser ut som om flertalet länder nu skulle ha infört den utan formell överenskommelse.

I princip består den nya normalen av en degel av ren thoriumoxid, som innehåller ca 7 cm³ platina (fig. 4). Hålrummet utgöres av ett litet cylindriskt rör med ungefär 2 mm inre diameter, inpassat i degelns lock. Det sträcker sig antingen ned till en fördjupning i degelns botten och är då i nedre delen fyllt med ren thoriumoxid, eller slutar fritt i platinan. I båda fallen får det ställe, från vilket strålningen utgår, samma temperatur som platinan. Degeln vilar på en bädd av sintrad thoriumoxid i en något större keramisk behållare, omgiven av en högfrekvensspole för upphettningen.

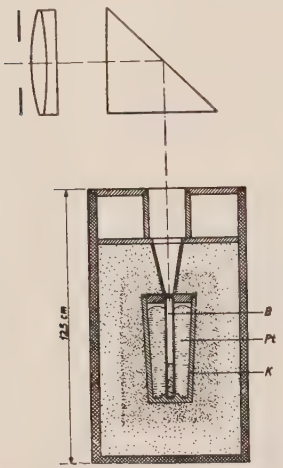


Fig. 4. Den nya ljusnormalen i princip enl. Bureau of Standards.

Denna ljustäthetsnormal användes nu som ljusstyrkenormal på så sätt, att hålrummets inre avbildas i förstoring på fotometern med en lins, försedd med en bländare. Ljusstyrkan är ju då lika med ljustätheten gånger bländaröppningens storlek, med hänsyn tagen till förlusten i linsen.

Det nya normalljuset (nl) är fastslaget genom att ljustätheten från denna normal sättes precis = 60 nl/cm². Jämförelse med sekundärnormal bör ske genom substitutionsmetod. Genom sin högre färgtemperatur är den nya normalen fördelaktigare än de gamla för den praktiska fotometrin. De flesta i praktiken använda ljuskällorna ha emellertid ännu högre färgtemperatur och utvecklingen tyder ju på, att den kommer att stiga ytterligare. Detta har också förutsetts, innan den nya normalen kom till, och man har undersökt möjligheterna att ge normalen ännu högre temperatur, dock utan resultat. Rhodium och iridium ha högre smältpunkt men äro olämpliga på grund av gasutveckling. Dessutom är det svårt att få deglarna att hålla. Frågan har därför lösts så, att färgskillnaden utjämnas med ett enda noggrant bestämt filter. Växelmätningar på detta ha gjorts mellan de statliga laboratorierna. Med ett sådant filter kommer man från normalens färgtemperatur 2046 °K upp till 2360 °K och från denna i nästa steg till 2750 °K. Det senare värdet svarar mot färgen hos vanliga gasfyllda glödlampor.

I Tyskland ha följande omräkningsfaktorer för nl:HK fastställts att gälla tills vidare:

2046 °K — 1,107; 2360 °K — 1,140; 2750 °K — 1,162.

Efter mellanstatlig kontroll kunna dessa värden möjligen komma att korrigeras något litet. De visa emellertid bl. a., att den nya enheten är obetydligt mindre än den gamla »internationella», så att för alla rent praktiska ändamål, såsom t. ex. luxtabeller för arbetsbelysning, kan man utan vidare sätta likhetstecken mellan dem.

4. Fotoelementets fel och förtjänster.

Bland fotocellerna lämpar sig särskilt den s. k. spärrskiktcellen eller fotoelementet för ljusmätning. Den är enklare att använda än de egentliga fotocellerna med vacuum eller gasfyllning, emedan man ej behöver förstärka fotoströmmen, och har dessutom en spektral känslighetskurva, som är mera lik ögonkurvan, även om avvikelsen från denna fortfarande är betydande (fig. 5). Detta jämte det s. k. cosinusfelet gör, att vissa försiktighetsmått måste iakttagas vid alla objektiva mätningar.

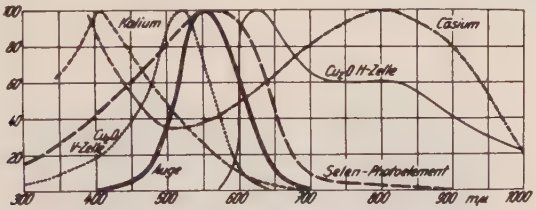


Fig. 5. Känslighetskurvor för olika typer av fotoceller i jämförelse med ögat.

Cosinusfelet innebär, att fotoelementet — eller cellen, som vi för korthetens skull kunna säga — visar för lågt värde för allt ljus, som träffar den under större vinklar än ca 30° mot normalen (fig. 6). Detta beror på ökad reflexion mot den blanka cellytan eller skyddsglaset vid större vinklar. Felet blir således högst variabelt allt eftersom man mäter belysning, som härrör från en eller flera lampor eller från stora lysande ytor. Vid laboratoriemätningar kan man i regel undvika det genom att ordna så att infallsvinkeln blir nära = 0° eller i varje fall mindre än 30°, men när det gäller att i praktiken mäta belysning av halv- eller helindirekt karaktär kan det bli nödvändigt att göra korrektioner på upp till + 25 %. Och det värsta är, att korrektionsfaktorn kan vara svår att bestämma, emedan den är en funktion av ljusfördelningen.

Av vikt är också, att cellens ljus-strömkarakteristik är rätlinig, så att den erhållna fotoströmmen verkligen är direkt pro-

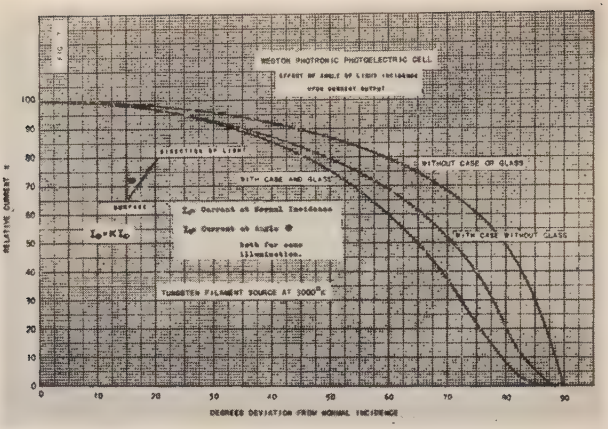


Fig. 6. Relativ fotoström vid en och samma belysningsstyrka som funktion av infallsvinkeln. Kurvorna gälla uppifrån räknat fotoelement utan fattning och täckglas, med fattning men utan täckglas och med fattning och täckglas.

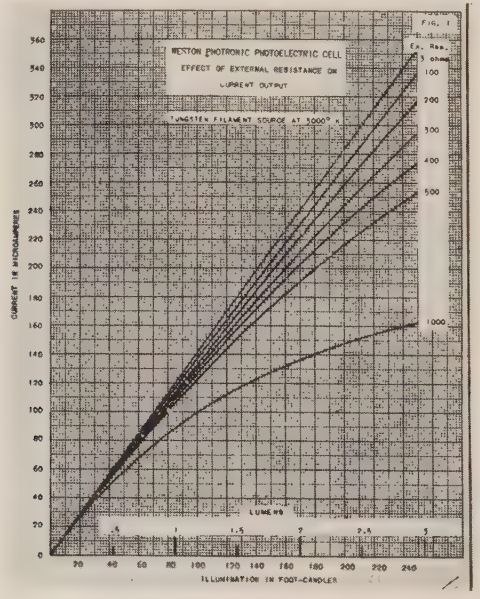


Fig. 7. Fotoströmmen som funktion av belysningen vid olika yttre motstånd: uppifrån räknat för 3, 100, 200, 300, 400, 500 och 1000 ohm.

portionell mot belysningsstyrkan på cellen (fig. 7). För de flesta celltyper är detta också fallet, förutsatt att det yttre motståndet i kretsen ej är för stort. Man bör därför välja en galvanometer eller mikroamperemeter med litet inre motstånd och får inte koppla in för mycket motstånd för att öka ut mätområdet. Detta kan i stället åstadkommas genom shuntning eller med gråfilter. Ett lämpligt instrument med stor känslighet är Siemens ljusvisarinstrument med ett inre motstånd av storleksordningen 20—30 ohm och en känslighet av ca $1° = 0{,}02 \cdot 10^{-6}$ A.

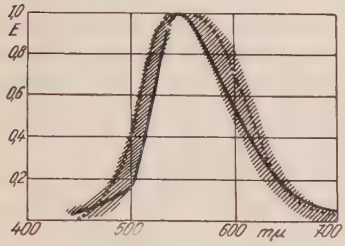


Fig. 8.

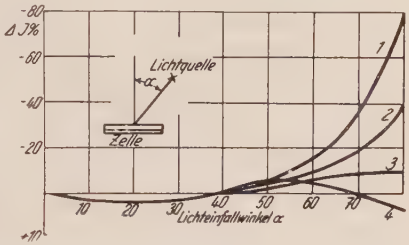


Fig. 9.

Fig. 8. Känslighetskurvor för färgkorrigerade fotoelement. Heldragen kurva för filter enligt Dresler, prickad för filter enligt Lange. Det streckade området anger spridningen i känslighet för undersökta ögon.

Fig. 9. Minskning av cosinusfelet med platinopalglasfilter enl. Lange (3) och med pappersskärm enl. Sewig (4).

Färgfelet kan i regel undvikas genom att man kalibrerar cellen för var och en av de ljusfärger, som komma ifråga. Men detta förutsätter ju, att man har tillgång till motsvarande normaler, vilka inte alltid äro så lätta att få tag i. Bättre är därför att använda celler med korrektionsfilter, som ha samma resulterande känslighetskurva som normalögat (fig. 8). Det finns numera sådana av flera fabrikat. För praktiska mätningar räcker det med att man känner kurvan för celltypen ifråga (med filter). Vid större anspråk på noggrannhet bör man ha kurvan för det cellexemplar, som användes. Därest den inte kan erhållas från fabrikanten, får man ta upp den med spektralfotometer. Ett par goda typer av färgkorrigerade fotoelement kunna nämnas: System Dresler, Lange, Weston-Viscor. Det ligger i sakens natur, att korrektionsfiltren medföra en avsevärd nedsättning av mätanordningens känslighet, men denna brukar ändå bli tillräcklig för de flesta behov.

Det enklaste sättet att kompensera cosinusfelet är att täcka cellen med ett matt opal- eller mjölkglas, men även då nedsättes

känsligheten betydligt. Isynnerhet om man samtidigt skall ha färgkorrigering kan den då bli allt för låg. Andra utvägar finnas emellertid, såsom att sätta två celler bakom varandra på sådant avstånd, att vinkelfelet kompenseras av att allt mera ljus träffar den bakre cellen, när infallsvinkeln ökas. Ett annat sätt är att förse cellen med en konisk tratt av transparent papper, men det är svårt att avpassa den tillräckligt noggrant.

Fotoelementen äro numera mycket konstanta, men en viss uttröttning äger rum, särskilt vid stark och långvarig belysning. Vid mera omfattande mätningar bör man därför kontrollera cellen regelbundet. En viss återhämtning inträder vid mörker, varför man alltid bör låta cellen få en viss »inlysningstid» innan man börjar en mätserie. Det brukar räcka med 10—15 minuter för att ett fullt konstant utslag skall erhållas.

5. Klot eller kub för ljusflödesmätning?

För mätning av det totala ljusflödet från en lampa eller en armatur erbjuder det av Ulbricht angivna, invändigt matt vit-

Fig. 10. Ett Ulbrichtklot för provning av större lamparmaturer får avsevärda dimensioner och blir ganska dyrbart.

målade klotet en ytterst enkel och bekväm metod (se Elementa, *19*, s. 98). Men för att metoden skall bli tillförlitlig, fordras det att

klotets diameter är tillräckligt stor i förhållande till ljuskällans utsträckning (fig. 10). Detta innebär, att man för mätningar på den moderna lamparmaturen måste ha tillgång till ett klot med ganska stor diameter, ofta 3 m eller mera. Ett sådant klot är inte så lätt att tillverka, och man har därför undersökt möjligheterna att ersätta det med en kub, som ju kan spikas ihop av trä eller masonite. Det är ju ganska klart, att så länge man mäter på lampor med likartad ljusfördelning »integratorns» form spelar liten roll. Således går det mycket bra att för rutinmätningar i en lampfabrik använda en kub, om man har en normal för varje lamptyp att kalibrera mot. Nyare undersökningar ha emellertid visat, att felet blir litet även vid varierande ljusfördelning och att diffusiteten och vitheten hos bestrykningn är ofantligt mycket viktigare än formen. Särskilt om hörnen på en kub avskäras, så att fjorton sidoplan erhållas, blir noggrannheten mycket god. De tyska DIN-normerna innehålla ett recept för bestrykning av insidan, vilken bör förnyas ganska ofta och därför utföres med en grundfärg och en täckfärg, som går att tvätta bort.

6. Mätning av ljustäthet.

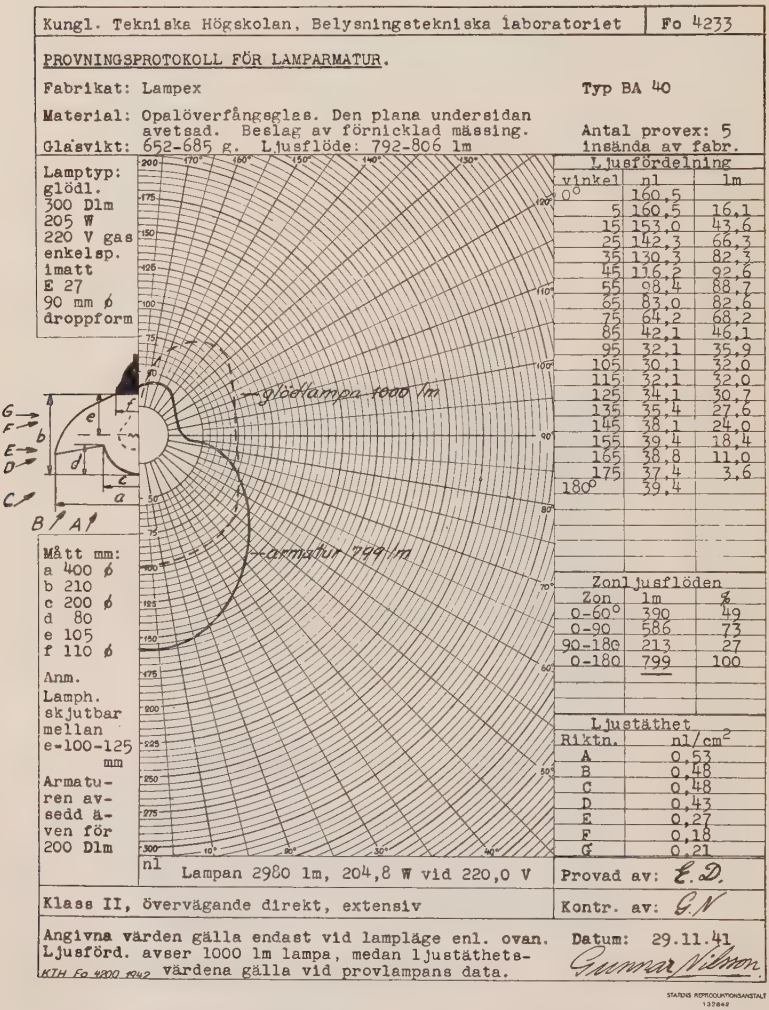
Fordringarna på bländfri belysning har gjort mätning av ljustäthet, i synnerhet på lamparmatur, mer och mer aktuell. Sådana mätningar kunna på laboratoriet göras antingen med subjektiv fotometer eller med fotocell. I förra fallet avbildar man med en lämplig lins den yta på vilken mätningen skall göras, i fotometerns synfält och jämför den med en känd ljustäthet. Denna kan ju lätt åstadkommas med en känd ljusstyrka, som på visst avstånd får verka på ett diffuserande glas med känd transmissionsfaktor. Vill man i stället använda objektiv metod, är det bara att kalibrera en fotocell mot en känd ljustäthet.[1]

7. Fullständig provning av lamparmatur.

I de flesta kataloger över teknisk lamparmatur angives numera åtminstone en ljusfördelningskurva, som ger en bild av hur armaturen sprider ljuset. För att man skall få en fullständig uppfattning om armaturens egenskaper fordras det dessutom kännedom om det totala ljusflödet vid visst ljusflöde hos lampan, helst även zonljusflöden för vissa rymdvinklar, och vidare uppgift om ljustätheten i vissa riktningar. Mätningarna böra också göras på mer än ett exemplar, då kvaliteten, särskilt på transparent material, kan variera rätt mycket. Vid Tekniska Högskolan i Stock-

[1] Se t. ex. G. Funke, Elementa *24*, 83, 1941.

holm tillämpas sedan 1 jan. 1942 nya bestämmelser för dessa prov, enligt vilka minst tre exemplar skola mätas i avseende på ljusflödet, medan ljusfördelningskurvan tages endast för det exemplar, vars ljusflöde ligger närmast medelvärdet av dessa tre. När det gäller glas utväljas tre av fem exemplar genom vägning.



Kungl. Tekniska Högskolan, Belysningstekniska laboratoriet — Fo 4233

PROVNINGSPROTOKOLL FÖR LAMPARMATUR.

Fabrikat: Lampex — Typ BA 40

Material: Opalöverfångsglas. Den plana undersidan avetsad. Beslag av förnicklad mässing.

Glasvikt: 652-685 g. Ljusflöde: 792-806 lm — Antal provex: 5 insända av fabr.

Lamptyp: glödl. 300 Dlm 205 W 220 V gas enkelsp. imatt E 27 90 mm ϕ droppform

Ljusfördelning

vinkel	nl	lm
0°	160,5	
5	160,5	16,1
15	153,0	43,6
25	142,3	66,3
35	130,3	82,3
45	116,2	92,6
55	98,4	88,7
65	83,0	82,5
75	64,2	68,2
85	42,1	46,1
95	32,1	35,9
105	30,1	32,0
115	32,1	32,0
125	34,1	30,7
135	35,4	27,6
145	38,1	24,0
155	39,4	18,4
165	38,8	11,0
175	37,4	3,6
180°	39,4	

glödlampa 1000 lm

armatur 799 lm

Mått mm: a 400 ϕ, b 210, c 200 ϕ, d 80, e 105, f 110 ϕ

Anm. Lamph. skjutbar mellan e-100-125 mm

Armaturen avsedd även för 200 Dlm

Zonljusflöden

Zon	lm	%
0-60°	390	49
0-90	586	73
90-180	213	27
0-180	799	100

Ljustäthet

Riktn.	nl/cm²
A	0,53
B	0,48
C	0,48
D	0,43
E	0,27
F	0,18
G	0,21

nl — Lampan 2980 lm, 204,8 W vid 220,0 V

Provad av: E.D.

Klass II, övervägande direkt, extensiv — Kontr. av: G.N

Angivna värden gälla endast vid lampläge enl. ovan. Ljusförd. avser 1000 lm lampa, medan ljustäthetsvärdena gälla vid provlampans data.

Datum: 29.11.41

Gunnar Nilsson

KTH Fo 4200 1942

STATENS REPRODUKTIONSANSTALT 137442

Fig. 11. Ett provningsprotokoll för lamparmatur, ifyllt med fingerade värden.

8. Luxmeterns användning.

Luxmetrar med fotocell ha ju allt mera kommit i bruk för kontroll av belysningsstyrkan i arbetslokaler. De ha ju gjort dessa praktiska mätningar synnerligen enkla. Men luxmetern erbjuder också goda möjligheter till andra mätningar för den, som inte har tillgång till ännu bättre instrument. Man kan t. ex. med god praktisk noggrannhet bestämma reflexionsfaktorn för en väggfärg eller annan diffust reflekterande yta genom att först mäta belysningsstyrkan på vanligt sätt och därefter vända instrumentet (cellen) helt om och föra det från ytan och utåt. Det maximiutslag, som erhålles då man kommer någon decimeter från ytan, dividerat med belysningsstyrkan, ger ett gott närmevärde på reflexionsfaktorn.

För mätning av ljustäthet kan man sätta an cellen mot ifrågavarande yta, om denna lyser diffust. Det erhållna utslaget i lux, multiplicerat med en korrektionsfaktor = 1,25, ger ljustätheten i apostilb (lm/m²).[1] Faktorn 1,25 kommer in på grund av det tidigare nämnda cosinusfelet, ty här faller ljuset in under alla möjliga vinklar. Gäller det att mäta ljustätheten på ett armaturglas, blir utslaget i regel allt för stort, om man använder hela cellytan. Man kan då skärma av en del med en tunn plåt- eller pappskiva. Vid uträkningen av resultatet får då hänsyn tagas till hur stor del av cellytan, som varit verksam. Ljustätheten på ett armaturglas brukar hellre uttryckas i stilb (nl/cm²) än i apostilb. Då 1 stilb = $= \pi \cdot 10000$ apostilb, kan man, om hålet i avskärningen göres = $= \frac{1{,}25}{\pi \cdot 100}$ · hela cellytan, få värdet på ljustätheten i nl/cm² helt enkelt genom att dividera det avlästa värdet i lux med 100. Med faktorn 1,25 är då korrektion gjord även för cosinusfelet.

Det har här förutsatts, att man har en luxmeter, där cell och mikroamperemeter äro förenade med en sladd eller, om de äro hopbyggda, har skalan belägen vinkelrätt mot cellytan. Ligga dessa i samma plan, kan det vara svårt att komma åt att läsa av.

9. Spektralfotometri.

De nya ljuskällornas tillkomst ha också gjort, att spektralmätningar blivit mera aktuella även ur rent teknisk synpunkt. De kräva emellertid ganska komplicerade och dyrbara instrument — en spektrometer, kombinerad med en lämplig fotometer. Den senare kan vara av subjektiv eller objektiv typ. Nöjer man sig med att utforska det synliga området, duger det med glasoptik,

[1] Angående dessa enheter se Elementa *19*, s. 91.

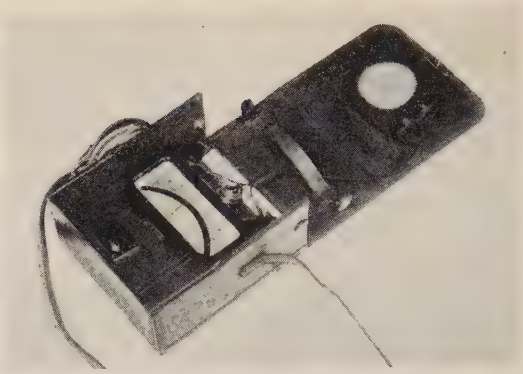


Fig. 12. Luxmeter.

vill man även behärska de angränsande områdena, fordras det kvartsoptik. I vilket fall som helst äro spektralmätningar på urladdningar med smala och kraftiga spektrallinjer ingalunda så enkla att utföra, även om man har tillgång till de bästa instrument.

10. Ultraviolettmätningar.

Lysämneslamporna ha även medfört ett behov av mätningar på den totala ultravioletts trålning, som är aktivt verksam på lysämnena, för att man skall kunna bestämma och kontrollera fluorescensens verkningsgrad. För detta ändamål kan man använda ett Ulbrichtklot (eller en kub) med speciell ytbehandling. Den vanliga bestrykningen duger ej, emedan dess reflexionsförmåga i ultraviolett är obetydlig. Som mätinstrument användes en speciell fotocell med särskilt avpassade filtersatser och en ljusindexgalvanometer.

Stockholm, Tekniska Högskolans belysningstekniska laboratorium, november 1942.

Litteratur:

R. Sewig, Handbuch der Lichttechnik, Bd I, 1938.
G. Weber, Belysningsteknik I, 1937.
B. Lange, Die Photoelemente und ihre Anwendung, del 2, 1936.
Hoffman-Korte-Willenberg, Der Werdegang der neuen Lichteinheit. Licht nr 11, 1941
Den nya ljusenheten. Tidskr. för Ljuskultur nr 1, 1940.
Provning av lamparmatur. Nya bestämmelser. Tidskr. för Ljuskultur nr 4, 1941.
Gunnar Nilsson, Luxmetrars färgkänslighet. Tidskr. för Ljuskultur nr 2, 1942.

Foto. Kungl. Svenska Aero-klubben.

Segelflygplan över Ålleberg.

Något om segelflygning och dess energikällor i atmosfären. I.

Av **H. HENRIKSON.**

Nyligen ingick meddelande om att tysken Vergens i november detta år satt nytt rekord i segelflygning med 45 timmar och 28 minuter. Tydligen rör det sig om en ny uthållighetsprestation. Den moderna segelflygningen har alltid varit i hög grad sportbetonad, och det kan därför knappast förvåna, att man ofta får höra talas om rekordnoteringar av skilda slag. Sådana finnas också beträffande tillryggalagd flygsträcka och uppnådd höjd över startpunkten. Genom att utnyttja de energikällor, som finnas i atmosfären, har man sålunda utan mellanlandnnig tillryggalagt 794 km, motsvarande sträckan Malmö—Östersund fågelvägen. Det var en ryska, Olga Klepikova, som den 6 juli 1939 segelflög från Moskva till Stalingrad. Topprestationerna i höjd äro minst lika imponerande. Tysken Erwin Ziller nådde i nov. 1938 6840 m över ur-

kopplingshöjden; höjden över havet var 8600 m. Året därpå nådde landsmannen Glöckner en höjd av 9200 m under en flygning över Alperna, men denna gång var urkopplingshöjden omkring 5000 m. Man måste fråga sig, hur det kan vara möjligt att nå sådana resultat utan motor. Följande redogörelse för segelflygningens utveckling och orsakerna till uppvindarna i atmosfären får ej betraktas som ett uttömmande svar på frågan utan endast som en orientering i segelflygningens problem.

1. Segelflygningens utveckling fram till våra dagar.

Konsten att flyga har intresserat människorna i alla tider. Fåglarna ha varit deras förebilder, men försöken att efterlikna dem ha under århundraden misslyckats. Varken oskolade mångfrestare, representerade bl. a. av idérika urmakare och skräddare eller gamla tiders lärda vetenskapsmän och ingenjörer ha haft någon nämnvärd framgång i sina ansträngningar att komma flygningens hemligheter på spåren. Tidvis har problemet ansetts olösligt. En och annan, som varit före sin tid, har dock kommit förvånansvärt nära lösningen, t. ex. universalgeniet Leonardo da Vinci, vars föreställningar om fallskärmen, propellern och luftmotståndets verkningar voro tämligen riktiga. Även Isaac Newton sysslade med flygningens teori. Hans slutsatser beträffande luftmotståndet voro riktiga, men det var också allt.

Ännu för 60 år sedan hade man ej kommit flygproblemets lösning något nämnvärt närmare. Dels hade de tekniska förutsättningarna dittills saknats, och dels hade man ständigt angripit problemet från fel håll. Diverse teorier uppställdes, men man brydde sig aldrig om att genom praktiska försök skaffa sig kunskaper om flygningens lagar. Den förste, som insåg, att man måste gå den omvända vägen, var den tyske ingenjören Otto Lilienthal. Först efter tio års vetenskapliga studier och forskningar omväxlande med talrika modellförsök hade han sakta men säkert trängt så långt in på aerodynamikens outforskade domäner, att han vågade omsätta sina lärdomar i mera praktiska försök. Det första användbara »flygplanet» hade han färdigt 1891, och under de följande fem åren företog han sammanlagt omkring 2000 lyckade flygningar, varav den längsta mätte mellan 300 och 400 m med upptill 1 minuts varaktighet. De flesta av dessa luftsprång, för att använda ett mera anspråkslöst uttryck, voro glidflygningar, d. v. s. flygningen försiggick under ständig höjdförlust, och blott vid enstaka tillfällen, såsom vid kraftig vind, lyckades han komma högre än startplatsen. Den 9 augusti 1896 störtade Lilienthal från 15 meters höjd.

I Tyskland fick Lilienthal till en början inga efterföljare. Hans pionjärarbete fortsattes emellertid i Amerika av bröderna Wilbur och Orville Wright. Deras flygplankonstruktion av 1902 hade onekligen större likhet med våra dagars glidflygplan än Lilienthals. Åren 1903—1910 sysslade de mest med motorflygningens problem men återgingo 1911 till flygning utan motor, och denna gång kan man verkligen tala om segelflygning. Den 28 okt. lyckades Orville Wright hålla sig uppe i luften i nära 10 minuter, en prestation som ej överträffades förrän tio år senare.

Ungefär samtidigt med denna rekordflygning över dynerna vid Kitty Hawk på Nord-Carolinas kust upptäckte studenter från Darmstadt, att Wasserkuppe i Rhön lämpade sig utmärkt för segelflygning. Med världskriget inträdde emellertid en paus i utvecklingen, som nu kopplades in på andra banor, och först efter kriget väcktes intresset till liv på nytt i Tyskland, som alltsedan dess varit föregångslandet. Det nyvaknade intresset var närmast en följd av att all motorflygning förbjudits. Wasserkuppe blev åter samlingsplatsen för en skara flygentusiaster, och 1920 avhöllos där de första tävlingarna i glid- och segelflygning, vilka sedan återkommit varje år till 1939. Utvecklingen har under dessa 20 år varit enorm, men den har skett i flera etapper. De språngvisa ökningarna i prestationerna sammanfalla oftast med upptäckten och utnyttjandet av nya energikällor i atmosfären.

Den första utvecklingsperioden omfattar åren 1920—1925. Under dessa år flög man uteslutande med hjälp av de uppvindar som uppstå, då en luftström tvingas passera över ett hinder i dess väg, t. ex. långsträckta berg eller åsar, s. k. hang. Eftersom sådana uppvindar äro strängt beroende av ojämnheter i markytans form, blir segelflygaren hänvisad till att flyga inom tämligen begränsade områden. I längden blev ett dylikt förhållande otillfredsställande. Man måste bort från hanget och röra sig mera fritt i atmosfären. Trots vissa framsteg under de första åren nåddes inga mera anmärkningsvärda resultat. Höjdrekordet ökades från 350 m 1922 till 720 m 1925, det senare uppnått i Frankrike och nästan med säkerhet beroende på omedveten hjälp av uppvindar av annat slag än terränguppvinden. Som vi senare skola se, är det rätt förklarligt, att hangvindarna ensamma ej kunna hjälpa segelflygarna att nå större höjder. I tillryggalagd flygsträcka ökades längden från 1,8 km 1921 till 18,7 1923 men därefter blott till något mer än 20 km 1925. Ökningen berodde på att man lyckades utnyttja flera hang under en och samma flygning och var möjlig endast tack vare särskilt lämplig terräng. I tid förbättrades däremot prestationerna mera markant, från 21 minuter 1921 till 3 timmar 21 minuter 1922,

8 timmar 42 minuter 1924 och 12 timmar 7 minuter 1925, men så lämpa sig också hangvindarna utmärkt för uthållighetsprov.

Resultat jämförliga med de nu nämnda nåddes emellertid blott av några få av eliten, och någon bredd på prestationerna kan man ej tala om. Man började allmänt frukta, att segelflygningen för alltid skulle stelna i sina former och bli hänvisad till de av terrängen betingade uppvindarna. Allt flera av segelflygarna återvände till motorflygning, när denna åter frigavs i Tyskland, och 1925—26 inträdde en allvarlig kris, som övervanns endast tack vare den meteorologiska forskningens insatser. Ett forskningsinstitut för segelflygning grundades i Tyskland under ledning av professorn i meteorologi vid tekniska högskolan i Darmstadt, W. Georgii, och ett intimt samarbete inleddes mellan flygplankonstruktörer, meteorologer och segelflygare, som alla ha sin del i de följande årens väldiga uppsving.

De största insatserna på segelflygforskningens område ha utan tvivel gjorts av tyska meteorologer och segelflygare. Genom Georgiis och hans medhjälpares banbrytande forskningar anvisades nya vägar för den fortsatta utvecklingen. Man fann uppvindar i atmosfären, vilka ej voro direkt beroende av hinder i den horisontella luftströmmens väg och som snart visade sig betydligt överträffa terränguppvindarna i styrka och utbredning. Att sådana uppåtriktade luftströmmar existerade i fria atmosfären var ju känt sedan gammalt och att de borde kunna användas för segelflygning hade också framhållits flera gånger bl. a. av Georgii, som i sina föreläsningar på tekniska högskolan i Darmstadt i början på 1920-talet behandlat hithörande problem. Intill 1926 hade man dock misslyckats i försöken att praktiskt tillämpa teorierna och bevisa att detta slags uppvindar verkligen nådde sådan styrka, att de lämpade sig för segelflygning.

Under tävlingarna på Wasserkuppe 1926 kom äntligen genombrottet. Dels kunde man tydligt visa, att bärkraftiga termiskt betingade uppvindar existerade, och dels lyckades man lösgöra sig från hanget. Det första var resultatet av väl planerade undersökningar och ett gott samarbete mellan den meteorologiska sakkunskapen och de aktiva segelflygarna, det senare var mera ett slumpens verk. En av tävlingsdeltagarna råkade nämligen under hangflygning komma in i ett åskmoln tillhörande en vandrande åskfront. Efter diverse äventyr hamnade han 55 km från startplatsen, vilket var en ansenlig flygsträcka för dåtida förhållanden. Flygningen manade ej till efterföljd på grund av de stora riskmomenten, och segelflygmeteorologerna skyndade sig att varna för sådana våghalsiga företag. Samtidigt började man ändå under-

söka möjligheterna att på något sätt utan större faror utnyttja frontuppvindarna för sträckflygningar, men det tog ännu några år, innan man lyckades härmed.

Under tiden hade undersökningarna beträffande de termiska uppvindarna eller »termiken» fortsatts vid forskningsinstitutet och segelflyglägren. Upptäckterna följde nu slag i slag. Först lärde man sig (1928—29) använda uppvindarna i och under cumulusmolnen och först senare (1930—31) även de rent termiskt betingade uppströmmarna vid stark solstrålning men molnfri himmel. Detta var betydligt svårare, än då man kunde använda cumulusmoln som vägvisare.

Redan i segelflygningens barndom, då hangvinden var den enda kända energikällan, hade man funnit, att mer eller mindre kraftiga luftvirvlar bildades på hangets läsida, varför flygning här var mycket riskabel. 1933 visade det sig, att detta inträffade endast i det närmast marken belägna skiktet. Bakom hanget ungefär i höjd med dettas topp uppkom under vissa betingelser stående vågor i fria atmosfären, vilka kunde utnyttjas för segelflygning och så småningom fann man, att dessa primära vågor kunde förorsaka andra men ännu kraftigare på större höjd samt att det även förekom användbara fortskridande vågor. Under mitten och slutet av 1930-talet byggde man vidare på de gjorda upptäckterna och fördjupade kunskaperna.

Inom den moderna segelflygningen utnyttjas samtliga ovan nämnda slag av uppvindar. För nybörjaren med genomgången förberedande utbildning i glidflygning gäller det närmast att söka göra sig förtrogen med hanguppvindarna, som givetvis äro lättast att finna. I samband härmed händer det då, att han ibland lyckas få anslutning till termiskt betingade uppvindsområden. Småningom bli utflykterna från hanget allt flera och längre, och efterhand lär sig den nyblivne segelflygaren att allt bättre behärska termiksegelflygningens svåra konst. Hangvindarna utnyttjar han alltjämt gärna, exempelvis för att »vila ut» under sökandet efter andra lämpliga uppvindsområden i hangets närhet. Det tredje slaget, vågsegelflygningen, tillhör den »högre skolan» och användes endast av eliten bland segelflygarna, som kan konsten att från ringa höjd över marken svinga sig ända upp i stratosfären, om förhållandena äro gynnsamma.

Segelflygningens utveckling har här berörts endast i korthet. Den som önskar göra sig mera förtrogen med segelflygningens skilda problem rekommenderas »Handbuch des Segelfliegens» av W. Hirth.

Vi ha i det föregående lärt känna tre slag av uppvindar näm-

ligen hanguppvindarna, de termiska uppvindarna samt sådana uppvindar, som kunna hänföras till vågbildning i fria atmosfären. Ett mellanting mellan de båda förstnämnda är frontuppvindarna i samband med vandrande åskfronter. I det följande komma de olika slagen av uppvindar att behandlas något mera ingående, men det kan dock endast bli fråga om det allra viktigaste, ty segelflygmeteorologien och dess tillämpning har nästan svällt ut till en hel liten vetenskap för sig. I detta sammanhang blir det tillfälle att nämna ytterligare några av de mest uppmärksammade prestationerna under årens lopp.

2. Hanguppvindarna.

Dessa uppkomma, som förut nämnts, då en horisontell luftström träffar ett hinder i dess väg och av detta tvingas i höjden. Den erforderliga energien erhålles i detta fall ur horisontella lufttrycksskillnader, som sätta luften i rörelse. Hangvindarnas styrka samt uppvindsområdets vertikala och horisontella utbredning beror av flera faktorer: den horisontella vindhastigheten, hangets form och höjd, förterrängens utseende, solstrålningens inverkan samt sist men icke minst av den vertikala temperaturfördelningen i den av uppströmmarna ostörda atmosfären omkring hanget.

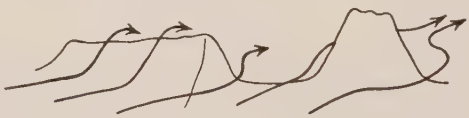
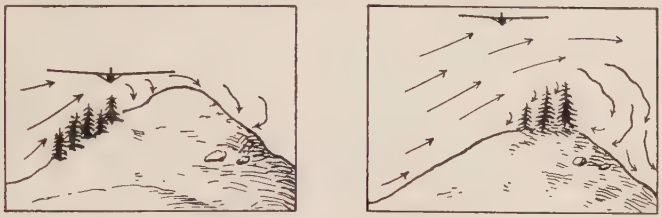


Fig. 1. En luftström tvingas passera över ett hinder, om detta är långsträckt men delar på sig och går runt, om höjden är av samma storleksordning som längden.

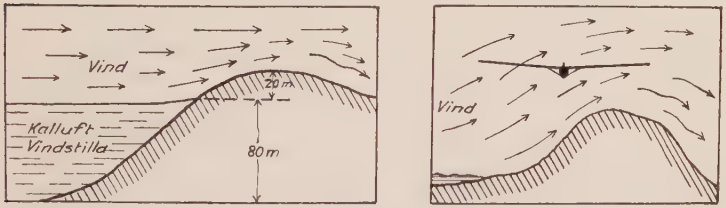
De bästa uppvindarna erhållas framför en långsträckt höjd, minst 1—2 km lång. Berg eller kullar, vilkas höjd är stor i förhållande till längden, äro så gott som oanvändbara, emedan luften gärna söker sig runt hindret i stället för att tvingas över detsamma (fig. 1). Hanget bör helst ha formen av en vid båge med den konkava delen mot vinden, varigenom luftmassorna trängas in mot mitten och uppvindarna på så sätt bli förstärkta där. Ju högre hanget är i förhållande till den omgivande terrängen desto bättre; höjdskillnaden bör uppgå till åtmistone 75—100 m. Ett hang vid kusten ger mycket kraftigare uppvindar än ett lika högt hang i inlandet, därför att friktionen mellan luftströmmen och underlaget är avsevärt mycket mindre över hav än över land. Förterrängen bör vara så fri som möjligt från kullar och andra hinder, så att

hanget ej kommer i »vindskugga» och luftströmmen förvirvlas. Lutningen på hanget spelar också en viss roll. Reser sig hanget brant, erhålles visserligen kraftiga uppvindar, men även på vindsidan uppträder då lätt virvelbildningar särskilt vid hangets fot. Samma fenomen uppträder också längs själva hangsluttningen,



a *b*

Fig. 2. Skogklädd hangsluttning och kalt krön (*a*) ger mycket sämre uppvindar än kal sluttning och skogbevuxet krön (*b*).



a *b*

Fig. 3. I *a* visas, hur ett kallt luftskikt närmast marken på hangets vindsida minskar hangets effektiva höjd och därmed också uppvindarnas styrka; *b* visar segelflygning över ett hang under normala förhållanden. Jämför flygplanets läge i uppvinden i fig. 3 b och i bilden från Ålleberg, sid. 191.

om denna har djupa klyftor eller är ojämnt skogbeklädd (fig. 2 a och b). Om hanget är så orienterat, att dess lovartsida träffas av den kraftigaste solstrålningen, förstärkas uppvindarna där, men samtidigt blir uppvindsområdet ej så homogent. Är läsidan vänd mot solen, blir uppvindsområdet förskjutet något åt denna sida och risken för lävirvlar minskas.

Den vertikala temperaturfördelningen i fria atmosfären framför hanget har betydligt större inverkan på uppvindarna än man skulle kunna tro. Det är luftens stabilitetsförhållanden vid varje särskilt tillfälle, som bestämmer, hur högt uppvindarna nå och om det då över huvud taget är möjligt att utnyttja dem för segelflygning. Vi behöva blott jämföra fig. 3 a och fig. 3 b med varandra för att få ett begrepp om hur olika flygmöjligheterna kunna vara.

Det kan t. ex. inträffa, att det om morgonen efter en klar natt ligger ett kalluftskikt närmast marken över terrängen framför hanget (fig. 3 a). Härigenom blir den effektiva hanghöjden avsevärt reducerad, då den kalla och tyngre luften ej föres med av den ovanför strömmande varma. Först sedan denna kalluftkudde bortskaffats, t. ex. genom solstrålningen, kan man möjligen börja tänka på att göra ett försök att segelflyga. Även vid många andra tillfällen blir luftströmmens vertikalkomponent över hanget oväntat liten, trots kraftig vind. En enkel överläggning visar emellertid, att så ofta måste bli fallet, därför att den uppför hangsluttningen strömmande luften måste ge upphov till en temperaturinversion ovanför hangets topp, och inversionens höjd och storlek är beroende av temperaturfördelningen i den ostörda atmosfären. Fig. 4 åskådliggör detta. Vi veta, att torr luft under uppstigning avkyles 1°/100 m (se t. ex. Elementas junihäfte 1942: A. Nyberg, *Några exempel på adiabatpapperets användning inom väderlekstjänsten,* där även atmosfärens stabilitetsförhållanden finnas behandlade). Denna temperatursänkning måste också den luft vidkännas, som strömmar uppför hangsluttningen. I fria atmosfären råder däremot i regel en temperaturgradient γ, som är $< 1°/100$ m. Följden blir då den, att luften vid och ett stycke över hangets topp är kallare än på samma höjd i fria atmosfären. Då avkylningens storlek beror på lyftningshöjden, kommer den luft, som tvingas upp från hangets fot till dess topp, att avkylas mest, och temperaturskillnaden blir därför störst i höjd med toppen. Differensen avtager sedan uppåt och blir lika med noll på den höjd, där strömlinjerna åter gå vågrätt. Där slutar inversionen, och ovanför avtager åter temperaturen såsom i den ostörda atmosfären framför hanget (fig. 4). En temperaturinversion utgör en spärr för uppåtstigande luftströmmar och ju större inversionen är, desto effektivare är denna spärr. Ju stabilare temperaturskiktningen är (liten temperaturgradient, fig. 4 b) desto kraftigare och lägre blir inversionen och desto tätare ligga strömlinjerna. Härav följer också, att vindhastighetens horisontalkomponent på hangets topp måste bli större samtidigt som vertikalrörelserna motverkas på den för segelflygning lämpligaste höjden. Det är således förklarligt, att man sällan når större höjder vid flygning över ett hang. Inversionen ligger i allmänhet något högre än man skulle vänta enligt ovan anförda orsaker. Anledningen härtill är, att en viss blandning äger rum i inversionsskiktet genom turbulens. Förutom inversionen verkar också en negativ uppdrift hämmande på uppströmmarna, då en relativt kall luftmassa på hangets vindsida och över dess topp ligger inbäddad i en varmare.

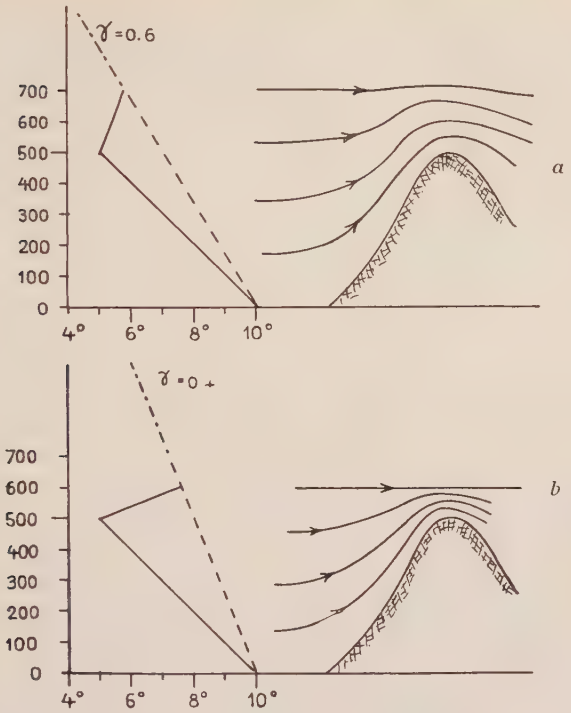


Fig. 4. Luft som tvingas i höjden på hangets framsida avkyles 1° per 100 m. Över hangets krön bildas på grund härav en temperaturinversion, vars höjd och mäktighet är beroende av den vertikala temperaturfördelningen i den av uppströmmarna ostörda atmosfären. Ju mindre temperaturgradienten i denna är, desto kraftigare och lägre blir inversionen och desto mera hämmas uppvindarna (fig. *b*).

Den streckade och streckpunkterade linjen anger temperaturavtagandet i den fria atmosfären (i *a* och *b* 0°,6 resp. 0°,4 per 100 m) samt den heldragna och streckpunkterade linjen temperaturfördelningen omkring och över hanget.

Hanguppvindens styrka varierar inom vida gränser. Under myckt gynnsamma omständigheter och vid förstklassiga hang har man uppmätt åtminstone 5 m/sek. Detta är en avsevärd styrka, även sedan segelflygplanets sjunkhastighet, högst c:a 1 m/sek, kompenserats.

Långsträckta dyner äro väl lämpade för segelflygning. De behöva ej vara mer än 40—60 m höga för att ge utmärkta uppvindar. Exempel på sådana ha vi på ön Sylt i Helgolandsbukten och vid

Rossitten på östra sidan av Kurische Nehrung. Båda dessa ha utnyttjats för uthållighetsprov. I slutet på maj 1937 låg tysken Jachtmann och kretsade över Sylts dyner i 40 timmar och 55 minuter, men som rekord kunde det ej godkännas, då föreskrivna registreringsinstrument ej medfördes. Till de mera fantastiska rekorden hör det som sattes över Rossitten i december 1938 av tyskarna Bödecker och Zander, vilka med ett dubbelsitsigt segelflygplan höllo sig uppe i 50 timmar och 15 minuter från den 9 till den 11 december. Av dessa var 30 timmar nattflygning. Snöstorm och avsevärd kyla rådde vid tillfället.

(Forts.)

Till frågan om begreppen syra och bas. III.

Av BERTIL ENGLUND.

I avsikt att sprida kännedomen om BRÖNSTEDS teori för syror och baser[1] lämnade jag i föregående uppsatser i denna fråga[2] beskrivning på några enkla titreringar, som jag utprovat. Som syror fungerade därvid H_4N^+ och $Al(H_2O)_6^{+++}$, som baser $OC_3H_7^-$ och $OCOCH_3^-$. Tydliga färgomslag vid ekvivalenspunkten kunde erhållas genom lämpligt val av indikator och reaktionsmedium. Dessa reaktioner har jag betecknat som neutralisationer på grund av formella analogier och påfallande likhet med förloppet vid reaktion mellan syra och bas i vattenlösning. Begreppet neutralisation användes emellertid icke i det konsekvent genomförda Brönstedska systemet. Reaktioner av typen

$$\text{syra I} + \text{bas II} \rightarrow \text{bas I} + \text{syra II},$$

som omfattar vad som hittills kallats neutralisation, hydrolys och elektrolytisk dissociation, innebära en protonförflyttning från syra I till bas II, t. ex.

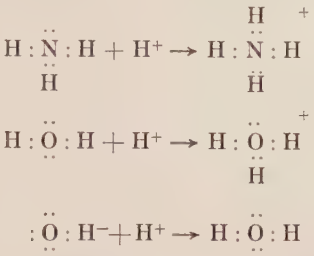
$$H_4N^+ + OH^- \rightarrow H_3N + H_2O$$
$$H_2O + OCOCH_3^- \rightarrow OH^- + HOCOCH_3$$
$$HCl + H_2O \rightarrow Cl^- + H_3O^+$$

och kallas protolyser. Nu användes dock uttrycket neutralisation även i avhandlingar, som bygga på det nya systemet, och i fortsättningen skall jag ge exempel på att utformandet av definitioner ej alltid är så enkelt.

[1] I prof. G. HÄGGS Kemisk reaktionslära behandlas teorien utförligt med tillämpningar och räkneexempel.

[2] Elementa *23*, 233 och *25*, 94.

En bas är ett ämne, som kan upptaga protoner. För den skull måste ämnet ha en sådan byggnad, att en vätekärna kan bindas. Med molekylmodeller enligt elektronteorien (Kossel och G. N. Lewis) får man ett enkelt kriterium: En bas måste ha ett *ensamt elektronpar* (ev. flera). Då vätekärnan infångas (vid »neutralisationen»), uppstår den korresponderande syran:



(På vanligt sätt utsättas endast valenselektronerna.)

Genom sådana formelbilder får man naturligtvis lika litet som genom andra något uttryck för *styrkan* hos basen. Det torde ej heller vara så, att varje förening med ensamt elektronpar visar basiska egenskaper.

Det är intressant, att existensmöjligheterna för sådana partiklar som H_3O^+ och H_4N^+, vilka den klassiska strukturkemien ej kunde »förklara», ha kunnat i viss grad beräknas. Sådana beräkningar utföras med en i komplexkemien bruklig metod.[1] Man beräknar den energi, som frigöres, då joner med viss laddning (1, 2, 3 ... st.) successivt föras från oändligheten till en centraljon med motsatt laddning. Därvid tages hänsyn till den s. k. avskärmning, som förorsakas av de redan anlagrade jonerna med lika laddning. För olika konfigurationer hos det uppkomna komplexet erhållas olika energibelopp — den mest symmetriska byggnaden motsvarar i regel den största potentiella energien, d. v. s. den största beständigheten. Följande värden ha erhållits för reaktioner, då väte bindes till syre som centraljon:

$$O^{--} + H^+ = OH^- \quad + 2{,}0 \text{ E erg}$$
$$OH^- + H^+ = H_2O \quad + 1{,}5 \text{ E erg}$$
$$H_2O + H^+ = H_3O^+ \quad + 0{,}8 \text{ E erg}$$
$$H_3O^+ + H^+ = H_4O^{++} + 0{,}06 \text{ E erg},$$

där $E = 10^8 \cdot e^2 : r$ (e = jonladdningen och r = syreatomens radie). Energien, som frigöres vid protonens förening med H_2O, är således

[1] Se t. ex. Remy, Lehrbuch der anorg. Chemie I, 305 och 544.

av samma storleksordning som vid dess förening med OH^--jon, d. v. s. partikeln H_3O^+ är ej osannolik ur energetisk synpunkt. Däremot är en partikel med 4 H kring O som centraljon ej existensduglig. Syres maximala koordinationstal är alltså 3. För kväve är motsvarande tal som bekant 4.

I detta sammanhang skola några kanske ej allmänt kända analogier mellan vatten och ammoniak påpekas. Vid behandling med Na erhållas NaOH, resp. $NaNH_2$, som båda kristallisera i jongitter och således äro salter med OH^-, resp. NH_2^- som negativa byggnadsstenar. Vid upplösning av $NaNH_2$ i flytande ammoniak uppstår den starka anjonbasen NH_2^-, liksom fria OH^--joner uppstå, då NaOH löses i vatten. I komplexa föreningar, t. ex. $Cu(H_2O)_4^{++}$ och $Cu(H_3N)_4^{++}$, bindas de neutrala molekylerna förmodligen med hjälp av sina ensamma elektronpar, en yttring av deras basiska karaktär. — Oxoniumperklorat H_3OClO_4 (smältp. 50°) har alldeles samma jongitter som H_4NClO_4 och är som detta en ganska stabil förening. Oxoniumklorid H_3OCl sönderdelas däremot redan vid 0° och är alltså mycket obeständigare än den analoga H_4NCl. De vid termisk analys av systemet $SO_3 + H_2O$ påvisade föreningarna mellan vatten och svaveltrioxid i förhållandet 2 : 1 och 3 : 1 kunna tolkas som salter H_3OHSO_4 och $(H_3O)_2SO_4$ i analogi med kända ammoniumsalter.

Omkring år 1924 gjorde amerikanaren Franklin undersökningar över föreningar, tillhörande »ammoniaksystemet», m. a. o. ämnen, som kunna härledas ur H_3N på motsvarande sätt som våra vanliga syror och baser kunna tänkas uppkomma ur H_2O.

Ammonosyror	*Analoga ämnen i »vattensystemet»*
$H_5CN_3 = C(NH_2)_4 - H_3N$	$H_2CO_3 = C(OH)_4 - H_2O$
$H_2CN_2 = C(NH_2)_4 - H_3N$	$CO_2 = C(OH)_4 - H_2O$
HNN_2	HNO_3
$HNAlNH_2$	$HOAl(OH)_2$
Ammonobaser	
KNH_2	KOH
$PbNH$	PbO

Ammonoföreningarna äro lättlösliga i flytande ammoniak, lösningarna ha ofta elektrisk ledningsförmåga. Med fenolftalein som indikator kan man följa reaktionen

$$2\,KNH_2 + H_5CN_3 \rightarrowtail K_2H_3CN_3 + 2\,H_3N\,,$$

som motsvarar neutralisationen

$$2\,KOH + H_2CO_3 \rightarrowtail K_2CO_3 + 2\,H_2O.$$

En annan »neutralisationsanalog» reaktion, som kan utföras i flytande ammoniak, är den enkla

$$H_4NCl + KNH_2 \longrightarrow KCl + 2\,H_3N.$$

Ammoniumsalter äro i detta system *syra-analoga* (H_4N^+-jonen en syra), amiderna *bas-analoga*; vid reaktionen uppstå molekyler av det ytterst obetydligt dissocierade lösningsmedlet. Kan denna reaktion göra anspråk på namnet *neutralisation*?

I de rena vätskorna föreligga jämvikterna

$$H_2O + H_2O \rightleftarrows H_3O^+ + OH^-$$
$$H_3N + H_3N \rightleftarrows H_4N^+ + NH_2^-,$$

d. v. s. protolyser, vid vilka mediernas amfotera karaktär kommer till synes. Jämför protolysen $H_3N + H_2O \rightleftarrows H_4N^+ + OH^-$.

Ett lösningsmedel, som visar stora likheter med vatten och ammoniak, är flytande svaveldioxid. Många oorganiska salter o. d. äro lösliga i SO_2, lösningarna leda elektrisk ström ganska bra, under det att SO_2 själv endast har en mycket obetydlig ledningsförmåga. En tysk forskare, Jander,[1] har studerat reaktioner i flytande svaveldioxid: liksom i ammoniaksystemet finnas syra- och bas-analoga ämnen, vilka i lösningen reagera med varandra.

Sulfitosyror: $SOCl_2$, $SO(OCOCH_3)_2$, $SO(SCN)_2$ m. fl. tionylföreningar. *Sulfitobaser:* K_2SO_3, $Na_2S_2O_5$, $[(CH_3)_4N]_2S_2O_5$ m. fl. sulfit.

Reaktioner av typen

$$SOBr_2 + (H_4N)_2SO_3 \longrightarrow 2\,H_4NBr + 2\,SO_2$$

kunna lätt demonstreras: slutpunkten synes utan indikator på försvinnandet av sulfitets gula egenfärg. På konduktometrisk väg kan reaktionen också följas; kurvan, som visar ledningsförmågan som funktion av bastillsatsen, får en knick vid ekvivalenspunkten.

I det rena mediet utbildas jämvikten

$$SO_2 + SO_2 \rightleftarrows SO^{++} + SO_3^{--},$$

som naturligtvis ej kan vara en protolys, eftersom inga protoner finnas. Inte heller kunna de »neutralisationsanaloga» reaktionerna mellan tionylföreningar och sulfit vara protolyser. Skola de kallas protolysanaloga?

* *
*

För beräkning av pH i utspädda vattenlösningar finnas ju enkla formler, härledda med den klassiska dissociationsteorien. I min

[1] Die Naturwissenschaften *26*, 779 och 793.

uppsats i Elementa år 1935[1] behandlas sådana beräkningar för några typiska fall.[2] På den ofta framställda frågan, om dessa formler äro giltiga för de nya syra- och basbegreppen blir svaret ja. Att införa de nya begreppen innebär nämligen visst icke — som en och annan kanske hoppats, resp. fruktat — att de approximationer, som vi arbetat med beträffande mycket utspädda, »ideella» lösningar, undergått någon förändring. Emellertid kan i vissa fall en principiell förenkling av den numeriska beräkningen vinnas, om det nya systemet användes. Som exempel skall här visas, hur pH i en 0,01-molar lösning av natriumacetat beräknas. Med den klassiska metoden utgår man från reaktionsformeln för salthydrolysen (a. a. sid. 164—165) och erhåller med hjälp av massverkningslagen $[H^+] = \sqrt{\frac{K_s K_v}{c}}$, där K_s är *ättiksyrans syrakonstant* $10^{-4,8}$, K_v vattnets jonprodukt 10^{-14} och c saltets analytiska koncentration 0,01. Efter logaritmering fås $pH = 7 + \frac{1}{2} pK_s + \frac{1}{2} \log c = 8{,}4$. Man säger, att saltet på grund av hydrolys har alkalisk reaktion. Enligt Brönsted är acetatjonen en bas; lösningen innehåller OH^--joner, som bildats vid protolys av basen (samt i ringa grad genom autoprotolys av vattnet). Efter beräkning på vanligt sätt (se Hägg sid. 52) får man det enkla uttrycket $[OH^-] = \sqrt{K_B c}$, där K_B är *acetatjonens baskonstant* $10^{-9,2}$, och vidare $pH = 14 - \frac{1}{2} pK_B + \frac{1}{2} \log c = 8{,}4$. Beräkningen sker alltså med den formel, som gäller för en »vanlig» bas. Mellan konstanterna för en syra och dess korresponderande bas gäller alltid sambandet $K_s \cdot K_B = 10^{-14}$ eller $pK_s + pK_B = 14$, varför de två uttrycken för pH äro identiska. — De formler, som uppställts för pH i buffertlösningar (a. a. sid. 176—178) liksom för beräkning av neutralisationskurvor, ha fortfarande giltighet under de givna förutsättningarna.

[1] Elementa *18*, 159.

[2] Se även N. Lövgren, Elementa *22*, 95 samt Nylén-Wigren, Kemiska räkneuppgifter 4:e uppl. s. 139—143, ex. 386—406.

Skrivelse från kommittén för Giorgimåttsystemet till Tekniska Högskolans lärarkollegium.[1]

Med anledning av en från Elektriska Klubben i Västerås inkommen skrivelse av den 27 mars 1941, vari Klubben under hänvisning till en av dr J. Wennerberg författad redogörelse för »Giorgi-måttsystemet i princip och tillämpning» anhöll, att kännedom om detta måttsystem måtte spridas bland högskolans lärare och elever, tillsatte lärarkollegiet vid sammanträde den 11 september 1941 en kommitté, bestående av herrar Alm, Borelius, Enskog, Faxén, Löfgren och Alfvén, med uppdrag att till lärarkollegiet inkomma med yttrande och förslag i frågan. Sedan den ursprungliga kommittén med sig adjungerat herrar Odqvist, Edenholm, Malm och Wästlund såsom representanter för de mekaniska tillämpningsämnena, får den sålunda förstärkta kommittén avgiva följande yttrande.

Såväl vid den tekniska undervisningen som inom industrien råder för närvarande förbistring i fråga om måttsystemen. Kommittén ser därför som sin huvuduppgift att undersöka, om bättring härvidlag kan uppnås i undervisningen vid Tekniska Högskolan i Stockholm.

De mest brukliga måttsystemen kunna indelas i två grupper:

1) De tekniska systemen med grundenheter för längd, *kraft* och tid.
2) De »fysikaliska» systemen med grundenheter för längd, *massa* och tid.

Därtill komma inom värmeläran och dess tillämpningar särskilda enheter för värmemängd, temperatur etc.

Inom statiken och dess tekniska tillämpningar spelar massbegreppet en underordnad roll i jämförelse med kraftbegreppet. De ifrågakommande krafterna äro antingen tyngden eller krafter, som lämpligen mätas genom jämförelse med tyngden. Som enhet för kraften kan då användas tyngden av en enhetsvikt, exempelvis

[1] Skrivelsen, som ger en god bild av det aktuella läget på »enhets»-fronten, publiceras med vederbörligt tillstånd. Måttsystemen ha tidigare behandlats i Elementa i uppsatser av E. Ingelstam (*22*, 217; *23*, 81) och G. Funke o. R. Agrelius (*25*, 75).

av 1 kg. Så är fallet med det även i Sverige tillämpade tekniska måttsystemet, vilket alltså i första hand är lämpat för statiska problem, men som hittills använts även vid kinetiska uppgifter (rörelseproblem), där massbegreppet får väsentlig betydelse.

Vid små eller måttliga krav på noggrannhet har detta system fördelen att vara enkelt vid användning på uppgifter av i övervägande grad statisk natur. Vid större krav på noggrannhet måste man dock taga hänsyn till att tyngdkraften är olika på olika orter. Då behöver man en kraftenhet som är oberoende av orten, men det tekniska systemet förlorar då i enkelhet och blir mer komplicerat än de fysikaliska måttsystemen. Därjämte lider det tekniska måttsystemet av den olägenheten, att man där har samma benämning på både kraft- och massenheten, vilket ibland kan vålla förvirring.

I de fysikaliska systemen, av vilka det mest kända är CGS-systemet med grundenheterna centimeter, gram (som massa) och sekund, är kraftenheten från början oberoende av orten och har därjämte fått ett från massenheten skilt namn. Inom fysiken, astronomien och närstående vetenskaper och tekniska tillämpningar äro dessa måttsystem de enklaste och mest användbara. Även elektroteknikens praktiska enheter (volt, ampere, watt, joule m. fl.) höra till denna grupp.

Ej minst av den anledningen att alla mekaniska normer och bestämmelser i fråga om mekanisk hållfasthet och mekaniska påkänningar för närvarande äro grundade på det tekniska måttsystemet, d. v. s. uttrycka krafter och påkänningar i kilogramkraft, måste man anse, att det tekniska måttsystemet ännu försvarar sin plats i den tekniska undervisningen. Likaså är det ofrånkomligt att bland de i undervisningen behandlade måttsystemen medtaga CGS-systemet, enär de flesta fysiska läroböcker och tabellverk äro byggda på detta system.

Därjämte har det med CGS-systemet analogt uppbyggda MKS-systemet med grundenheterna meter, mass-kilogram och sekund sedan länge använts, framför allt i mekaniken. MKS-systemet har den stora fördelen, att även den mekaniska energienheten blir en joule och den mekaniska effektenheten en watt. Därjämte avviker kraftenheten en newton (som ger massenheten 1 kg en acceleration av 1 m/s^2) ej alltför mycket från det tekniska måttsystemets kraftenhet (ungefär lika med 0,102 kilogramkraft). Slutligen får man här, liksom i övriga fysikaliska måttsystem, skilda benämningar på mass- och kraftenheten. Dessa omständigheter ledde här i Sverige till, att Kungl. Mynt- och Justeringsverket redan år 1918 till Kungl. Maj:t inlämnade ett förslag till ny lagstiftning

rörande mått, mål och vikt, som byggde på MKS-systemet och vari bl. a. kraftenheten newton infördes. Enär internationell enighet på denna punkt ännu ej förelåg, ansågs emellertid tiden då ej mogen för en dylik lagändring. Sedan dess har dock frågan även internationellt sett förts framåt, och om ej det nu pågående kriget kommit emellan, hade enligt Mynt- och Justeringsverkets uppgift enighet inom den internationella byrån för mått och vikt sannolikt uppnåtts vid det till år 1939 planerade sammanträdet. Utgår man ifrån, att MKS-systemet såväl nationellt som internationellt inom överskådlig framtid kommer att slå igenom, får det anses väl motiverat, att även detta måttsystem redan nu medtages i den tekniska undervisningen.

Det av Giorgi utarbetade måttsystemet bygger ifråga om de mekaniska enheterna direkt på MKS-systemet. Som redan nämnts, ansluta dessa sig alltså på ett naturligt sätt till de normala elektriska enheterna för energi och effekt. Denna omständighet, tillsammans med vissa senare berörda rationaliseringar av vissa andra rent elektriska enheter, torde ha varit anledning till att detta system fått varma förespråkare inom elektrotekniska kretsar. Sålunda antogs systemet åren 1935 och 1938 av Internationella elektriska kommissionen (IEC), vid senare tillfället delvis i samråd med Internationella byrån för mått och vikt och Internationella fysikerunionen. Tyvärr tog IEC därvid icke slutgiltig ställning till frågan om anslutning till en »rationaliserad» eller en »orationaliserad» form av Giorgisystemet, varför frågans internationella läge på denna punkt ännu icke kan anses som helt klar. De båda formerna skilja sig för vissa enheter med faktorn 4π. I Sverige har man inom elektroteknikerkretsar uttalat sig för den rationaliserade formen, och i den följande framställningen är denna form tillämpad.

Vad som ur elektroteknisk synpunkt dessutom karakteriserar Giorgisystemet är alltså, att det för en del rent elektriska storheter inför enheter som bättre än de tidigare använda CGS-enheterna motsvara praktiskt tekniska förhållanden.

Ursprungligen använde sig elektroteknikerna av ett blandsystem, bestående dels av åtskilliga på CGS-systemet byggda praktiska elektriska storheter, volt, ampere, ohm, coulomb, farad och henry, alla utgörande hela tiopotenser av de i CGS-systemet ingående absoluta enheterna, dels, för de magnetiska storheterna mmk, fältstyrka, induktion och flöde (flux), av de ursprungliga CGS-enheterna. Snart nog kom man i praktiska räkningar att frångå de absoluta enheterna för mmk och magnetisk fältstyrka och ersatte dem med de däremot proportionella storheterna *ampervarv*

(ampere) resp. *amperevarv per cm* (ampere/cm). Giorgi har dels införlivat även dessa senare praktiska storheter med sitt system (självfallet med den ändringen att den magnetiska fältstyrkan uttryckes i *ampere per meter),* dels infört lämpliga praktiska enheter även för den magnetiska induktionen och flödet. Enheten för flödet är här en *voltsekund* eller 1 weber (Wb) = 10^8 CGS-enheter. För induktionen eller flödestätheten blir då enheten 1 weber per m^2 (1 Wb/m^2) = 10000 CGS-enheter. Härigenom få båda dessa storheter praktiskt lämplig form utan användning av höga tiopotenser.

Även för det elektriska fältet har tidigare ett blandsystem förekommit, sammansatt dels av praktiska, dels av absoluta enheter. Giorgi har också här övergått till uteslutande praktiska elektrotekniska enheter.

Det har emellertid haft till följd, att två storheter, som äro av grundläggande betydelse för de magnetiska och elektriska fenomenen, nämligen permeabiliteten μ och dielektricitetskonstanten ε, fått ändrad dimension och storlek. I det elektromagnetiska CGS-systemet är permaebiliteten för vakuum dimensionslös och lika med 1, i det elektrostatiska CGS-systemet göres motsvarande förutsättning beträffande dielektricitetskonstanten för vakuum. Genom att man i Giorgisystemet utgått från den praktiska elektrotekniska enhetsgruppen 1 volt, 1 ampere osv. har permeabiliteten i vakuum, μ_0, fått värdet

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ henry per meter}$$

och dielektricitetskonstanten i vakuum, ε_0, värdet

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2 \mu_0} = \frac{10^{-9}}{36\pi} \text{ farad per meter,}$$

$$\text{om } c = \text{ljushastigheten sättes} = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s.}$$

Båda dessa storheter ha sålunda ändrats både till storlek och till dimension.

Betecknar man med μ_r resp. ε_r de tidigare använda värdena på permeabilitet och dielektricitetskonstant (relativvärden i förhållande till vakuum), så får man alltså i det generella fallet i Giorgisystemet sätta permeabiliteten

$$\mu = \mu_0 \mu_r \text{ henry per meter}$$

och dielektricitetskonstanten

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r \text{ farad per meter.}$$

Mot införandet av Giorgisystemets enheter för de magnetiska och elektriska fälten har anförts den invändningen, att de i ta-

bellverk och handböcker uptagna värdena på permeabilitet och dielektricitetskonstant ej då skulle kunna användas. Genom att man låter där angivna värden på dessa storheter representera den *relativa* permeabiliteten $\mu_r = \mu/\mu_0$ resp. den relativa dielektricitetskonstanten $\varepsilon_r = \varepsilon/\varepsilon_0$ förfaller denna invändning.

Därjämte har framhållits, att det vore mera tilltalande, om vad som här ovan betecknats såsom permeabilitet resp. dielektricitetskonstant för vakuum (μ_0 resp. ε_0) ersattes dels med andra namn (t. ex. magnetisk resp. elektrisk systemfaktor eller systemkonstant, enär de hänföra sig till måttsystemet), dels med andra beteckningar, så att beteckningarna μ och ε fortfarande vore reserverade för sin ursprungliga betydelse. Enligt kommitténs åsikt kan en parallell användning av dessa båda olika beteckningssätt accepteras. Därvid vore det dock önskvärt att även de av Giorgi föreslagna definitionerna angåves, så att en enkel övergång mellan de olika beteckningssätten möjliggöres. (I tysk litteratur förekomma för dessa storheter även beteckningarna »Induktionskonstante» resp. »Verschiebungskonstante».)

Inom vissa av de mekaniska tillämpningsämnena, såsom värmeteknik, ångteknik och förbränningsmotorteknik, förekomma även andra storheter än de tidigare nämnda, vilka skulle komma att påverkas av en eventuell övergång till Giorgisystemet, såsom specifikt tryck, värmeenergi m. fl. För trycket har man inom det tekniska måttsystemet använt enheten 1 kgf/cm² eller 1 (metrisk) atmosfär (at). I Giorgisystemet blir enheten 1 newton/m² (1 n/m²) och 1 at motsvaras alltså av ungefär $9{,}8 \cdot 10^4$ n/m². Enheten för tryck i Giorgisystemet är i allmänhet för liten för att passa för tekniskt bruk, och det har därför föreslagits att använda enheten 1 bar $= 10^6$ dyn/cm² $= 10^5$ n/m² $\backsimeq 1{,}02$ at resp. 1 millibar (mbar) $=$ $= 10^2$ n/m². Denna enhet användes redan inom t. ex. meteorologien, men dess införande i tekniken måste baseras på internationell överenskommelse.

Den tekniska enheten för värmeenergi, 1 kcal $=$ 4185 nm $=$ 4185 joule (J), är likaledes väsentligt större än energienheten i Giorgisystemet 1 nm $=$ 1 J. Det vore därför lämpligt att som värmeenergienhet i det nya systemet använda enheten 1 kJ, varvid t. ex. specifika värmet för vatten blir 4,185 kJ/kg. Alla inom värmetekniken gällande tabeller och diagram äro emellertid uppställda på basis av de nu använda enheterna och ett mycket omfattande arbete med omarbetning av dessa tabeller och diagram kräves därför, för att Giorgisystemet helt skall kunna införas även på detta område. Innan åtgärder i denna riktning vidtagas, måste tydligen även på denna punkt internationell överenskommelse

träffas. Det kan visserligen anmärkas, att värmestorheterna icke ingå i det egentliga Giorgisystemet, men konsekvensen fordrar, att man vid en eventuellt framtida övergång till detta system inriktar sig på att medtaga även värmestorheterna.

Sammanfattning.

För närvarande torde det icke vara möjligt att i undervisningen vid Tekniska Högskolan i Stockholm begränsa sig till ett enda måttsystem med uteslutande av de övriga. Under sådana omständigheter måste en översikt av de viktigaste måttsystemen lämnas jämte anvisningar, huru man övergår från ett system till ett annat.

Vid sidan av det s. k. tekniska måttsystemet, som användes i de mekaniskt betonade ämnena av såväl grundläggande som av tillämpat teknisk natur, och CGS-systemet, som förekommer framför allt i de mer fysikaliskt betonade ämnena, synes ett annat fysikaliskt system, MKS-systemet, vara på väg att arbeta sig fram, i första hand som ersättning för det tekniska måttsystemet, och åtskilliga tecken tyda på, att MKS-systemet inom överskådlig framtid blir såväl internationellt som nationellt antaget. Under sådana förhållanden är det av vikt, att de studerande vid Tekniska Högskolan göras väl förtrogna även med detta sistnämnda system.

En framtida övergång till MKS-systemet kan förväntas få konsekvenser även för de inom vissa mekaniska tillämpningsämnen förekommande storheterna specifikt tryck, värmemängd m. fl. Internationell enighet om systemets införande på dessa områden bör dock föreligga, innan en ändring i de nuvarande enheterna företages.

Den av Giorgi föreslagna påbyggnaden av MKS-systemet med vissa praktiska enheter av rent elektrisk karaktär har betydelse framför allt inom undervisningen i elektricitetslära och elektroteknik. De under senare år gjorda försöken att vid undervisningen i dessa ämnen använda sig av Giorgisystemet ha ådagalagt dess praktiska lämplighet.

Stockholm den 18 maj 1942.

På Kommitténs vägnar:

Emil Alm.

Meddelande från Föreningen i Lund för matematisk-naturvetenskaplig undervisning.

Sektionen för matematik, fysik och kemi sammanträdde den 8 nov. å Lunds universitets Fysiska institution. Förhandlingarna började kl. 10.30 med »Fysikaliska demonstrationer». I ett flertal rum i institutionen voro uppställda olika försöksgrupper, som förevisades av institutionens tjänstemän med hjälp av några studerande. Såväl enkla undervisningsexperiment som mera komplicerade försök förevisades. Bland de olika grupperna kan nämnas en serie försök över ljudet som vågrörelse, en serie optiska elementarförsök, varvid strålgången i luft åskådliggjordes med salmiakånga och i vatten genom att lösa upp litet fluorescin, två försöksgrupper med aerodynamiska försök samt en försöksgrupp med varandra icke direkt sammanhörande försök: kopplade elektromagnetiska svängningar, växelströmljusbågens karakteristik, gränskurva och fasdifferens vid totalreflexion samt elektrolys av glas. Deltagarna fingo ett duplicerat häfte med en orientering över försöken.

På eftermiddagen föreläste Dr. phil. G. Siljeholm, chef för forskningslaboratoriet vid A.-B. Hammarbylampan (Lumalampan), över »Moderna ljuskällor och deras egenskaper». Efter en redogörelse för fundamentalbegreppen inom belysningstekniken behandlade talaren de nya urladdnings- och lysämneslamporna. Genom att använda sig av olika ämnens luminiscens har man i de senare kunnat utnyttja den för ögat osynliga strålningen, så att ljusutbytet blivit fyra gånger så stort som vid de vanliga glödlamporna. Samtidigt kan man erhålla en färgblandning överensstämmande med solljusets. En serie instruktiva försök illustrerade föredraget. Den intresserade hänvisas till en uppsats av dr. Siljeholm, som — enl. vad red. meddelar — kommer att inflyta i något av de närmast följande häftena av Elementa.

Vid gemensamma förhandlingar med föreningen i dess helhet föreläste överstelöjtnant E. Jakobsson, Malmö, över »Synpunkter på artilleriet som helhet». En redogörelse för utvecklingen inom artillerivetenskapen lämnades. Artilleriets fundamentala byggnad beskrevs, och en översikt över vårt svenska artilleris möjligheter gavs.

Efter förhandlingarna följde samvaro på Akademiska Föreningens Restaurang under angenäm stämning.

Börje Svensson.

Bokanmälningar.

Svend Bundgaard, *Tallene og den abstrakte Algebras Grundbegreber.* Jul. Gjellerups Forlag, København 1942, 171 s.

Inom loppet av några få år har Danmark fått en rad av nya läroböcker i matematik för såväl skolstudier som högre studier. I Bohr og Mollurup, Lærebog i Matem. Analyse saknar man emellertid teorien för de reella talen. Visserligen införas de irrationella talen strängt såsom konvergenta talföljder redan i det danska gymnasiet, men en fullständig analys av talbegreppet i samband med högre studier torde dock vara ofrånkomlig. Det är denna brist, som förf. av föreliggande arbete söker avhjälpa. Han har därvid icke nöjt sig med mindre än att ge talbegreppet i dess modernaste och allmännaste form, så som det numera brukar utvecklas i samband med den abstrakta algebrans grundbegrepp. Den abstrakta algebran, som utformats under de sista årtiondena och fått den största användning inom vitt skilda grenar av matematiken, har också givit en djupare innebörd åt de reella talen, i vilka den har sin upprinnelse. Förf. har särskilt tagit sikte på den sistnämnda användningen och ger läsaren utan att föra in honom på omfattande algebraiska studier en god inblick i den moderna algebrans vackra och enhetliga byggnad och framställer så de reella talen och deras räkneoperationer i klar belysning mot denna bakgrund. Boken är indelad i tre avdelningar, av vilka den första upptager algebrans grundbegrepp, den andra de reella talen och den tredje komplexa tal och hyperkomplexa tal. Av de algebraiska grundbegreppen behandlas de enklaste elementmängder, i vilka en eller flera kompositionsregler äro definierade, såsom grupp, ring, integritetsområde och kropp. Utvidgningen av de naturliga talen till integritetsområdet av de hela talen och av detta till den rationella talkroppen sker parallellt med införandet av dessa olika organiserade mängder, vilka även exemplifieras med andra mängder såsom substitutionsgrupper, polynomringar m. fl. Icke kommutativa kroppar exemplifieras med Hamiltons kvaternioner. I anslutning till ordnade mängder kommer förf. in på gränsvärdesbegreppet och införandet av de irrationella talen, vilka definieras såväl enligt Dedekind såsom snitt som enligt Cantor såsom talföljder.

Framställningen är klar och boken bör vara lättläst även för den som icke mera ingående sysslat med algebra. Flera exempel

på användningen av de olika begreppen skulle givetvis varit önskvärda.

I ett förord meddelar professor Harald Bohr, att arbetet bygger på en föreläsningsserie, som förf. hållit vid undervisningen för lärarprovet, och rekommenderar boken särskilt till lärare och läraraspiranter. I denna rekommendation vill recensenten gärna instämma.

Harald Bergström.

H. M. Hansen, *Lærebog i Fysik.* Nyt Nordisk Forlag, Kjøbenhavn 1941. 752 s., danska kr. 46: —.

Enbart av sidantalet att döma är denna fysiklärobok till omfånget ungefär lika stor som Westphals, men på grund av det mera spatiösa och f. ö. mycket vackra trycket är dock textinnehållet något mindre. Detta gäller även omfattningen, som i teoretiskt avseende ej alls kan jämföras med ämbetsexamens 2-betygskurs. Den innehåller enligt förordet i det väsentliga författarens föreläsningar i fysik för medicine studerande med vissa utvidgningar.

Denna bokens uppgift betyder ingalunda, att den är »målbunden» på så sätt att den skulle nonchalera de fysikaliska sammanhangen; det finns tvärtom inget att anföra emot den klarhet och reda med vilken grunderna, även de kvantitativa, behandlas. Fysikens CGS-system och det tekniska måttsystemet äro korrekt återgivna, och det förra är använt genomgående med undantag för elläran, som bygger på de praktiska enheterna med cm som längdenhet. — Differentialkalkyl har ej förutsatts som behövlig för att kunna följa kursen, varför genomförda teorier givetvis saknas. Växelströmsläran t. ex. behandlas icke desto mindre formelmässigt, och man har där god användning av vektorer, som införas redan i bokens början. I många fall återges resultatet av en endast antydd beräkning.

Någon matematisk finess erbjuder alltså arbetet ej, men trots detta innehåller den mycket av värde för den fysikaliska allmänbildningen. Mekaniken är utförligt och konkret behandlad och innefattar fenomen som kapillaritet, friktion och strömning.

Inom akustiken fäster man sig särskilt vid att objektiv och subjektiv ljudstyrka samt rumsakustik tagits med och fått en mycket god behandling. Att ljudets kvantiteter beaktats är ett bevis på arbetets moderna art och ett exempel att följa i andra lärokurser. Först därmed kunna ljudkällornas egenskaper förstås, och moderna akustiska mätinstrument torde väl försvara sin plats i allmänbildande läroböcker.

Även elektricitetsläran är genomarbetad med hänsyn till nyare föreställningar och modern teknik. Optiken är enligt anmälarens mening det mest lyckade partiet. De optiska instrumenten behandlas utförligare än vanligt, och linsformeln är ej det ensamt dominerande, utan man diskuterar även energetiska förhållanden, avbildningsfel, bländarsystem och andra i den konstruktiva optiken ingalunda oviktiga detaljer. De mycket goda figurerna äro efter allt att döma originalritningar, och Pohls idéer ha alltsomoftast verkat befruktande. Den fysikaliska optiken omfattar allt av intresse med hänsyn till bokens omfång.

Fem sidor färglära med färgtriangeln ansluta till avsnittet om fotometri, där förf. dock förbisett den nya enheten och onödigtvis insatt en figur på den nu avförda Hefnerlampan.

Atomfysiken är mera historiskt och konkret än systematiskt behandlad, med det särskilda intresse för kärnreaktioner som modern medicin påkallar. De danska medicinarna äro att lyckönska till den goda naturvetenskapliga bildning de efter denna bok att döma erhålla.

Ett så värdefullt bidrag till läroboklitteraturen på nordiskt språk är värt att beaktas, och i läroverkens referensbibliotek hör den obetingat hemma.

Erik Ingelstam.

E. S. Johansen, *Mekanisk Fysik.* I. Bind, 1. o. 2. Hæfte. Jul. Gjellerups Forlag, København 1941, 419 s.

En blick på innehållsförteckningen till detta arbete visar, att det med sina 10 kapitel i huvudsak är en framställning av rationell mekanik: de första sex kapitlen (varav de första fyra äro sammanförda i ett första häfte) handla om mekanikens grundbegrepp, rörelselärans fundamentallagar samt en masspunkts och en fast kropps rörelse. Det vanligaste sättet att genomföra en sådan framställning är som bekant att på ett mycket tidigt stadium och genomgående göra den rationell i den meningen, att man abstraherar från de många fysikaliska fenomen och orsakssammanhang, som äro medbestämmande i de verkliga kropparnas mekaniska förhållanden, för att få enklast möjliga grundlagar och därmed största möjliga slutenhet och framgång med de matematiska metoderna för beskrivning och beräkning.

Professor Johansens intressen och intentioner tillika med hans grundliga bildning har emellertid gjort denna framställning ganska mycket annorlunda. Ett grunddrag är nämligen, att han berättar om fysikaliska sammanhang och diskuterar fysik ganska ofta — och gör det utomordentligt! Den härvid påtagliga risken,

att lärogången kan förlora i stringens och reda, har han enligt anmälarens mening skickligt undgått, och vi ha fått en elementär framställning i mekanisk fysik med både bredd och styrka, med både kött och ben.

Redan i kommentaren till de tre mekaniska grundlagarna framträder denna tendens genom att t. ex. de olika naturkrafternas fysikaliska karaktär analyserats. Den newtonska mekanikens begränsning genom Heisenbergs obestämdhetsrelation behandlas här, och därmed elektronmekanikens skiljaktigheter från den newtonska. Elektroner och ljuskvanta förekomma tillsammans med kulor, pendlar och vagnar som exempel på lagarnas tillämpning. Det är ett av de allra första försöken att till ett pedagogiskt helt samordna klassiskt och modernt inom mekaniken. För övergångstidens studenter ha ju med nödvändighet kvantföreställningarna framstått som den mest subtila kvintessensen först inom spektralteorin och sedan i den allmännare atomfysiken, men helhetssynen har i stort sett måst undvaras.

I avsnittet om energiformerna är den molekylära kinetiska teorin för värmet inarbetad, liksom termodynamikens satser.

En del som tilltalat anmälaren starkt är behandlingen av svängningsläran. Ämnet är en smula besvärligt för självstudier, och därför är denna c:a 40 sidor omfattande pedagogiskt mönstergilla och med exempel och utblickar berikade kurs välkommen som väl ägnad att ge den kännedom om t. ex. tvungna och kopplade svängningar, som motsvarar deras stora vikt inom olika områden, inte minst atomfysikens.

Ett ungefär lika långt och väl genomfört avsnitt är ägnat åt rotationen med snurrans teori och tillämpningar. Det sjunde kapitlet innehåller mätmetoder inom den mekaniska fysiken: för längd, tid, massa, täthet, kraft och tryck. Modernt och tekniskt tillfredsställande.

Boken är avsedd — det vågar anmälaren först nu yppa — som lärobok för de studerande vid Danmarks tekniske Høiskole. Dess tillkomst samt förnämliga tryck och utstyrsel torde förklaras av att lärarna där tillerkännas anslag och arbetshjälp för att göra föreläsningskurser o. d. tillgängliga i tryck. En jämförelse med våra statsmakters behandling av kulturstaten skulle alltför mycket bryta tidskriftens stil för att här tagas med!

Bokens uppgift att vara elementär lärobok har fordrat, att matematiken skall vara så enkel och klar som möjligt. Förf. har i texten infogat en och annan matematisk förklaring, t. ex. halvannan sida om e^{ix}, då svängningsrörelsens differentialekvation löses. Användning av vektorer och de enklaste räkneoperationerna

med sådana gör beskrivningen enkel och klar. Överhuvudtaget är pedagogiken mycket klarläggande. Med äkta danskt gemyt drar sig författaren ej för att ge en populär förklaring på en förutsedd svårighet för läsaren hellre än att låta endast en knapp matematisk härledning stå där halvförstådd av den mindre kunnige.

Endast några få frågetecken har jag ställt, som t. ex. då energi och arbete förklaras vara utom i dimensionellt avseende olika storheter, eller om ej reglerna om vektorprodukt hade kunnat göras något bättre genom att använda skruvning i stället för handens geometri.

Författaren anser, att såväl relativitets- som kvantmekaniken äro »av så stort allmänt intresse både i naturvetenskapligt och kunskapsteoretiskt avseende, att det icke kan vara försvarligt att lämna studerande i exakt naturvetenskap utan kännedom om dessa områden». Han ger därför i tre avslutande kapitel på hela 140 sidor en för självstudier avsedd introduktion till dem. De matematiska svårigheterna äro givetvis här större, men eftersom nyss antydda princip följes och de verifierande fysikaliska försöken även insatts i sitt sammanhang, så är även denna del mycket instruktiv.

Boken är att rekommendera som värdefull läsning i mekanik för experimentalfysiker och i fysik för matematiker.

Erik Ingelstam.

E. von Hofsten, *Praktisk statistik,* Svenska Bokförl., Stockholm 1942. 154 s. Kr. 8: —.

På många områden såväl i samhällslivet som inom naturvetenskapen är det omöjligt att få en noggrann kunskap om företeelserna utan att äga tillgång till siffermässiga uppgifter och sammanställningar. Vid bearbetning av ett statistiskt material har man långt utvecklade teoretisk-matematiska metoder att tillgå, vilka beskrivas i ett flertal läroböcker. En elementär framställning av den teoretiska statistiken ges exempelvis i lektor Frits Wigforss' lilla bok Matematisk statistik för pedagoger (Stockholm 1938, anmäld i Elementa, 22, 187).

Vid tillämpning av metoderna ställes man emellertid ofta inför spörsmål av praktisk art, vilka föga beröras av de flesta läroböcker. Dessas framställningar kompletteras på ett lyckligt sätt genom föreliggande arbete av fil. lic. Erland von Hofsten. På ett lättfattligt och ofta roande sätt ger förf. många värdefulla praktiska råd och anvisningar vid planläggning och genomförande av en statistisk undersökning.

Primärmaterialet kan ofta av kostnadsskäl eller av andra orsaker icke insamlas i fullständig form, utan man får nöja sig med ett stickprov. Så är t. ex. fallet i de s. k. Gallupundersökningarna. Förf. anger olika metoder för urval av stickprov och diskuterar tillförlitligheten i resultaten. En mycket instruktiv framställning ges av de moderna metodena för maskinell bearbetning av statistiskt material med s. k. hålkortsmaskiner. Dessa sinnrikt konstruerade maskiner ha på senaste tid allt mer börjat undanträng bearbetning medelst sortering för hand och summering med räknemaskiner. — Ett kapitel är ägnat den teoretiska statistikens grunder.

Beaktansvärda synpunkter ges på hur resultatet av undersökningen skall famläggas, hur tabeller uppgöras och hur sammanhang åskådliggöras grafiskt i diagram av olika slag. Boken avslutas med en översikt över svensk officiell statistik samt ett urval böcker och tidskrifter med statistiskt innehåll. *S.-G. Lindblom.*

Edward Kasner-James Newman, *Matematiken och fantasien.* Natur och Kultur 1942. 366 s., kr. 10: —, inb. 14: —.

De anglosaxiska popularisatorerna av matematik, naturvetenskap och teknik äro alltjämt lika oförtröttade och skickliga, och det länder svensk bokpublik till heder, att svenska förlag anse sig kunna utge den ena översättningen efter den andra. Någon brist på populära matematiska verk råder egendomligt nog inte. Inhemska verk ha vi av t. ex. Nörlund, K. G. Hagström, Örne och Almqvist, översatta äro Hogbens och Bells bestsellers. Tyska verk ha vi en hel rad av: Ahrens, Schubert, Rademacher-Toeplitz, Kowalewski, Lietzmann, Dörrie, Auerbach äro författarnamn ur högen.

Dock är Kasner-Newmans bok ingalunda överflödig. Näst efter Bells »Matematikens män» är den nog den bästa populära framställning av högre matematik, som hittills givits. På ett ibland lekfullt, men alltid kristallklart språk skildras det oändliga och Cantors upptäckter, transcendenta och imaginära tal, de icke-euklidiska och fyrdimensionella geometrierna, tidsfördriv, paradoxer i matematiken, slumpen och dess lagar, topologi (»gummibandsgeometri»), infinitesimalkalkylen och »patologiska kurvor». Framställningen är på det hela taget vederhäftig och djupgående, men förff. glömma fördenskull inte bort att vara roliga. Den amerikanska humorn, som pedantiska svenskar gärna stämpla som naivism, kryddar överallt framställningen. A. N. Whiteheads infall att likna matematiken vid Ofelia i Hamlet och Eddingtons limerick om den snillrike babianen äro obetalbara. Gåtan om

björnen vid Nordpolen är inte bara ett gott skämt utan illustrerar också bättre än långa utredningar en grundegenskap hos den icke-euklidiska, elliptiska geometrien.

Något finns det givetvis att anmärka på. Störande tryckfel äro $\sqrt{2} = 1{,}41414\ldots$ (sid. 27) och $\frac{3}{14} = 0{,}2142857121428571\ldots$ (sid. 62). Den oinitierade läsaren tror, att $\sqrt{2}$ är ett periodiskt decimalbråk (!) och att $\frac{3}{14}$ får en period av 8 (!) siffror, vilket är två grova fel; $\frac{3}{14}$ är $= 0{,}2\ 142857\ 142857\ldots$ I slutet av den stora nämnaren sid. 86 skall stå $\sqrt{\frac{1}{2}}$, sid. 300 Cayley i st. f. Calcy. Några olämpliga termer förekomma: det skall heta »numrerbart» i st. f. »räknebart» oändlig (sid. 57), mängdteorien i st. f. aggregatteorien (sid. 200).

Det enda grova felet ur matematisk synpunkt förekommer på sid. 249, där Lazzerini uppges ha fått π riktigt med 6 decimaler efter endast 3408 nålkast. Man kan härmed jämföra, att intet bråk med nämnaren 3408 ger ett lika noggrant π-värde (se teorien för kedjebråk).

Bland de medtagna områdena borde kanske »Tidsfördriv» och »Infinitesimalkalkylen» ha uteslutits, då de lätt kunna hittas på annat håll, Cantors »alef-tal» och Banach-Tarskis paradoxala teorem, då de ingalunda äro erkända av matematikerna. Förlagsreklamen för detta teorem torde icke gagna bokens syfte. »Patologiska» kurvor borde i stället ha ägnats ett särskilt kapitel.

En anmärkning är på sin plats gentemot de noter, som införts i den svenska upplagan. De äro alltför ofta onödiga och felaktiga. Sådana förekomma på sid. 33, 46, 86 och 89. Särskilt den sistnämnda är en fadäs.

Översättningen är synnerligen god.

Då Kasner-Newmans bok nästan uteslutande innehåller sådant, som icke ingår i fil.-mag.-kursen i matematik, borde varje matematiklärare läsa den. Han kommer icke att bli besviken.

Einar Lunell.

Gösta W. Funke, *Elementär elektroteknik med laborationer.* Lund 1942, 61 s., kr. 2:50. Rekvireras från Föreningen för matem.-naturv. underv. Nyodlingsv. 7, Ålsten; postgiro 85825.

Föreliggande arbete utgör nr 1 av en pedagogisk skriftserie utgiven av Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning. Det har enligt förordet tillkommit som handledning vid laborationskursen i elektroteknik vid den fortbildningskurs i fysik för lärare, som under sommaren 1942 anordnades av nämnda förening i samverkan med Folkundervisningsföreningen.

Syftet med boken kan alltså ej vara att ge någon mera full-

ständig framställning av den vittomfattande elektrotekniken. Författaren har valt ut några grundläggande kapitel ur den tekniska elektricitetsläran och starkströmstekniken: »magnetism», likströmsmaskinen, växelströmslära, växelströmsmaskiner och elektrisk belysning. Varje avsnitt inledes i regel med en teoretisk översikt, som följes av beskrivning av en eller flera belysande laborationer. Även enkla numeriska exempel ha lagts in.

Inledningskapitlet behandlar mätning av magnetiskt flöde och upptagning av magnetiseringskurvor för ringprov med ballistisk metod. Det bygger på en tidigare uppsats i Elementa (25, 75, 1942). Författaren ansluter sig till Giorgi-systemet och skriver grundekvationen för magnetiska kretsen

$$B = \mu \frac{IN}{l},$$

där B uttryckes i weber/m², $\frac{IN}{l}$ i amperevarv/meter och μ har värdet $4\pi \cdot 10^{-7}$ för vakuum. Emellertid synes författaren ej vilja följa Giorgi helt och identifiera $\frac{IN}{l}$ med magnetiska fältstyrkan H utan föredrar att tala om »amperevarvtalet per meter». Beskrivningen av tillhörande laboration är utförlig och torde ge många värdefulla synpunkter.

I det följande kapitlet om likströmsmaskinen är framställningen betydligt mera kortfattad men torde ändå ge en rätt god bild av maskinens egenskaper. Behandlingen av ankarreaktionen är dock enligt anmälarens mening alltför schematisk för att kunna ge en någorlunda klar uppfattning av saken. Bättre än resonemanget med vektorer hade säkert några enkla fältbilder varit. (Läsaren undrar nog också, vad kompensationslindningen fyller för uppgift.) Kurvorna i fig. 7 hade nog tarvat några kommentarer. Man frågar sig, varför lindningsmotstånden i samband med lab. nr 2 skola mätas med brygga. Volt-amperemetermetoden, som ju alltid användes i praktiken, är i de flesta fall att föredraga. Om övergångsmotståndet mellan borste och kommutator nämnes intet.

I allmänna växelströmsläran behandlas enkla kretsar med diagrammetoden dock utan diskussion av resonansfallen. Efter en kort beskrivning av trefasgeneratorn undersökas olika trefaskopplingar. I fig. 16 synes författaren ha valt fasföljden mot gängse praxis (och även mot vad som sedan skrives på s. 49). Mätning av trefaseffekt tages rätt ingående. Återstoden av kapitlet ägnas huvudsakligen åt transformatorn och asynkronmotorn. I samband med laborationen på den förra hade man kanske väntat ett omnämnande av den »indirekta» metoden för verkningsgradsbestäm-

ning. Likaså hade det nog ej skadat, om den vanliga stroboskopiska metoden för mätning av eftersläpning tagits med vid laborationen på asynkronmotorn.

Sista avsnittet, elektrisk belysning, handlar om upptagning av ljusfördelningskurvan medelst fotocell och beräkning av ljusflödet med Russels metod.

Beteckningar och benämningar i boken överensstämma i allmänhet med svensk elektroteknisk praxis. Dock hade man nog velat se aktiv och reaktiv strömkomponent i stället för det föga tilltalande »watt-» och »wattlös», likaså r/m i stället för vpm (varv per minut). Benämningen drossel håller för närvarande på att utträngas åtminstone inom krafttekniken av reaktor. För reaktiv effekt, som här betecknats med P_r, rekommenderas numera Q (eller P_q).

Värdet av boken ligger främst i de klara och utförliga beskrivningarna av laborationerna. Var och en, som står inför uppgiften att anordna en laborationsserie i elementär elektroteknik, bör ha god nytta av den.

G. Ödberg.

Bengt Lindwall, *Övningsbok i fysik*, Svenska bokförlaget 1942, 82 s., kr. 2: 50.

För det vanliga skolarbetet använda de flesta lärare numera knappast någon annan exempelsamling än studentuppgifterna, men att en annan samling av fysikaliska problem har ett stort värde visar ett närmare studium av Lindwalls Övningsbok i fysik.

Lindwalls exempelsamling är avsedd för gymnasialstadiet och utgöres till stor del av fysikaliska skrivningsuppgifter, som förf. använt vid olika läroanstalter. Uppgifterna kunna fördelas i tre grupper: enkla uppgifter, som behandla de fysikaliska grundbegreppen eller utförda laborationsexperiment, uppgifter lämpliga för skrivningar i gymnasiets båda högsta ringar och svårare uppgifter försedda med asterisk avsedda för intresserade elevers självstudier eventuellt i samband det enskilda arbetet.

Förf. har lyckats göra uppgifterna synnerligen instruktiva, och särskilt de uppgifter, som anknyta till laborationsförsök, studerar man med stort intresse. De ge lärare goda uppslag för variation av laborationer och laborationsmaterialets bearbetning och böra vara särskilt värdefulla för dem, som bedriva självstudier och ha begränsade möjligheter för laborationer. Boken kan livligt rekommenderas för intresserade elever, som vilja fördjupa sina kunskaper, men även svaga elever böra genom att studera ett lämpligt urval av de enklare uppgifterna få goda möjligheter att på egen hand öka

sina kunskaper. Önskvärt hade nog varit, om även dessa enklare uppgifter varit utmärkta genom någon speciell beteckning.

I de svar, jag kontrollerat, har jag blott i ett enstaka fall hittat en mindre felaktighet. I några exempel skulle man önska en klarare formulering, och även en del sakuppgifter skulle man önska annorlunda, men detta är något, som med större eller mindre berättigande kan anföras mot varje exempelsamling.

Helge Stolt.

Cahiers de Physique. Utg. av Laboratoires de l'institut d'optique, Saint-Cyr-sur-Mer (Var). 6 häften per år, 200 fr.

Första årgången av en ny fransk fysiktidskrift har nått fram till red. i gestalt av två lösa häften, augusti och december 1941. Innehållet är tämligen varierande. Kärnfysiken företrädes av en uppsats om den energetiska strukturen hos kvävekärnan N^{15}. Vidare förekommer ett studium av Atlantens djupvatten utanför Afrika, betraktelser över barometeravläsningar, bandspektra, Reynoldska talet, kolorimetri m. m. En optisk metod för bestämning av en kniveggs skärpa innebär en nyhet, enär den föreslagna metoden veterligen ej tidigare prövats.

Det är glädjande att Frankrike under nuvarande förhållanden har tid och kraft att starta en ny vetenskaplig tidskrift. Vi kunna icke annat än uttala en varm önskan om god fortsättning.

J. Tandberg.

Gradualavhandlingar.[1]

Harald Flemberg, *Optical Spectra within the Ordinary X-ray Region Recorded with Curved Crystal.* Ark. f. Mat., Astr. o. Fys. 28 A, N:o 18, 1942. Disp. i Uppsala den 26 maj 1942. Opponenter: docent Bengt Edlén och fil. lic. Edvin Ferner.

Om man vill registrera spektrallinjer med våglängder mindre än 1 250 Å, använder man som bekant vakuumspektrografer med konkavgitter. Vill man nå under 500 Å, bör dessutom det infallande ljuset träffa gittret under liten glansvinkel. Gäller undersökningen mycket kortvågiga spektra (under 150 Å), är denna sista fordran ett huvudvillkor. I själva verket är den uppnådda kortvågsgränsen direkt beroende av glansvinkeln. Medelst en konkavgitterspektrograf, där glansvinkeln blott var 1°2′, har man sålunda kunnat registrera optiska spektra ned till 12,1 Å.

[1] När ej annorlunda anges, är referatet av vederbörande förf:s egen hand.

För att med denna metod kunna tränga vidare mot kortare våglängder torde en ytterligare minskning av glansvinkeln vara nödvändig. Härvid stöter man emellertid på betydande tekniska svårigheter. Däremot förefaller det ej otänkbart, att man inom detta område skulle kunna använda vanliga röntgenmetoder, framför allt den ljusstarka metoden med cylindriskt böjd kristall. Föreliggande undersökning har avsett att experimentellt pröva denna möjlighet.

Avhandlingen inledes med en diskussion av de för konkavkristallmetoden karakteristiska felen och hur dessa kunna undvikas eller bringas att antaga tolerabla värden. Särskild uppmärksamhet ägnas härvid de speciella förhållanden, vilka bli aktuella, då man vill använda metoden för att registrera optiska spektra.

Därpå lämnas en ingående beskrivning av den för ändamålet konstruerade spektrografen. Kristallhållaren och plåthållaren äro förenade till en spektroskopisk enhet, vilken med tre stålkulor som fötter vilar mot den plana bottnen till spektrografens vakuumbehållare på sådant sätt, att enheten kan röras i förhållande till den fasta ljuskällan. Denna har som vanligt utgjorts av en kondenserad högvakuumgnista. Vakuumbehållaren har formen av en platt rektangulär låda. Gnistkammaren är placerad utanför vakuumbehållaren och fastskruvad vid en av behållarens långsidor. Gnistelektroderna kunna utbytas mot röntgenelektroder, vilket gör det möjligt att använda röntgenlinjer som referenslinjer. Mellan gnistkammaren och vakuumbehållaren finnes endast en öppning om några tiotal mm², och denna täckes helt av ett tunt Al-folium (1 μ). Foliet absorberar all strålning med längre våglängd än 20 à 30 Å. Som kristallgitter har använts glimmer och gips.

Det har lyckats att med denna anordning registrera optiska spektra i våglängdsområdet 17—6,3 Å. Det kända området för dylika spektra har sålunda utvidgats mot kortare våglängder med ungefär en oktav. Det har huvudsakligen varit principalserien i några He-liknande spektra, nämligen F VIII, Mg XI och Al XII, som varit föremål för uppmätning. Seriegränsen har extrapolerats fram och jämförts med teoretiskt beräknade värden. De tidigare vid B IV—F VIII observerade satelliterna framträda med stor intensitet vid Mg XI och Al XII. Även antalet dylika linjer har ökat vid dessa höggradigt joniserade spektra inom den isoelektroniska serien.

Ingvar Hedlund, *Die Geschwindigkeit der spontanen Hydrolyse einiger Sulfonsäurechloride,* Uppsala Universitets Årsskrift 1942:1. Disp. vid Uppsala Universitet den 7 mars 1942. Opponenter: docent Ole Lamm och fil. mag. Sigvard Wideqvist; extra opponent: docent Erik Hallén.

Ett antal aromatiska och alifatiska sulfonsyrekloriders hydrolyshastighet mättes i svagt saltsur lösning, dels i vatten, dels i blandningar av vatten och aceton. Vid hydrolysen, som icke katalyseras av vätejoner, bildas sulfonsyra och saltsyra, och dess fortskridande mättes med hjälp av lösningens elektriska ledningsförmåga. Denna metod medgav mätning av även mycket svårlösliga klorider och gav en för kinetisk mätning ovanligt hög grad av noggrannhet. Den uppställda uppgiften att mäta olika substituenters inflytande på reaktionshastigheten komplicerades därav att mediet hade en inverkan på hastigheten, olika för olika klorider, som ofta var större än inflytandet från en metyl- eller nitrogrupp. Ett dylikt förhållande vid andra reaktioner har visserligen förut i enstaka fall observerats men varken grundligt studerats eller tillmätts sin rätta betydelse. Som exempel på mediets roll kan anföras, att bensolsulfonsyreklorid i vatten hydrolyseras 13 % hastigare än sitt p-nitroderivat; i 62 % aceton hydrolyseras däremot det senare 10 gånger fortare. Av ej säkert känd anledning syntes dock de hastigheter som uppmättes i vattenlösning vara karakteristiska för sulfonsyrekloridernas konstitution, och effekten av en substituent kunde med framgång tolkas som ett elektrostatiskt inflytande från den i substituenten alltid förhandenvarande dipolen. Den markanta skillnaden mellan primära och sekundära klorider kunde dock ej förklaras. Vid hydrolys av $R \cdot SO_2Cl$ erhölls i vatten stigande hastighet i ordningsföljden: R = α-kloretyl, isopropyl, sek. butyl, klormetyl, bensyl, metyl, β-kloretyl, etyl, propyl, butyl, hexyl, o-nitrofenyl, m-nitrofenyl, p-nitrofenyl, fenyl, toluyl. Vid övergång till acetonhaltiga lösningar omkastas denna rangordning mer eller mindre, men dock är acetonens inverkan på hastigheten på ett regelbundet sätt beroende av substituenten. Ett försök att tolka även mediets inflytande såsom ett elektrostatiskt fenomen betingat av mediets dielektricitetskonstant lyckades endast såtillvida, som kalkylen gav en till tecken och ordningsföljd riktig, men till sin storlek alldeles otillräcklig effekt. Empiriskt värdefullt är konstaterandet av det stora mediuminflytandet, vilket gör mätningar endast i ett medium otillräckliga för teoretisk diskussion av reaktionshastigheten.

Olof Quensel, *Untersuchungen über die Gerstenglobuline,* Uppsala 1942, 97 s. Disp. i Uppsala $^{13}/_{5}$ 1942. Opponenter: docent Sven Brohult och fil. lic. Sigurd Säverborn.

Redan på ett tidigt stadium av författarens undersökningar visade det sig att kornets globulinfraktion utgöres av ett system av olika komponenter. Arbetet inriktades på att i möjligaste mån isolera dessa och undersöka deras fysikalisk-kemiska egenskaper. Dessa båda uppgifter äro ju intimt förbundna med varandra; för att kunna isolera komponenterna måste man i viss mån känna deras egenskaper och för att undersöka deras egenskaper måste man ha dem någorlunda rena. Det stegvisa arbetet på lösandet av dessa uppgifter fick därför alternerande föras vidare.

Härvid har Svedbergs ultracentrifugeringsmetodik spelat en stor roll. Ultracentrifugeringens stora betydelse ligger icke endast däri att vissa för ett ämne karakteristiska konstanter, t. ex. sedimentationskonstant och molekylvikt, kunna bestämmas. Den möjliggör även en ananlys av högmolekylära blandningar. De olika molekylslagen komma nämnligen att var för sig framträda mer eller mindre tydligt i de vid olika tidpunkter erhållna sedimentationsdiagrammen.

De fortsatta arbetena visade att kornets globulinfraktion består av fyra väldefinierade komponenter, vilka betecknades med α, β, γ och δ. Dessa ha olika fysikalisk-kemiska egenskaper, t. ex. i avseende på löslighet, molekylvikt och elektrokemiskt förhållande. Genom en kombination av härpå grundade fraktioneringsmetoder kunde en partiell separation av komponenterna genomföras. De metoder som användes voro: utfällning genom dialys och med ammoniumsulfat, ultrafiltrering, centrifugering och elektrofores. I de renaste fraktioner, som hittills erhållits, utgjorde huvudkomponenten över 80 %. Det rörde sig då om α- och γ-komponenterna. Utbytet var emellertid ringa. Att döma av föreliggande undersökningar synes det dock icke finnas några principiella hinder för att åstadkomma en längre gående separation, om tillräckligt stora mängder utgångsmaterial bearbetas. I de framställda β-fraktionerna utgjorde denna komponent ungefär $^{2}/_{3}$ av totalmängden. Vad δ-komponenten beträffar, utgör den uppenbarligen en mycket liten bråkdel av hela globulinmängden. Några systematiska försök att renframställa denna komponent ha icke gjorts.

För de olika komponenterna bestämdes bl. a. deras sedimentationskonstanter, varvid värdena 2,49, 6,21, 8,30 och 12,0 (enhet 10^{-13} c. g. s.) erhölls för α-, β-, γ- resp. δ-komponenten.

Möjligheten att bestämma diffusionskonstant och molekylvikt för en i en blandning ingående komponent har teoretiskt behandlats.

Med hjälp av härvid utarbetade beräkningsmetoder erhölls på diffusionskonstanten för α- resp. γ-komponenten värdena 8,4 resp. 4,4 (enhet 10^{-7} c. g. s.). Vidare beräknades α- och γ-komponentens molekylvikter, varvid värdena 26 000 resp. 166 000 erhöllos. Av sedimentationskonstanterna att döma torde β- och δ-komponenternas molekylvikter vara ungefär 100 000 resp. 300 000.

Huruvida de olika komponenterna äro differentierade i outlöst tillstånd i kornet undandrager sig allt bedömande. Men det är av stort intresse att de kunnat påvisas i extrakten, då olika saltlösningar (NaCl, NaBr och NaJ) använts som extraktionsmedel. Deras egenskaper tyckas ej heller sammanhänga med hur de isolerats. De ha t. ex. separerats endast genom fraktionerad dialys och endast genom ammoniumsulfatfällning utan att några skillnader ha märkts.

Något, som tyder på att de fyra komponenterna skulle stå i genetiskt sammanhang och att någon av dem skulle kunna uppstå ur eller ombildas till någon av de andra har icke iakttagits.

Komponenternas pH-stabilitetsområden ha undersökts. α- och γ-komponenterna äro stabila till över pH 11, β-komponenten börjar sönderfalla redan vid pH 8. På sura sidan ha lösningarna undersökts ned till pH 4 och där ha inga förändringar iakttagits för någon av komponenterna.

I elektrokemiskt avseende visa α- och β-komponenterna stora likheter. Deras isoelektriska punkter skilja sig dock tydligt från varandra. Värdena för α och β är resp. 5,00 och 4,90; γ-komponentens isoelektriska punkt ligger betydligt högre med värdet 5,70.

Tidskrifter.

Svensk kemisk tidskrift, 1942: 8—10.

Ur innehållet: H. Burström, The Colorimetric Determination of Nitrate in Plant Materials; C. Brosset, The Determination of Fluoride Ion Concentrations in Acid Solutions; S. Sunner und T. Nilsson, Über eine Methode zur Herstellung von organischen Thiosäuren; O. Samuelson, Om jonfördelning och svällning vid jonbindande fasta ämnen; C. Brosset and Britta Gustaver, The Electrometric Measurement of Low Fluoride Ion Concentrations; K. Ahlberg, Oxydation von Disacchariden und Dextrinen.

ERA, 1942: 6—10.

Ur innehållet: Kraftförsörjningen 1942—43; Den svenska statsbaneelektrifieringen; Bevattningsanläggningen vid Lund; Kanthal, det förnämliga svenska motståndsmaterialet; Elporslin och säkringar; Standardisering av elektrisk material; Verkningsgrad och värmefördelning vid elektriska hushållsbakugnar; Emaljerade småmotstånd; Vattenkraftutbyggnaderna; Rundradion i Sverige — några data om den tekniska utvecklingen; Elbastu för bostaden. Notiser om el-nyheter.

Flygning, 1942: 16—21.

Ur innehållet: Modell- och segelflygning i Finland; Provflygare; Flygambulansen-räddaren; Elementär meteorologi; Svenskt segelflyg 1941—42; Luftens lastbilar; Den elektriska utrustningen i flygplan och på flygmotorer; Flygplanpropellerns framtid; Modern stjärnnavigering i flygets tjänst; Den första »verkliga» flygmotorn firar 40-årsjubileum; Segelflygplans acceleration vid gummirepstart.

Teknik för alla, 1940: 37—47.

Ur innehållet: Vår största rakbladsfabrik; Kortvågsterapi; Trafikflygets motorkontroll; Telefonapparaten — en översikt från Bell till »petmojen»; Rörpost; Störtflygningens problem; Ljuskonditionering; Kan ett fjädrande hjul användas för bildrift?; E. M. C. Tigerstedt — Finlands Edison; Hur verkar en kylmaskin?; Kolsyrans kretslopp; Hur en svensk kompass konstruerades och blev en världsartikel; Samuel Owens balansångmaskin; Segelflygplanets instrumentering; Aluminium; Elektriska ur; Järtecken i solen; Vad är en värmepump?. Under rubriken »Händigt folk»: Episkop; Förstoringsapparat; Polering av metaller; Gängsnitt och gängtappar; Svarvstålens slipning; Hur man gör en spiralfjäder; Glasblåsning.

Matematisk Tidsskrift, København 1941: 3—4; 1942, A: 1—3, B: 1—2.

Ur innehållet i *A*: Fr. Fabricius-Bjerre, Vektorregning III; Chr. Weiss, Tallet 9 og Endecifrene i Potenser af 9; H. Clausen, Eksempler paa anvendelse af hyperblens parameterfremstilling; P. W. Marke, De virtuelle Arbejders Princip; S. Bundgaard, Elementær abstrakt Algebra; D. Fog, Plangeometri contra sfærisk Geometri; F. Fenger, Additionsformlerne. Ur innehållet i *B*: T. Bang, Om Spaltning af næstenperiodiske Funktioners Fourierrækker; B. Jessen, En Bemærkning om Polyedrers Volumen; H. Bohr, Om Potensrækker med Huller; Fr. Fabricius-Bjerre, Nogle bemærkninger om plane kurver af 3. orden og rumkurver af 4. orden; J. Nielsen, Fixpunktfrie Afbildninger; A. Jessen, En Metode til Undersøgelse af endelige Grupper; Litteraturanmeldelser; Opgaver.

Fysisk Tidsskrift, København 1942: 4—5.

Ur innehållet: J. Olsen, D. B. la Cour; J. Koch, Om Højspænding til kernefysisk Forskning; V. Kruse, Om Erkendelseteori og Fysik; Fr. Heegaard, V Poulsen; Chr. Jensen, Nogle Skoleforsøg: Lysets Spedning, Spændingsforholdene i en Vekselstrømkreds, Princippet i Elektronmikroskopet; Lysstraalers Interferens, Daltons lag, Radiometerkræfter.

Nordisk Astronomisk Tidsskrift, København 1942: 3.

Ur innehållet: Y. Öhman, Om ljusets polarisation och dess användning inom astronomisk forskning; C. Störmer, Merkelige nordlys iakttatt og målt i det sydlige Norge; J. P. Møller, Stereoskopbillede af Banen for Komet Whipple-Bernasconi-Kulin (1942 a); J. P. Møller, Kometerne.

Norsk Matematisk Tidsskrift, Oslo 1942: 3.

Ur innehållet: A. Ore, Om doppelt symmetriske determinanter og tilhørende homogene, lineare likningssystemer; E. S. Selmer, En enkel summasjonsmetode i primtallsteorien og dens anvendelse på »Bruns sum»; Bokanmeldelser; Opgaver.

Problemavdelning.[1]

Matematiska uppgifter.

1245) *Det finnes trianglar, i vilka* $\operatorname{tg} C = \operatorname{tg}^2 B \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2}$. *Visa, att i en sådan triangel är även* $\sin A = \operatorname{tg} B \cdot \cos C$. *X.*

1246) *En rät linje genom tyngdpunkten E i en triangel skär sidorna eller deras förlängningar i F, G och H. Tag E som origo och inför en positiv riktning på linjen. Om koordinaterna för F, G och H äro* x_1, x_2 *och* x_3, *så gäller* $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = 0$. *F. E.*

1247) *Från en punkt P fällas normalerna* PQ_1, PQ_2 *... mot samtliga sidoytor i en regelbunden polyeder. Var ligger tyngdpunkten till punktsystemet* Q_1, Q_2 *...?* *X.*

Enklare matematiska uppgifter.[2]

1248) Beräkna summan av rötternas kuber i ekvationen

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0.$$

Svar: $3pq - p^3 - 3r$.

1249) Rötterna till ekv. $(ax)^2 + (a+x)^2 = 1$ äro x_1 och x_2. Visa att

$$\frac{x_1^3 - x_1}{x_1^2 + 1} = \frac{x_2^3 - x_2}{x_2^2 + 1} = \frac{a^3 - a}{a^2 + 1}.$$

1250) Lös ekvationssystemet $\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 2 \\ x^3 + y^3 &= 2 \end{aligned}\right\}$.

Svar:
$$\begin{array}{c|c|c|c|c} x & 1 & 1 & \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1 + \sqrt[4]{12}) & \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1 - \sqrt[4]{12}) \\ \hline y & 1 & 1 & \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1 - \sqrt[4]{12}) & \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1 + \sqrt[4]{12}) \end{array}.$$

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. BÅGMAN, till vilken uppgifter och lösningar kunna insändas under adress: Högre allm. läroverket å Östermalm, Stockholm.

[2] Uppg. 1248, 1250—1252, 1260 äro insända av *B. E. Dahlin*; 1253—1258 av *R. Ingre*; 1249 och 1259 av *X*.

1251) Lös ekvationen $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x + \cot x = -2$ samt beräkna $\lim_{x \to 180^\circ} \left(\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x + \cot x \right)$.

Svar: $135^\circ + n \cdot 180^\circ$; -1.

1252) I triangeln ABC är $\operatorname{tg} C = 4$. Visa, att $T = a^2 + b^2 - c^2$.

1253) I en cirkel drages en korda. I vartdera segmentet inskrives dels en kvadrat, dels en liksidig triangel med ett hörn i kordans mittpunkt. Förhållandet mellan kvadraternas sidor är m och mellan trianglarnas n. Visa, att $15n(m-1)^2 = 16m(n-1)^2$.

1254) Två lika långa kordor i en cirkel skära varandra i förhållandet $n : 1$. Vinkeln mellan kordornas lika delar är α och varje kordas medelpunktsvinkel β. Visa, att

$$\frac{1 + \cos\alpha \cos\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} + \frac{n^2 + 1}{2n} = 0.$$

1255) Förhållandet mellan de inre och yttre bissektriserna till den räta vinkeln i en triangel är n. Visa, att förhållandet mellan de in- och omskrivna cirklarnas radier är $\sqrt{\frac{2}{n^2+1}} - 1$.

1256) Beräkna n och $\sin\alpha$ i ekvationssystemet

$$\left.\begin{aligned} n \sin x &= \sin(\alpha - x) \\ \cot x - \cot(\alpha - x) &= n \cot\alpha \end{aligned}\right\},$$

då man vet, att n är ett helt tal, α en spetsig vinkel, vars sinus och cosinus kunna uttryckas exakt i hundradelar.

Svar: $n = 5$; $\sin\alpha = 0{,}28$.

1257) De in- och omskrivna cirklarnas radier till en triangel ABC äro resp. r och R. Längden av bissektrisen till vinkeln A är v. Visa, att $v \sin\frac{A}{2}\left(2R\sin^2\frac{A}{2} + r\right) = r\left(4R\sin^2\frac{A}{2} + r\right)$.

1258) I triangeln ABC är I den inskrivna cirkelns medelpunkt och AE bissektris. Visa, att cirkeln BIC skär cirkeln med AE som diameter under räta vinklar.

1259) I den kronliknande figur, vilken utgöres av en sidoyta i en regelbunden dodekaeder som basyta och de fem angränsande sidoytorna, bilda de linjer, som förena kronans spetsar med tyngdpunkten i basytan, 45° vinkel med denna yta.

1260) Kurvorna $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ och $y = 3x^2 + 2ax + b$ skära varandra under rät vinkel i punkten (1; 1). Bestäm konstanterna a, b och c.

Svar: $a = -3{,}5$; $b = 5$; $c = -1{,}5$.

Lösn. till uppg. 1219—1221.

1219) *Inom en given spetsvinklig triangel ABC väljes en punkt P. Cirklar uppritas med PA, PB och PC som diametrar. När har den figur, som begränsas av dessa cirklars utanför triangeln liggande bågar, så liten yta som möjligt?* *X.*

Om normalerna från P mot triangelns sidor träffa dessa i A_1, B_1, C_1 (A_1 på BC o. s. v.), så äro dessa punkter gemensamma ändpunkter för två och två av de cirkelbågar, som begränsa det ifrågavarande området O. Äro vidare A_2, B_2, C_2 mittpunkterna av AP, BP, CP resp., så är tydligen ytan av sexhörningen $A_2C_1B_2A_1C_2B_1A_2$ hälften av triangelytan ABC; O har alltså minimiyta på samma gång som den sammanlagda ytan av sektorerna $A_2B_1AC_1$, $B_2C_1BA_1$, $C_2A_1CB_1$. Denna summa är $\frac{1}{4}[(\pi-\alpha)\overline{PA}^2 + (\pi-\beta)\overline{PB}^2 + (\pi-\gamma)\overline{PC}^2]$, om $\sphericalangle A$ i triangeln ABC är α o. s. v. P skall alltså ligga i tyngdpunkten till »massorna» $\pi-\alpha$, $\pi-\beta$, $\pi-\gamma$ placerade i A, B, C resp., vilket följer av summans uttryck med hjälp av ett rätvinkligt koordinatsystem. Man har nämligen $\Sigma m_i[(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2] = (x^2+y^2)\Sigma m_i - 2x\Sigma m_i x_i - 2y\Sigma m_i y_i + \Sigma m_i(x_i^2+y_i^2) =$

$$= \Sigma m_i\left[\left(x - \frac{\Sigma m_i x_i}{\Sigma m_i}\right)^2 + \left(y - \frac{\Sigma m_i y_i}{\Sigma m_i}\right)^2\right] + \text{en konstant.}$$

Summan har sitt minsta värde, då $x = \frac{\Sigma m_i x_i}{\Sigma m_i}$ och $y = \frac{\Sigma m_i y_i}{\Sigma m_i}$, d. v. s. då $(x; y)$ ligger i tyngdpunkten till massorna m_i i (x_i, y_i) resp., om $\Sigma m_i > 0$; däremot maximum, om även negativa massor tillåtas och $\Sigma m_i < 0$. I denna uppgift är $\Sigma(\pi-\alpha) = 2\pi$. *X.*

1220) *Den i triangeln ABC inskrivna cirkeln tangerar sidorna a, b, c i resp. A_1, B_1, C_1. Cirkelns medelpunkt är I. Visa, att linjer dragna genom A_1, B_1, C_1 parallella med resp. AI, BI, CI råkas i samma punkt.* *X.*

I triangeln $A_1B_1C_1$ äro linjerna från I mittpunktsnormaler till sidorna. De med dem parallella linjerna från hörnen äro då höjder och råkas således i en punkt. *B-r* och *F. E.*

Även löst av *E. Smn.*

1221) *Bestäm antalet kvadratrötter* $< N$, *vilkas första decimal är* t, *om för* $t = 0$ *de hela talen ej medräknas.* N *är ett helt, positivt tal.* *C.*

Jag betecknar med A_t antalet kvadratrötter $< N$, vilkas första decimal är t. Totala antalet kvadratrötter, som äro verkliga decimalbråk $< N$, är $N^2 - N$. Fördelade sig dessa lika på de olika grupperna, skulle varje A_t vara $= \frac{N^2 - N}{10} = T$.

Ett tal, vars heltal är n och första decimal t, ligger mellan

$$n + 0{,}1\,t \text{ och } n + 0{,}1\,(t+1).$$

Om kvadratroten ligger mellan dessa tal, ligger talet självt mellan

$$n^2 + 0{,}2\,nt + 0{,}01\,t^2 \text{ och } n^2 + 0{,}2\,n(t+1) + 0{,}01\,(t+1)^2$$

eller om $n = 5r + s$

mellan $n^2 + rt + 0{,}2\,st + 0{,}01\,t^2$

och $n^2 + r(t+1) + 0{,}2\,s(t+1) + 0{,}01\,(t+1)^2$.

Antalet hela tal inom detta intervall är $r + b_t(s)$, om $b_t(s)$ är antalet heltal mellan

$$0{,}2\,st + 0{,}01\,t^2 \text{ och } 0{,}2\,s(t+1) + 0{,}01\,(t+1)^2.$$

Speciellt är $b_t(0) = 0$ för alla t-värden.

Tabell över $b_t(s)$:

$t =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$s = 1$	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
2	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0
3	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0
4	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0
$c_t =$	0	2	2	2	4	1	3	3	3	0

Om $N = 5k + p$, blir $A_t = \sum_{n=0}^{5k+p-1} [r + b_t(s)] = \sum_{r=0}^{k-1} [5r + \sum_{s=1}^{4} b_t(s)] + B_t$,

där $B_t = 0$ för $p = 0$ och för övriga p-värden: $B_t = \sum_{s=0}^{p-1} [k + b_t(s)]$.

Införas beteckningarna $d_t(0) = d_t(1) = 0$ och för övriga p-värden $d_t(p) = \sum_{s=1}^{p-1} b_t(s)$ samt $c_t = \sum_{s=1}^{4} b_t(s)$, erhålles $A_t = \frac{5k(k-1)}{2} + k \cdot c_t + pk + d_t = \frac{k}{2}(5k + 2p - 1) + (c_t - 2)\,k + d_t = \frac{N-p}{10}(N + p - 1) + (c_t - 2)\,k + d_t = T - P + (c_t - 2)\,k + d_t$, där $T = \frac{N^2 - N}{10}$ och $P = \frac{p^2 - p}{10}$.

Av tabellen över $b_t(s)$ erhålles vidare: för $p=2: d_4=d_7=1$; $p=3: d_2=d_6=d_7=d_8=1$ och $d_4=2$; $p=4: d_1=d_2=d_3=1$, $d_4=3$, $d_6=d_7=d_8=2$. Övriga d-värden äro $=0$. Man får således $A_t=T-2k-P$ för $t=0$, $A_t=T-P+d_t$ för $t=1, 2, 3$, $A_t=T+2k-P+d_t$ för $t=4$, $A_t=T-k-P$ för $t=5$, $A_t=T+$ $+k-P+d_t$ för $t=6, 7, 8$, $A_t=T-2k-P$ för $t=9$. *A. W.*

Även löst av *B-r.*

Studentexamen och fyllnadsprövning efter studentexamen.

November 1942.

Matematiska uppgifter för latinlinjen.

1. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^2-y^2=a(x-y), \\ x^2+xy=by, \end{cases}$$

där a och b äro konstanter.

2. I en cirkelsektor med radien 12 cm inskrives en cirkel. Sektorns radier delas mitt itu av tangeringspunkterna. Beräkna sektorns medelpunktsvinkel och yta.
3. I ett likbent parallelltrapets är den större av de parallella sidorna 10 cm och diagonalerna 9 cm. Var och en av de spetsiga vinklarna är 63°,43. Beräkna den mindre av de parallella sidorna i det ena av de båda fall, som äro möjliga.
4. I en konvergent oändlig geometrisk serie är andra termen $-\frac{3}{8}$ och summan $2\frac{2}{3}$. Vilken är serien?
5. Diagonalerna i en romb äro a och b. Den i romben inskrivna kvadratens sida är k. Bevisa, att

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{k}.$$

6. I en likbent triangel är den vid basen vidskrivna cirkelns radie $^5/_8$ av höjden mot en av de lika stora sidorna. Beräkna triangelns vinklar.
7. En sida i en triangel delas av bissektrisen till den motstående vinkeln i förhållandet 5 : 7 och av tangeringspunkten för den inskrivna cirkeln i förhållandet 3 : 5. Visa, att en vinkel i triangeln är aritmetiskt medium till de övriga vinklarna.

8. Från en punkt P på kurvan $y = 5x - x^2$ dragas normalerna mot koordinataxlarna. Uttryck omkretsen av den rektangel, som bildas av normalerna och koordinataxlarna, såsom funktion av x-koordinaten för punkten P. Undersök grafiskt i ett särskilt diagram, hur denna funktion varierar, då P genomlöper den ovanför x-axeln belägna delen av kurvan. Bestäm med hjälp av detta diagram eller på annat sätt det största värde, som rektangelns omkrets kan antaga.

Resultat: **1.** $x_1 = y_1 = 0$; $x_2 = y_2 = \frac{b}{2}$; $x_3 = \frac{ab}{a+b}$, $y_3 = \frac{a^2}{a+b}$.

2. 73°,74; 92,66 cm². **3.** 5,10 cm eller 6,90 cm. **4.** 3, $-\frac{3}{8}, \frac{3}{64} \ldots$

6. 23°,08; 78°,46; 78°,46. **7.** Sambandet mellan vinklarna kräver, att en vinkel är 60°. Sedan sidorna befunnits förhålla sig som 5 : 7 : 8, visas medels cosinusteoremet, att den mot sidan 7 stående vinkeln är 60°. **8.** Omkretsen $= 12x - 2x^2$, varierar vid växande x-värde från 0 till max. 18 cm för $x = 3$ för att sedan avtaga mot 10 cm för $x = 5$.

Matematiska uppgifter för realgymnasiet.

Allmän kurs.

1. Kurvan $y = (x-1)^3$ skär x-axeln i A och y-axeln i C. Tangenterna och normalerna till kurvan i A och C bilda en fyrhörning $ABCD$. Beräkna dennas yta.
2. Lös ekvationen

$$\sin x + \cos x = 2 \cos 2x.$$

3. Summan av en geometrisk serie med 50 termer är 30. Produkten av de 20 första termerna är $\frac{1}{100}$ av produkten av de 10 första termernas kvadrater. Beräkna seriens kvot och första term.
4. Beräkna ytan av en triangel, i vilken den inskrivna cirkelns radie är 1 cm, en sida 4 cm och en intill denna sida liggande vinkel 60°.
5. I triangeln ABC utgöres ett hörn av punkten A (2; 2), hörnet B ligger på linjen $x - 3y + 6 = 0$, och medianen till sidan AC är 3 längdenheter. Medianerna skära varandra i origo. Bestäm koordinaterna för B och C.
6. En sfärisk sektor är inskriven i ett klot med radien r, så att dess medelpunkt ligger på det givna klotets yta. Bestäm den sfäriska sektorns totala yta, då dess volym är så stor som möjligt.

7. I en triangel ABC är vinkeln $C = 100°$ och $CA : CB = 5 : 3$. Medianen till sidan AB utdrages, tills den skär den kring triangeln ABC omskrivna cirkeln i D. Visa, att $DB : DA = 5 : 3$, och beräkna förhållandet mellan de delar, i vilka cirkelns yta delas av kordan CD.
8. $ABCD$ är en regelbunden tetraeder. Ett med begränsningsytan ABC parallellt plan skär kantlinjerna DA, DB och DC i A', B' och C' respektive. D' är mittpunkten i triangeln ABC. Vinkeln mellan två genom D' gående sidoytor i tetraedern $A'B'C'D'$ är 120°. I vilket förhållande delas kantlinjerna DA, DB och DC av planet $A'B'C'$?

Resultat: **1.** 1 ytenhet. **2.** $135° + n \cdot 180°$; $24°{,}30 + n \cdot 360°$; $245°{,}70 + n \cdot 360°$. **3.** Första termen $\frac{100}{3}(1 - \sqrt[50]{0{,}1})$ och kvoten $\sqrt[50]{0{,}1}$ eller första termen $\frac{100}{3}(1 + \sqrt[50]{0{,}1})$ och kvoten $-\sqrt[50]{0{,}1}$. **4.** $\frac{9 + \sqrt{3}}{2} = 5{,}366$ cm². **5.** $B(0; 2)$ och $C(-2; -4)$ eller $B(-1{,}2; 1{,}6)$ och $C(-0{,}8; -3{,}6)$. **6.** Totala ytan är $\frac{9\pi r^2}{16}(2 + \sqrt{7}) = 0{,}821\, r^2$ ytenh. $\left(\text{sektorns radie är } \frac{3r}{2}\right)$. **7.** 1,235 (medelpunktsvinkeln = 170°,52). **8.** $DA' : A'A = 4 : 1$.

Matematiska uppgifter för realgymnasiet.

Specialkurs.

1. I en ellips är storaxeln konstant. Visa, att största möjliga värdet av skillnaden mellan halva parametern och avståndet från en brännpunkt till närmaste vertex är $^1/_8$ av storaxeln.
2. Bestäm ekvationerna för de tangenter med längden 2 längdenheter, som kunna dragas från punkter på linjen $x - y = 0$ till cirkeln $(x - 1)^2 + y^2 = 1$.
3. Från en godtycklig punkt på en given hyperbel har man dragit dels brännpunktsradierna, dels linjen till hyperbelns medelpunkt, den s. k. medelpunktsradien. Bevisa, att skillnaden mellan rektangeln av brännpunktsradierna och kvadraten på medelpunktsradien är en konstant, som kan vara positiv, noll eller negativ, beroende på hyperbelns form.
4. Bestäm maximum av $S - s$, där S är summan av den oändliga serien $3 - 3\sin^2 x + 3\sin^4 x - 3\sin^6 x + \ldots\ldots$ och s summan av den oändliga serien $4\sin x - 4\sin^3 x + 4\sin^5 x - 4\sin^7 x + \ldots\ldots$

5. Konstruera kurvan $y = \frac{x^3}{x^2 - 3}$ med angivande av eventuella asymptoter, maxima och minima. Undersök, hur kurvtangentens vinkelkoefficient varierar, och åskådliggör detta i ett diagram. Angiv även antalet tangenter för olika värden på vinkelkoefficienten.
6. I en punkt P på en parabel drages normalen. Vinkelrätt mot denna drages från brännpunkten en linje, som skär normalen i Q. Sök och konstruera orten för Q, då P rör sig utefter parabeln.
7. Angiv ekvationen för den gemensamma tangent till kurvorna $y = 4{,}25 + x^2$ och $y = x^3$, vilken tangerar kurvorna i punkter, som ligga på olika sidor om ordinataxeln.

Resultat: **2.** $x = 2$; $y = -1$; $4x - 3y + 1 = 0$; $3x - 4y + 2 = 0$. **3.** Skillnaden är $b^2 - a^2 = c^2 - 2a^2$, som är pos., noll eller neg., då excentriciteten är resp. större än, lika med eller mindre än $\sqrt{2}$. **4.** Max. $= 4$ för $x = 210° + n \cdot 360°$ och $x = 330° + n \cdot 360°$. **5.** $y_{max} = -4{,}5$ för $x = -3$; $y_{min} = 4{,}5$ för $x = 3$; asymptoter: $x = \pm\sqrt{3}$ och $y = x$. Vinkelkoeff. $(= k)$ är $\frac{x^2(x^2 - 9)}{(x^2 - 3)^2}$, varav framgår, att antalet tangenter blir: för $k \geqq 1$ *inga*, för $1 > k > 0$ *två*, för $k = 0$ *tre* och för $k < 0$ *fyra* stycken. **6.** Om den givna parabelns ekv. är $y^2 = 4ax$, blir ortens ekv. $y^2 = a(x - a)$. Man finner lätt, att Q är parabelnormalens mittpunkt. **7.** $3x - y + 2 = 0$.

Uppgifter i fysik.

Obs. Lösningarna till uppgifterna 1—2 samt 6 och 7 böra åtföljas av enkla figurer. — Erforderliga konstanter, vilka ej äro uppgivna i problemens text, hämtas ur formelsamlingen.

1. En rektangulär, jämntjock och homogen metallplåt är utefter en med två motsatta kanter parallell linje vikt i två mot varandra vinkelräta delar, vilkas ytor förhålla sig som 3 : 4. Plåten placeras på ett horisontellt underlag i sådant läge, att vikningslinjen kommer högst och de med densamma parallella kanterna vila mot planet. Beräkna förhållandet mellan de båda trycken mot underlaget.
2. En rak, cirkulär cylinder med radien 10,0 cm fasthålles med axeln horisontell. På en punkt av cylinderns översta generatris är ett lätt snöre fastgjort, och i snörets fria ända sitter en liten kula. Snöret sträckes, så att det blir horisontellt och vinkelrätt mot den nämnda generatrisen. Avståndet från generatrisen till kulans medelpunkt är då 42,8 cm. Om kulan släppes, lindar

snöret upp sig på cylindern. Beräkna den hastighet, med vilken kulan träffar cylinderytan. Snöret antages vara otänjbart och fullkomligt böjligt. Luftens motstånd mot rörelsen kan lämnas utan avseende.

3. Vid ett skolexperiment för bestämning av luftens täthet använde man en lufttät plåtbehållare, försedd med två sidorör, det ena med en kran, det andra med en cykelventil. Kranen stängdes, och luft inpumpades genom cykelventilen, varpå behållaren vägdes. Vikten befanns vara 353,96 g. Därefter förbands det kranförsedda sidoröret genom en gummislang med ett omböjt glasrör, som utmynnade under vattenytan i en vanna. Över glasröret välvdes en volymgraderad vattenfylld glascylinder. Då kranen öppnades, strömmade luft in i mätcylindern och trängde undan vattnet där. Sedan kranen åter stängts och gummislangen avtagits, vägdes behållaren ånyo; vikten var nu endast 352,80 g. Slutligen reglerades mätcylinderns höjd i förhållande till vannan, så att vattenytan i vannan och i cylindern stodo i jämnhöjd. Luftvolymen i cylindern avlästes då till 982 cm^3. Beräkna luftens täthet vid 0° och 760 mm kvicksilvertryck. Barometerståndet var vid tillfället 764,0 mm kvicksilver och temperaturen 19° C. Vattenångans maximumtryck vid denna temperatur är 16,5 mm kvicksilver. Luften i behållaren kan anses fri från fuktighet. Rörledningens volym kan försummas.
4. Vid ett laboratorieförsök för bestämning av vattnets ångbildningsvärme förfor man på följande sätt. Genom korken till en termosflaska, innehållande omkring en liter vatten, infördes en doppvärmare samt ett avloppsrör för den bildade vattenångan. Doppvärmaren kopplades till en strömkälla; strömstyrkan (i) genom doppvärmaren och spänningen (V) mellan dess ändpunkter mättes medelst ampèremeter och voltmeter. Termosflaskan med tillbehör placerades på den ena vågskålen av en balansvåg. Sedan vattnet kommit i kokning, frånkopplades för ett ögonblick de elektriska ledningarna från doppvärmaren, varefter vågen tarerades till jämvikt. Efter återinkoppling slöts strömmen under en viss tid (t). Genom förnyad vägning bestämdes mängden (m) av det bortkokta vattnet. Följande data erhöllos: $i = 1{,}50$ amp, $V = 65{,}5$ volt, $t = 8$ min 0 sek och $m = 20{,}7$ g. Genom särskilda mätningar fann man, att under försöket 300 wattsek förlorats till omgivningen. Vilket värde på vattnets ångbildningsvärme erhöll man ur dessa observationer? 1 wattsek = 0,239 cal.
5. Ett kikarobjektiv är sammansatt av en samlingslins av kronglas och en spridningslins av flintglas, vilkas huvudaxlar samman-

falla. Kronglasets brytningsindex är för rött, gult och violett ljus respektive 1,526, 1,533 och 1,547, flintglasets 1,628, 1,642 och 1,676. Objektivet är akromatiserat för rött och gult ljus; dess brännvidd är för dessa båda ljussorter 100 cm. Huru stor är objektivets brännvidd för violett ljus? Objektivet kan betraktas som en tunn lins.

6. En ljusstråle från spalten *A* träffar en yta av en vridbar »polygonspegel» *B* och reflekteras av denna åt sidan mot en fast spegel *C*, som är injusterad på sådant sätt, att strålen återkastas samma väg, som den kommit. Polygonspegeln består av 8 plana speglande ytor, som äro parallella med spegelns rotationsaxel; ett mot axeln vinkelrätt tvärsnitt bildar en regelbunden 8-hörning. Bringas *B* att rotera med ett visst, noga bestämbart varvtal, träffar den från *A* utgående strålen, då den återvänder från *C*, nästa yta på *B* och återkastas i en riktning *BD*, som bildar en noggrant bestämbar, liten vinkel med riktningen *BA*. Sätt upp ett matematiskt uttryck för beräkning av ljusets hastighet i vakuum, om avståndet *BC* är *L* m, varvtalet per sek *N* och luftens brytningsexponent *n* och om den från *B* återkastade strålen *BD* förutsättes ligga mellan *BA* och *BC* och med den förra bildar vinkeln *v* minuter. Polygonspegelns rotation tänkes försiggå i riktning från *C* mot *A*.
7. En milliampèremeter, vars motstånd är 50 Ω, ger fullt utslag, 50 skaldelar, då en ström av exakt 0,002 A passerar genom densamma. Genom tillkoppling av olika förkopplingsmotstånd kan man också använda den som voltmeter för olika mätområden. Man ville med ett sådant instrument noggrant bestämma en spänning, som låg i närheten av 4 V, men hade endast förkopplingsmotstånd, som svarade mot mätområdena 3 V och 1,5 V; ett utslag över hela skalan betyder sålunda i förra fallet 3 V och i senare 1,5 V. Man seriekopplade därför de båda motstånden och använde det så erhållna motståndet som förkopplingsmotstånd. Vid mätningen erhölls då ett utslag på 47 skaldelar. Hur stor var den uppmätta spänningen?
8. Ett s. k. likriktarrör består av en evakuerad glasballong, försedd med två elektroder. Den ena elektroden utsänder i glödande tillstånd elektroner. Under förutsättning att denna är katod och den motsatta elektroden anod, röra sig elektronerna utan nämnvärd starthastighet från den förra till den senare. Deras potentiella elektriska energi övergår därvid alltmer i rörelseenergi. Beräkna den största hastighet, som en elektron kan ha, då den träffar anoden, om spänningen på röret är en sinusformad växelspänning av 220 eff.volt. Man kan anse spänningen kon-

stant under den korta tid elektronen är på väg från katod till anod. Förhållandet mellan en elektrons laddning i coulomb och massa i gram är $1{,}76 \cdot 10^8$. 1 joule $= 10^7$ erg.

Resultat: **1.** 187 : 163. **2.** 167 cm/sek. **3.** 0,001285. **4.** 541. **5.** Skrives linsformeln $\frac{1}{f} = (n-1)k$, så blir för kronglaslinsen $k = \frac{10}{212}$ och för flintglaslinsen $k = -\frac{5}{212}$ och brännvidden för violett ljus $\frac{21200}{209} = 101{,}4$ cm. **6.** $\frac{86400\, n \cdot N \cdot L}{5400 - v}$ m/sek. **7.** $\frac{47}{50}(2{,}9 + 1{,}4 + 0{,}1) = 4{,}14$ volt. **8.** $1{,}05 \cdot 10^9$ cm/sek.

Realexamen H. T. 1942.

Provräkning.

1. Lös ekvationen

$$(9 + x^2) : (9 - x^2) + \frac{x+2}{3} : \left(1 + \frac{x}{3}\right) - 4 : (3 - x) = 0.$$

2. En handlande köpte 40 ton potatis till ett pris av 12 kr per 100 kg. Till detta lånade han pengar i en bank mot 5 % ränta. Sex månader senare sålde han potatisen för 14 kr 60 öre per 100 kg och återbetalade då lånet jämte ränta. Av partiet hade dock 2 ½ % skadats och måste kasseras. Hur många procent vann han på denna affär, om man till inköpspriset räknar även räntan på lånet?
3. En bank beräknar vid diskontering av växlar ½ % högre diskonto än eljest, om tiden överstiger 90 dagar. För en växel å 800 kr, utställd den 1 mars på tre månader, erhölls vid diskontering i banken den 16 mars 795 kr. Hur mycket bör man erhålla vid diskontering samma dag av en fyra månaders växel å 1 200 kr, likaledes utställd den 1 mars?
4. En rulle sytråd nr 40 väger 12,6 g. Trådrullen väger tom 10 g. Trådens nummer anger, att 40 härvor dylik tråd om vardera 840 yards väga tillsammans ett engelskt skålpund, d. v. s. 455 g. Hur många meter sytråd finns det på en sådan rulle? 12 yards kan anses vara lika med 11 m.
5. Genom sammansmältning av ett antal tjugofemöringar och tioöringar har man åstadkommit en silverlegering, som är värd 6 kr och innehåller 48 % silver. Hur många mynt av vartdera slaget har man tagit? En tjugofemöring väger 2,5 g och innehåller 60 % silver, en tioöring väger 1,5 g och innehåller 40 % silver.

6. Vid ändring av ett stadsplaneförslag beslöt man att öka tomternas yta med 50 %. På en tomt, vars längd och bredd förhöllo sig som 4 : 3, ökades längden med 25 %. Med huru många procent ökades bredden?
7. Ett öppet koniskt kärl av tunn plåt rymmer 9,24 liter. Öppningens diameter är 4,2 dm. Hur mycket har det kostat att tillverka detta kärl, om man beräknar ett pris av 25 kr per m² av det färdiga kärlets yta? $\pi = 3\,{}^{1}/_{7}$.
8. På periferien till en cirkel, vars radie är 2 cm, äro punkterna *A*, *B* och *C* så belägna, att medelpunktsvinklarna till bågarna *AB* och *BC* äro 150° respektive 90°. Beräkna ytan av den triangel, som bildas av tangenterna till cirkeln i dessa punkter.

Resultat: 1. $x = 1$. 2. 15,7 %. 3. 1 187,75 kr. 4. 176 m. 5. 30 st. tioöringar och 12 st. tjugofemöringar. 6. 20 %. 7. 4,79 kr. 8. $12 + 8\sqrt{3} = 25{,}86$ cm².

Uppgifter i fysik för tekniska linjen.

1. En skruvmejsel av järn skall förses med ett träskaft, som är stort nog att hindra skruvmejseln från att sjunka, om man råkar tappa den i sjön. Järnet väger 20 g. Specifika vikten för trä av det slag, som skall användas, är 0,5 och för järn 7,7. Huru stor är den minsta volym skaftet måste ha?
2. En hylla utgöres av två vågräta raka stänger, som löpa parallellt och i jämnhöjd med varandra. Stängerna ha cirkulärt tvärsnitt; diametern är 20 mm. Avståndet mellan dem är 40 mm. På hyllan ligger ett klot med 40 mm radie och 2,1 kg vikt. Beräkna den kraft, varmed klotet påverkar varje stång.
3. En vattenturbin, som lämnar en effekt av 30,6 hästkrafter, förbrukar 1 350 m³ vatten per timme. Fallhöjden är 7,6 m. Beräkna turbinens verkningsgrad. 1 hästkraft = 75 kgm/sek.
4. I en källare av en villa finnes en tryckbehållare för vattenledningen. Denna har formen av en rak stående cylinder med inre basdiamtern 0,90 m och inre höjden 1,60 m. I dess övre del mynnar röret från en vattenpump, och från dess nedre del utgår stigröret till vattenledningen. Från början innehåller behållaren endast luft av 1 at tryck (1 at = 1 kgf/cm²). Kranen till stigröret hålles stängd, under det man pumpar in vatten i behållaren, tills trycket av luften i densamma stigit till 5 at. Därefter öppnas kranen till stigröret. Huru mycket vatten kan nu avtappas ur behållaren genom stigröret, innan pumpen behöver sättas i gång igen, om lufttrycket i cylindern icke får gå under 2 at? Luftens temperatur antages konstant och behålla-

ren absolut tät. Ingen hänsyn behöver tagas till vattenångans tryck.

5. I en termosflaska, som innehåller 220 g vatten, äro en elektrisk värmespiral, en termometer och en omrörare nedsänkta. Strömmen genom spiralen slutes, och avtorkade isbitar nedsläppas i vattnet. När försöket efter noggrann omröring avbrytes, har temperaturen i flaskan, som från början var 19°,5 C, stigit till 20°,0, och man har nedfört tillsammans 26,9 g is av 0° C. Strömmen har varit sluten under 6 min 40 sek, och effektutvecklingen i spiralen har varit 30 watt. Huru många cal motsvarar 1 wattsek enligt detta försök? Isens smältvärme är 80. Hänsyn tages ej till de värmemängder, som kärlet, spiralen, omröraren och termometern kunna ha upptagit.
6. En ampèremeter, vars motstånd är mycket litet, är så graderad, att varje delstreck betyder en strömstyrka av 0,001 amp. Tillsammans med ett visst förkopplingsmotstånd kan instrumentet användas som voltmeter. Huru stort måste förkopplingsmotståndet tagas, om man önskar, att varje delstreck skall betyda 2 volt.
7. Tre lika stora motstånd äro hopkopplade så, att de bilda en liksidig triangel *ABC*. Punkterna *A* och *C* anslutas till ett batteri, som då lämnar 4,5 amp. Mellan *A* och *B* är spänningen 30,6 V. Huru stort är ett av de lika stora motstånden?
8. En elektrisk motorvagn, som väger 15 ton, går med en hastighet av 45 km/tim uppför en jämn stigning av 1 : 1000. Motorn, vars verkningsgrad är 90 %, arbetar med en spänning av 750 V och drar en ström av 25,6 A. Den nyttiga effekten åtgår dels för att lyfta vagnen till högre nivå, dels för att övervinna luft- och friktionsmotstånden. Huru stor del av denna effekt åtgår till nivåförändringen? 1 W = 0,102 kgm/sek.

Resultat: 1. 34,8 cm^3. 2. 1,31 kgf. 3. 80,5 %. 4. 305 dm^3. 5. 0,233 cal. 6. 2 000 ohm. 7. 20,4 ohm. 8. 10,6 %.

Uppgifter i beskrivande maskin- och byggnadslära för tekniska linjen.

1. Genom utbromsningsförsök, som pågick i 2 timmar, beräknades en bensinmotors effekt till 20 hk. Under försöket åtgick 16 kg bensin med ett förbränningsvärme av 10 000 kcal per kg. Beräkna motorns verkningsgrad.
2. En last på 300 kg skall lyftas med en kätting. Kättingjärnets diameter är 6 mm. a) Hur stor är dragpåkänningen, då lasten

lyftes med konstant hastighet? b) Hur mycket ökas dragpåkänningen, då accelerationen vid starten är 1,2 m/sek²?

3. En motor, som gör 900 varv/min, har en 40 mm axel. Motorn driver över en mellanaxel en arbetsmaskin. De fyra remskivornas diametrar äro från motoraxeln räknat 250, 560, 200 och 500 mm. Beräkna samtliga axeldiametrar, om tillåten vridningspåkänning i alla axlarna är 120 kgf/cm². Man kan, genom att placera remskivorna invid lagren, bortse från böjningspåkänningar.
4. En enkelgängad skruv med 8 gängor per tum drages med en skruvnyckel av 10″ längd med en kraft av 10 kgf. a) Hur stort tryck kan åstadkommas med denna skruv? b) Hur stor måste skruvens kärndiameter minst vara, om den tillåtna tryckpåkänningen är 800 kgf/cm²? Skruvens verkningsgrad är 60 %.
5. En växellåda har två parallella axlar, där två olika kugghjulspar var för sig kunna bringas till ingrepp. Ett av kugghjulen har spolierats vid oförsiktig omläggning av växeln. Vid uppmätning av de återstående hjulen befanns det hjul, som stått i ingrepp med det spolierade, ha 20 kuggar, under det kuggantalet för de båda återstående hjulen är 30 respektive 40. Alla kugghjulen hava samma modul. Bestäm det spolierade hjulets kuggantal.
6. En elmotor med varvtalet 1 000 varv/min driver en lintrumma med diametern 500 mm över en växel med utväxlingsförhållandet 20 : 1. Lasten lyftes med hjälp av ett blocktyg bestående av 2 stycken 2-skiviga block. Hur stor blir lyfthastigheten?
7. Vid en enradig skarvplåtsväxel med dubbla skarvplåtar är nitdiametern 23 mm, nitdelningen 100 mm och plåttjockleken 13 mm. Största skjuvpåkänningen i nitarna är 634 kgf/cm². Beräkna dragpåkänningen i plåten.
8. Ur en rund stock uthugges största möjliga bjälke med kvadratiskt tvärsnitt. Hur ändras därigenom stockens hållfasthet mot böjning?
9. Ett fat, som väger 150 kg, skall rullas upp på flaket av en lastbil med hjälp av en 20 cm bred och 5 cm tjock planka, som lägges upp mot flaket, så att plankan bildar 30° vinkel med marken. Beräkna böjningspåkänningen i plankan, om avståndet mellan dess båda understödda punkter är 2 m. Påkänningen genom tryckkomposanten kan försummas.

Resultat: **1.** 15,8 %. **2.** a) 530 kgf/cm²; b) 65 kgf/cm². **3.** 53 mm och 71 mm. **4.** a) 3 010 kgf; b) 22 mm. **5.** 50 kuggar. **6.** 0,33 m/sek. **7.** 526 kgf/cm². **8.** Minskning till 60 %. **9.** 78 kgf/cm².

ELEMENTA

Tidskrift för elementär matematik, fysik och kemi

UTGIVEN AV

C. E. BLOM G. BORELIUS S. BÅGMAN
G. STARCK A. WAHLGREN

TJUGUSJÄTTE ÅRGÅNGEN
1943

REDAKTION OCH EXP.: Karlbergsv. 16[4] STOCKHOLM

LUND
HÅKAN OHLSSONS BOKTRYCKERI
1943

Tjugusjätte årgångens innehåll.

1943.

Sid

Adell, B. Beräkning av protonavståndet hos symmetriska, tvåbasiska syror ur dissociationskonstanterna 23

Benner, S. Anm. av Kurs i röntgenteknik 108

Berggren, B. De pytagoreiska trianglarnas fundamentaltransformation 82

Blom, C. E. Anm. av Schaefer-Bergmann-Kliefoth, Grundaufgaben des physikalischen Praktikums (105), H. Bäckström, Fotografisk handbok (107), F. Kohlrausch, Praktische Physik (231).

Bodlund, C. Vidskrivna cirklarna till ett cirkeltrapets 93

Carlsson, V. Anm. av T. Hagren, Övningsex. i matematik för realskolor m. fl. 239

Comét, S. Hyperbolisk trigonometri i lorentzrymden 79

——— Anm. av M. Riesz, En åskådlig bild av den icke-euklidiska geometrien (102), J. Jensen og E. Torsting, Matematik for Begyndere (172), G. Tegengren, Lärobok i plan trigonometri (233).

Englund, B. Anm. av H. J. Flechtner-B. Gustaver, Materiens omvandlingar 106

Faxén, O. H. Anm. av M. Lien, Lärobok i mekanik för tekniska läroverk (232) och Lärobok i grafostatik för tekniska läroverk (233).

Fredga, A. Anm. av E. Berner, Lærebok i organisk kjemi 174

Fredlund, E. Anm. av C. E. Granqvist, Ljudabsorbering, ljudisolering och akustikförbättring 235

Funke, G. Apparat för demonstration av gasers värmeledningsförmåga 91

Gustaver, B. Meddelanden från Föreningen för matem.-naturv. underv.: »Från årsmötet i Göteborg i jan. 1943 med Styrelseberättelse för 1942 och referat av diskussion över »Elektrotekniken i skolan» 39

Sammanträdet i Stockholm 23. 4. 1943 med referat från besök vid Vetenskapsakademiens forskningsinstitut för fysik 94
Om fortbildningskursen i fysik i aug. 1943 och om några studiebesök under hösten 1943 220
Henrikson, H. Något om segelflygning och dess energikällor i atmosfären. II, III, IV 14, 84, 193
——Anm. av G. Stewart, Oväder (110), R. Meinander, Meteorologiens grunder (175).
Holm, S. Anm. av L. Wethe, Fejlregning 103
Ingelstam, E. Anm. av C. F. Holmboe, Michael Faraday (173), S. Ekelöf, Teknisk elektricitetslära (176).
Johansson, C. H. Människokroppens värmebalans vid »rumstemperatur» 1
Juringius, N. Några olikheter 151
Leden, I. Potentiometrisk undersökning av några kadmiumsalters komplexitet. (Ref. av gradualavh.) 180
Lindholm, E. Über die Verbreiterung und Verschiebung von Spektrallinien. (Ref. av gradualavh.) 179
Lunell, E. Anm. av G. H. Hardy, A. Mathematician's Apology .. 173
Nordefeldt, E. Anm. av I. Bolin, I kemistens verkstad (50), Hessel-Martin-Hessel, Chemistry in Warfare (51), W. Heuser, Physik des Steuermanns (105), P. M. Röwde, Nya råmaterial (108), A. Binz, Edelmetalle, ihr Fluch und Segen (109), Günther Bugge, Der Alchimist (112), Drivmedelsförsörjningen under krisen (178).
Nordhult, A. Växelströmsgeneratorn, synkron- och asynkronmotorn 34
Odqvist, F. och Roos af Hjelmsäter, J. O. Enheten för kraft inom hållfasthetstekniken 210
Olerup, H. Bestämning av överföringstal 145
Ramberg, J. Anm. av Å. Wallenquist, Tvillingsolar och stjärnhopar 50
Rinde, H. En hemmagjord potentiometer 141
Rudberg, H. Anm. av H. Bergström, Algebraisk analys o. differential- o. integralkalkyl med tillämpningar, för fil. kand.- och fil. ämbetsexamen 48
Ryde, N. Anm. av Kosmos, bd 20, 1942 104
Schrewelius, N. Studier över antimonat, hydroxoantimonat och fluoantimonat. (Ref. av gradualavh.) 236
Siljeholm, G. Elektrisk ljusalstring 65
Slätis, H. Om influenselektricitetsmaskiner och deras arbetsprincip 129
Starck, G. Anm. av C. Drucker, Atomen 49
Stenström, O. En ny svensk lärobok i geometri 162
Svedberg, B. Numerisk beräkning av oändliga serier 157

Svensson, B. Föreningen i Lund för matem.-naturv. underv. Sammanträdet i Lund 7. 3. 1943 med referat av föredrag av A. Lindau, L. Smith o. B. Adell 97
Swensson, T. Teknikens kraftenheter 214
Tandberg, J. Anm. av Bonniers Konversationslexikon, band VII (51), H. v. Hortenau, Konsten att uppfinna (177), Gustaf de Laval, En minnesskrift (178), Daedalus, Tekniska Museets årsbok 1943 (235).
Uhler, A. Anm. av Matematisk problemsamling (för 1- o. 2-betygskurserna vid Lunds universitet) (49), R. Tambs Lyche, Lærebok i matematisk analyse. III (232).
Wideland, B. Ausgleichung des astronomisch-geodätischen Dreiecknetzes Signilskär-Omberg. (Ref. av gradualavh.) 238
Åstrand, S. Matematisk begåvning hos gossar och flickor. Ett referat 168
Övergaard, T. Elektricitetsläran på gymnasiet 223

Föredrag under hösten 1942 och våren 1943 inom svenska matematiska, fysiska och kemiska föreningar 64, 127
Föreläsningar för lärarkand. vid provårsläroverken under läsåret 1942–43 181
Matematiska och fysikaliska uppgifter vid studentskrivningarna och fyllnadsprövningarna under 1943: jan. (57), mars—april (117), aug.—sept. (187) och nov. (247).
Om uppgift *8* i allmän kurs jan. 1943 63
Provräkning i realexamen v.t. och h.t. 1943 ..... 123, 253
Praktisk realexamen: Uppg. i fysik v.t. och h.t. 1943 ..... 124, 254
» » : Uppg. i beskrivande maskin- och byggnadslära v.t. och h.t. 1943 ..... 126, 255
Problemavdelning: Matematiska uppgifter (red. av S. Bågman) 53, 114, 183, 243
Gradualavhandlingar (autoreferat): I. Leden (180), E. Lindholm (179), N. Schrewelius (236), B. Wideland (238).
Tidskrifter, innehållsöversikt 52, 56, 112, 127, 182, 186, 241
Bokanmälningar: Bergström, Algebraisk analys och differential- och integralkalkyl med tillämpningar; Matematisk problemsamling (för 1- o. 2-betygskurserna vid Lunds universitet); Drucker, Atomen; Wallenquist, Tvillingsolar och stjärnhopar; Bolin, I kemistens verkstad; Hessel-Martin-Hessel, Chemistry in Warfare; Bonniers Konversationslexikon band VII 48
Riesz, En åskådlig bild av den icke-euklidiska geometrien; Wethe, Feilregning; Kosmos, bd 20; Schaefer-Bergmann-

KLIEFOTH, Grundaufgaben des physikalischen Praktikums; HEUSER, Physik des Steuermanns; FLECHTNER-GUSTAVER, Materiens omvandlingar; BÄCKSTRÖM, Fotografisk handbok; Kurs i röntgenteknik; RÖWDE, Nya råmaterial; BINZ, Edelmetalle, ihr Fluch und Segen; STEWART, Oväder; BUGGE, der Alchimist 102
JENSEN-TORSTING, Matematik for Begyndere; HARDY, A Mathematician's Apology; HOLMBOE, Michael Faraday; BERNER, Lærebog i organisk kjemi; MEINANDER, Meteorologins grunder; EKELÖF, Teknisk elektricitetslära; v. HORTENAU, Konsten att uppfinna; ALTHIN, Gustaf de Laval; Drivmedelsförsörjningen under krisen 172
KOHLRAUSCH, Praktische Physik; TAMBS LYCHE, Lærebok i matematisk analyse III; LIEN, Lärobok i mekanik och Lärobok i grafostatik för tekniska läroverk; TEGENGREN, Lärobok i plan trigonometri; HAGREN, Övningsexempel i matematik för realskolor etc.; GRANQVIST, Ljudabsorbering, ljudisolering och akustikförbättring; Daedalus 1943 231

Tidskr. utkommer med fyra häften årligen (mars, juni, sept., dec.). Pris per häfte 2:50, per årgång kr. 8:—. Subskription genom inbetalning av kr. 8:— på postgirokonto n:r 527 55.

Redaktion och expedition: **C. E. BLOM, Karlbergsvägen 16IV, Stockholm Va. Postgiro 527 55.**

Människokroppens värmebalans vid "rumstemperatur".

Av C. H. JOHANSSON.

1. *Fysiologiska betingelser.*

Fysiologiska undersökningar av människokroppens värmebalans[1] visa, att både kroppstemperaturen och den i kroppen alstrade värmeeffekten,[2] vid oförändrat rörelsetillstånd bibehåller ett praktiskt taget konstant värde, även om avkylningsbetingelserna varieras inom vida gränser. Om man betänker, att den alstrade värmeeffekten, vid stationärt tillstånd, är lika med den värmeeffekt som avges till omgivningen, är detta experimentella faktum mycket förbluffande, ty det innebär, att den avgivna värmeeffekten är oberoende av omgivningens temperatur resp. av klädernas tjocklek och kvalitet. För att samtidigt hålla temperatur och avgiven värmeeffekt konstant har människokroppen till sitt förfogande den s. k. fysikaliska regleringen. Vid låg temperatur hos omgivningen åstadkommer den en sammandragning av hudskiktens blodkapillärer, varigenom hudtemperaturen sjunker. Vid hög temperatur utvidgas hudkapillärerna och därjämte ökas avdunstningen i samband med svettavsöndringen. Sammandragningen av hudkapillärerna åtföljas av en obehaglig köldförnimmelse, och om blodtillförseln till en kroppsdel blir alltför liten, inträder en kramp i vävnaderna, som resulterar i förfrysning. För att ett rum skall vara »behagligt» ur värmesynpunkt, skall värmejämvikt vara förhanden, utan att kroppen behöver tillgripa någon fysikalisk reglering. I det följande betecknas detta tillstånd hos kroppen som *normaltillståndet*. Därvid är hudtemperaturen under kläderna, på bröstet, 33 à 34° C.

Vid olikformig avkylning av kroppen är det sätt på vilket värmeregleringen sätter in ännu jämförelsevis outrett. Som ett exempel på det komplicerade förlopp man då har att räkna med

[1] A. Krogh, Boligopvarmningsproblemet fra fysiologisk synspunkt. I. V. A:s meddelande nr 118, s. 5. 1941. R. Höber, Lehrbuch der Physiologie des Menschen. J. Springer, Berlin.

[2] Värmeeffekt = värmemängd per tidsenhet.

kan nämnas, att en ensidig avkylning genom »drag», tycks orsaka väsentligt större obehag, då luftströmmen bildar en vinkel med kroppens symmetriplan än då så icke är fallet.

Vid kyla kan man påvisa en viss ökning av den alstrade värmeeffekten, men den synes i huvudsak vara orsakad av ofrivilliga muskelrörelser, som sätta in då man fryser; man huttrar och det bildas »gåshud». Värmeeffekten är olika för olika individer allt efter deras storlek, konstitution och kondition, och vid kroppsarbete ökar den starkt med arbetsintensiteten. Vid hårt arbete kan den uppnå värden, som äro mångfaldigt större än vid vila. Vidare varierar den med årstiden, så att den är större om vintern än under sommaren. För en viss individ kan man emellertid räkna med, att den alstrade värmeeffekten vid oförändrat rörelsetillstånd är tillnärmelsevis konstant. Hos vuxna personer uppgår den till 40 à 50 kcal/tim.m² vid vila i liggande ställning. Vid fasta minskar effekten på grund av minskat muskelarbete till ett lägre värde, men detta bibehålles därefter oförändrat även vid mycket lång fasta. Vid den obetydliga muskelaktivitet, som är normal vid stillasittande arbete, ligger värdet 20 à 30 % över värdet för vila i liggande ställning.

Det förtjänar att omnämnas, att vissa varmblodiga djur, vid sidan om den fysikaliska regleringen, äro utrustade med en kemisk reglering, d. v. s. kroppens värmeproduktion ökas, då omgivningens temperatur avtager. Ett exempel erbjuda hundarna, vars förmåga att utan olägenhet fördraga stark kyla beror på den ökade förbränning som sätter in, då omgivningens temperatur sjunker under ett kritiskt värde.

2. *Faktorer, som bestämma värmetillståndet i ett rum.*

Människans känsla av värme i ett rum[1] bestämmes i första hand av luftens temperatur och fuktighet, de omgivande ytornas (väggar, golv, tak, fönster, värmeelement, möbler, m. m.) temperatur och strålningsegenskaper samt eventl. förefintliga luftströmmar (»drag»). Vid sidan om dessa komponenter spelar olikformig uppvärmning, exempelvis genom olika temperaturer på olika höjd över golvet, genom ytterväggar eller tak eller stora fönsterytor med låg temperatur eller omvänt genom värmeelement med hög yttemperatur, en mycket stor roll. Införandet av rumstemperaturbegreppet utgör ett försök att i en enda siffra ge en sammanfattning av värmetillståndet i ett rum. Det är uppenbart, att en sådan

[1] I. V. A:s meddelande nr 118, 1942, »Rationaliseringsproblem inom bostadsuppvärmningen», innehåller en samling föredrag och diskussionsinlägg, som belysa hithörande frågor från olika sidor.

siffra endast kan vara ett grovt medelvärde, som i ogynnsamma fall mycket dåligt svarar mot rummets värmetillstånd. En termometer är emellertid ett billigt och bekvämt instrument, som i allmänhet är tillräckligt för att vi skola kunna avgöra, om det är »lagom varmt» eller tilläventyrs för kallt eller för varmt. I all synnerhet gäller detta i lokaler, som vi känna bra till. Trots sin ofullkomlighet spelar därför den på en vanlig termometer avlästa »rumstemperaturen» en mycket större roll i vårt dagliga liv än begrepp såsom effektiv temperatur, resulterande temperatur m. m. För en fördjupad förståelse av hithörande problem är det emellertid nödvändigt att klarlägga, hur olika faktorer inverka på kroppens värmeutbyte med omgivningen.

I det följande behandlas speciellt förhållandena i lokaler med normal luftfuktighet. Vidare antages temperaturen ligga under den, vid vilken svettning inträder. Man kan då räkna med att den värmeeffekt, som avges från kroppens yttre begränsningsyta genom värmeledning och konvektion samt strålning, är tillnärmelsevis oberoende av rummets värmetillstånd. Enligt Krogh uppgår denna del till ungefär 75 % av den totalt avgivna värmeeffekten. Av återstoden bortföres en del med andningsluften och en mindre del avges genom den avdunstning som är förhanden, då huden är torr.

3. *Kroppens värmeavgivning då luft- och väggtemperaturer äro lika.*

För den av kroppen per ytenhet av den yttre begränsningsytan avgivna värmeeffekten gäller

$$q = K(t_h - t_k) = \alpha_k(t_k - t_l) + \alpha_s(t_k - t_v). \qquad (1)$$

K klädernas värmegenomgångstal i watt/m² · grad,
q avgiven värmeeffekt efter avdrag av andnings- och avdunstningsförlusten, i watt/m²,
α_k konvektiva värmeöverföringskoefficienten i watt/m²grad,
α_s värmeöverföringskoefficienten för värmestrålningen i watt/m² · grad,
t_l och t_v luftens temperatur resp. väggarnas yttemperatur i °C,
t_h och t_k hudens resp. klädernas yttemperatur i °C.

I ekv. (1) är $\alpha_s(t_k - t_v) = \varepsilon_k \cdot C_{sv}(T_k^4 - T_v^4)$. Införes $T_m = \frac{1}{2}(T_k + T_v)$, får man, om $(t_k - t_v)^2 << T_m^2$, $\alpha_s = 4\,\varepsilon_k \cdot C_{sv} \cdot T_m^3$; ε_k är klädernas emissionskoefficient och C_{sv} strålningskonstanten för svart strålning.

Av ekv. (1) följer

$$t_h - t_k = \frac{q}{K}, \tag{1a}$$

och i det speciella fallet att $t_l = t_v = t_o$ (i detta fall kan man tala om en väldefinierad rumstemperatur, som är lika med den temperatur, som avläses på en vanlig termometer), får man dessutom

$$t_k - t_o = \frac{q}{\alpha_k + \alpha_s}. \tag{1b}$$

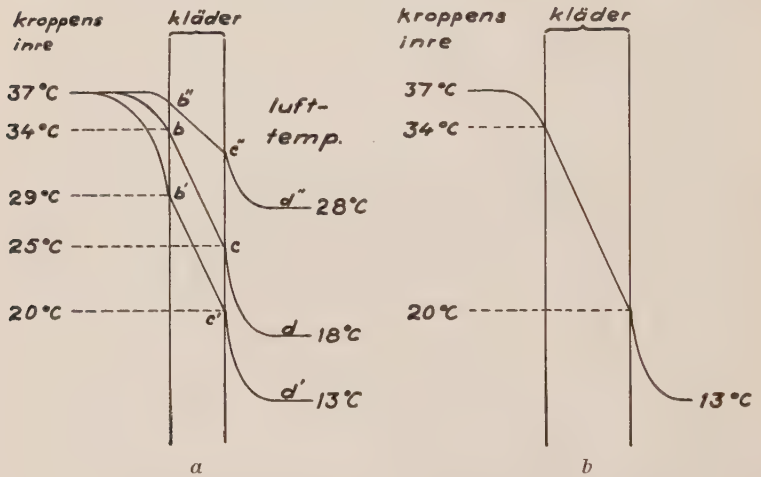


Fig. 1. Schematisk framställning av temperaturfallet från kroppens inre till den omgivande luften.

Vid de förändringar av t_o, som man behöver räkna med i uppvärmda lokaler, är den procentuella ändringen av α_s jämförelsevis liten. Vidare är α_k proportionell med $\sqrt[4]{t_k - t_o}$. För att ekv. (1b) skall satisfieras, måste därför $t_k - t_o$ vara tillnärmelsevis oberoende av värdet på t_o. *Om rumstemperaturen förändras, kommer sålunda temperaturen på klädernas yta resp. på hudytan* (ekv. 1a) *att förändras lika många grader, försåvitt klädsel och rörelsetillstånd äro oförändrade* (K och q konstanta). Fig. 1 a visar schematiskt, hur temperaturen avtager från kroppens inre till den omgivande luften, dels då rumstemperaturen svarar mot normaltillståndet ($abcd$), dels då den är fem grader lägre ($a\ b'c'd'$). Därvid parallellförskjutes bcd till $b'c'd'$ samtidigt som tjockleken av det område, i vilket temperaturen faller från det konstanta värdet i kroppens

inre, ökar. Fig. 1 b visar, att man genom en lämpligt avpassad ökning av klädernas tjocklek kan kompensera rumstemperaturens minskning, så att hudens yttemperatur blir oförändrad, d. v. s. normaltillståndet bibehålles. Givetvis är möjligheten att kompensera en höjning av rumstemperaturen genom parallellförskjutning av *b c d* (fig. 1 a) uppåt mycket begränsad, eftersom temperaturnivån i kroppens inre icke får stiga. Den värmemängd, som åtgår för den ökade avdunstningen, skall emellertid i detta fall dragas ifrån *q*-värdet i ovanstående ekvationer. Temperaturgradienten genom kläderna resp. temperaturfallet på grund av övergångsmotståndet blir därför mindre. I fig. 1 a antyder linjen *ab″c″d″* temperaturförloppet, då rumstemperaturen ligger tio grader högre än den som svarar mot normaltillståndet.

4. *Termometerns felvisning, då luft- och väggtemperaturer äro olika.*

Om $t_l \neq t_v$ (för överskådlighetens skull antages samtliga väggar ha samma temperatur), ger en termometer en felaktig uppfattning om rummets värmetillstånd, så som det uppfattas av en människa. Detta beror på att den vanliga termometern har väsentligt mindre dimensioner än kroppen, och att den konvektiva värmeöverföringskoefficienten till skillnad från värmeöverföringskoefficienten för strålning är starkt beroende av dimensionerna. Fig. 2 återger enligt mätningar, som utförts av Griffith och Davis[1] i stillastående luft, hur den temperaturberoende konstanten A i uttrycket $\alpha_k = A \sqrt[4]{t - t_l}$ varierar med diametern hos ett horisontellt rör resp. en horisontellt utspänd tråd (t är yttemperaturen). Av mätningarna framgår, att A vid små dimensioner avtar mycket

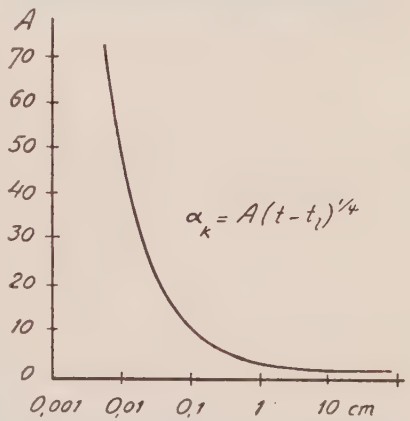


Fig. 2. Den konvektiva värmeöverföringskoefficienten från en horisontell tråd resp. ett rör som funktion av diametern.

[1] E. Griffith and A. H. Davis, Dep. Sc. Ind. Res. Food Inv. Board. Spec. Rep. nr. 9. London 1922.

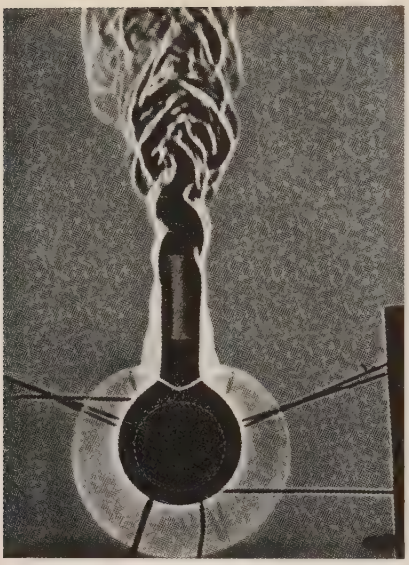


Fig. 3. Luftströmningen omkring ett varmt rör. (Efter en upptagning av E. Schmidt.)

hastigt med ökad diameter. Vid ökning av dimensionerna närmar sig A ett undre gränsvärde. Luftströmningen omkring tråden framgår av fig. 3. Den prickade linjen är rörets yttre omkrets, och det utanför liggande helsvarta området visar det område av den omgivande luften, som har övertemperatur gentemot omgivningen och därför strömmar uppåt. Den starka ökningen av A med avtagande rördiameter sammanhänger med att strömningsskiktet bibehåller en tillnärmelsevis konstant tjocklek, då rördiametern minskar.

Om lufttemperaturen är högre än väggarnas temperatur, kommer termometern att ställa in sig på en sådan temperatur, att den konvektivt tillförda värmeeffekten är lika med den genom strålningsutbyte avgivna. Man får

$$\alpha_k(t_l - t) = \alpha_s(t - t_v)$$

och sålunda

$$t = t_l - \frac{t_l - t_v}{1 + \frac{\alpha_k}{\alpha_s}}. \qquad (2)$$

I fig. 4 har termometertemperaturen (t) uppritats som funktion av termometerbehållarens diameter enligt ekv. (2) och fig. 2. Strängt taget gäller figuren för stillastående luft och en termometer som hålles horisontellt, men resultatet blir likartat för en termometer som hänger fritt i vertikalt läge. Av figuren framgår, att ett termoelement, som består av mycket tunna trådar, praktiskt taget antager luftens temperatur. (I en gaslåga blir därför en platinatråd desto mera vitglödande ju tunnare den är, och om diametern underskrider ett visst värde, smälter den.) En vanlig

termometer visar en temperatur, som ligger ungefär en tredjedel av temperaturdifferensen mellan luft och väggar under lufttemperaturen. Vid dimensioner av samma storleksordning som människans kommer dess temperatur att ligga något under medeltemperaturen mellan luft och väggar. Denna effekt orsakar sålunda, att *kroppen på grund av sina större dimensioner påverkas starkare av kalla ytor än en vanlig termometer.* En olikhet av annat slag tillkommer, om luften befinner sig i rörelse. I fig. 5 återges t och t_k som funktion av lufthastigheten vid en antagen

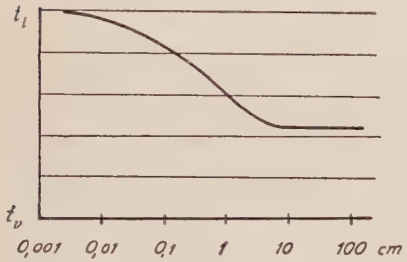


Fig. 4. Temperaturen hos en termometer som funktion av termometerbehallarens dimensioner, då luft- och väggtemperatur äro olika.

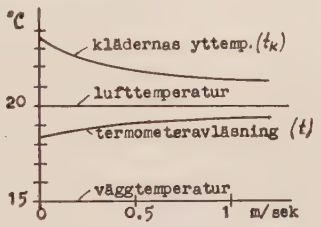


Fig. 5. Lufthastighetens inverkan på termometertemperaturen och på klädernas yttemperatur, då luft- och väggtemperatur äro olika.

lufttemperatur av 20° C och en väggtemperatur av 15° C. Av figuren framgår, att *samtidigt som luftströmmen verkar avkylande på personerna i rummet, höjer den termometertemperaturen.* I lokaler med mycket olika temperatur hos luft och väggar skulle det därför vara nödvändigt att använda termometrar, vars dimensioner äro av storleksordningen några decimeter för att de skulle ge en riktig uppfattning om värmetillståndet. Om avsevärda luftströmmar äro förhanden, fordras en termometer, som dessutom har en övertemperatur. Ett instrument av denna typ är det s. k. *eupatheoskopet.* Det består av en stående cylinder med elektrisk uppvärmning och man avläser antingen temperaturen vid konstant tillförd värmeeffekt eller den tillförda medeleffekten vid konstant temperatur.

För en person, som utför stillasittande arbete, uppgår q till ungefär 50 watt/m². Vid normal inomhusklädsel och »behaglig rumstemperatur» är klädernas yttemperatur ungefär 25° C. För ett rum med något så när stillastående luft kan man sätta $\alpha_k = 3{,}5$ watt/m²grad samt $\alpha_s = 4$ watt/m²grad. Införas dessa vär-

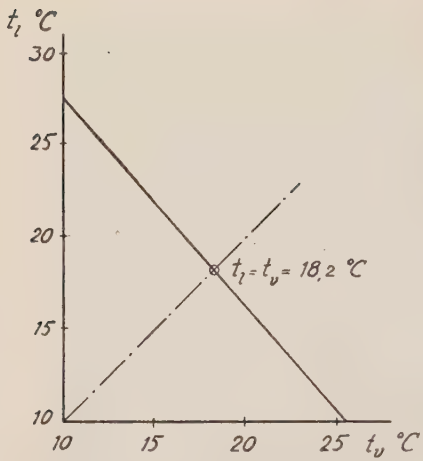


Fig. 6. Luft- och väggtemperatur vid konstant resulterande temperatur.

den i ekv. (1), får man som villkor för normaltillståndet

$$t_l + 1{,}14\, t_v = 39{,}3. \qquad (4)$$

Enligt ekv. (4), som återges grafiskt i fig. 6, kan man med bibehållet normaltillstånd kompensera en sänkning av lufttemperaturen genom en höjning av väggtemperaturen och omvänt. Man säger då, att *resulterande temperaturen* är oförändrad. Dess värde erhålles, om man sätter $t_l = t_v$ i ekv. (4). Under de antagna betingelserna får man 18,2° C. Mot $q = 45$ resp. 55 watt/m², svarar en »behaglig resulterande temperatur» av 19,0 resp. 17,6° C. Siffrorna visa bl. a., att man vid kroppsrörelse klarar sig med lägre rumstemperatur än vid vila.

5. *Kroppens strålningsförluster i lokaler med normal ytbehandling.*

Vid beräkning av kroppens strålningsförluster kan man i ett vanligt rum bortse från värmestrålningens reflexion. Den genom värmestrålning avgivna effekten blir lika med differensen mellan den av kläderna emitterade strålningen $q_s^e = \varepsilon_k \cdot C_{sv} \cdot T_k^4$ och den del av instrålningen från omgivningen, som absorberas av kläderna: $q_s^i = \varepsilon_k \cdot C_{sv} \cdot T_v^4$, d. v. s.

$$q_s = q_s^e - q_s^i = \varepsilon_k \cdot C_{sv}(T_k^4 - T_v^4). \qquad (5)$$

ε_k är klädernas emissionskoefficient, som enligt KIRCHHOFFS lag är lika med absorptionskoefficienten. $C_{sv} = 5{,}77 \cdot 10^{-8}$ watt/m² (grad)⁴ är strålningskonstanten för svarta ytor. Insättes numeriska värden i ekv. (5), får man med $\varepsilon_k = 0{,}8$ och $t_k = 25°$ C

$$q_s = 363 - 4{,}62 \left(\frac{T_v}{100}\right)^4. \qquad (5a)$$

Av ekv. (5a) framgår att q_s, som vid en väggtemperatur av exempelvis 18° C uppgår till 32 watt/m², är relativt liten jämfört med q_s^e resp. q_s^i. En viss procentuell ökning av q_s^i åstadkommer där-

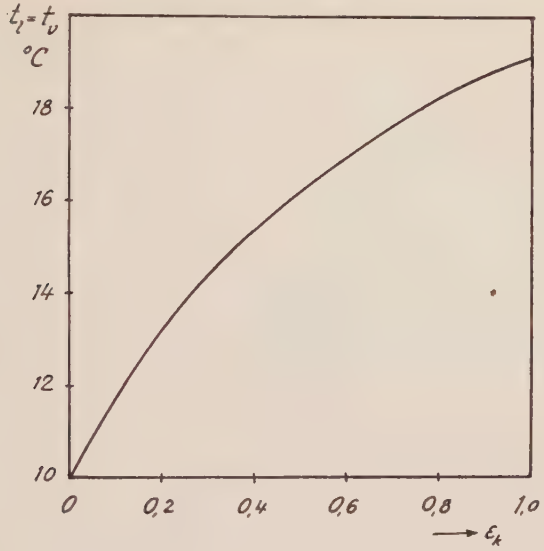


Fig. 7. Den för normaltillståndet erforderliga rumstemperaturen som funktion av klädernas emissionskoefficient.

för en betydligt större procentuell minskning av q_s. Med anknytning till ekv. 5 förtjänar det vidare att framhållas, att *den känsla av kyla, som orsakas av kalla ytor, exempelvis av ett stort fönster, icke beror på en ökad utstrålning från kroppen, utan på bristande instrålning från den kalla ytan.* Man har därvid en känsla av »drag», även om kroppen icke är utsatt för någon kall luftström från fönstret.

Enligt ekv. (5) har man två principiellt olika möjligheter att minska q_s. Den ena består i en minskning av ε_k. För vanliga kläder är ε_k 0,8 à 0,9 under det man för blank aluminiumfolie kan räkna med $\varepsilon_k = 0{,}07$. I fig. 7 är den »behagliga rumstemperaturen» ($t_l = t_v = t_o$) uppritad som funktion av ε_k. Figuren visar, att en rumstemperatur av 11 à 12° C är tillräcklig, då $\varepsilon_k < 0{,}1$. Det var denna effekt, som utnyttjades, då man under vintern 1940—41 utrustade skrivmaskinsflickor i Köpenhamn med aluminiumfolier, som hängdes över ryggen. Den andra möjligheten att minska q består i en ökning av instrålningen q_s. Enligt ekv. (5) skulle denna ökning av q_s^l kunna ske endast om de omgivande ytornas temperatur ökas. Detta beror emellertid på uttryckets approximativa karaktär. Vid en noggrannare beräkning tillkommer den reflekterade

strålningen, som under vissa omständigheter kan ge ett betydande bidrag till instrålningen.

6. *Kroppens strålningsförluster med hänsyn tagen till väggarnas reflexionsförmåga.*

I fig. 8 antydes schematiskt strålgången mellan två ytor, av vilka den ena helt omsluter den andra. Av strålningen från A_k mot A_v absorberas en del, och återstoden reflekteras. Därvid reflekteras en viss bråkdel mot utgångsytan A_k och återstoden mot den egna ytan. Dessa reflekterade strålar uppdelas i sin tur i en absorberad och en reflekterad del. Genom att på detta sätt följa strålgången och summera härledde den danske fysikern Christiansen[1] (1883) följande för värmeteknikern välbekanta uttryck:

$$\left.\begin{aligned} q_s &= \frac{\varepsilon_k \cdot C_{sv}(T_k^4 - T_v^4)}{1 + \varepsilon_k \cdot p} \\ p &= \frac{A_k}{A_v} \cdot \frac{1 - \varepsilon_v}{\varepsilon_v} = \frac{A_k}{A_v} \cdot \frac{\varrho_v}{\varepsilon_v} \end{aligned}\right| . \qquad (6)$$

En jämförelse av ekv. (5) och (6) visar, att man erhåller strålningsutbytet med hänsyn tagen till reflexionen, om det approximativa uttrycket (ekv. 5) divideras med $1 + \varepsilon_k \cdot p$. I p ingår väggarnas ytbeskaffenhet med förhållandet $\varrho_v : \varepsilon_v$, där $\varrho_v = 1 - \varepsilon_v$. För normala väggar kan man räkna med $\varepsilon_v = 0{,}8 - 0{,}9$ och $\varrho_v : \varepsilon_v = 0{,}1 - 0{,}25$. För blank aluminiumfolie äro motsvarande värden $\varepsilon_v = 0{,}07$ och $\varrho_v : \varepsilon_v = 13{,}3$, d.v.s. det för reflexionen karakteristiska förhållandet $\varrho_v : \varepsilon_v$ blir 50 à 100 gånger större för blanka aluminiumfolier än för normalt ytbehandlade väggar, exempelvis vanliga tapeter eller målade ytor. Inverkan av aluminiumtapeter blir icke desto mindre jämförelsevis liten i ett rum, där samtliga väggar ha samma temperatur, ty i p ingår även förhållandet mellan kroppens yta (A_k) och rummets sammanlagda väggyta (A_v).

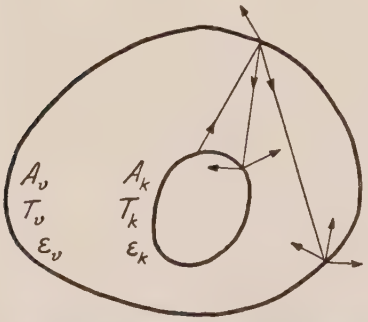


Fig. 8. Schematisk bild av strålgången mellan två ytor, då hänsyn tages till upprepad reflexion.

I tab. 1 återges efter mätningar av E. Schmidt absorptionskoefficienten för ett antal olika material. Tabellen visar, att icke metal-

[1] C. Christiansen, Ann. d. Physik. *19*, s. 267. 1883.

liska material bilda en grupp med höga värden och jämförelsevis liten skillnad mellan olika ytor. Det är anmärkningsvärt att färgen icke har någon betydelse för lågtemperaturstrålning. Rena metallytor bilda en annan grupp med låga värden. En mellanställning intaga metallacker, som ha väsentligt högre värden än rena metallytor. Detta beror på att metallfjällen äro täckta av lack. Enligt mätningar som utförts vid Tekniska Högskolans fysiska institut stiger

Tab. 1. Absorptionskoefficienter för värmestrålning enl. E. Schmidt.

Eternit, rå yta Sotad yta	0,97	Hyvlat ekträ Mjukt gummi Vitglaserad kakel	0,87—0,89
Papper Ebonit Glaserat porslin Röd tegelsten, rå yta Olja Glas, blank yta	0,93—0,95	Svart spritlack	0,82
Oljefärger	0,89—0,97	Kol Svartoxid, koppar Svartplåt med valshud	0,75—0,80
Takpapp Gips Vit smältemalj Snövitt emaljlack	0,91	Al-lack	0,35—0,40
		Mässing	0,07—0,20
		Koppar, ren yta	0,09
		Aluminium, rå	0,07—0,09
		Högglanspoler. metaller	0,03—0,07
		» ädelmetaller	0,016—0,05

absorptionsförmågan hos en blank metallyta mycket hastigt med lackskiktets tjocklek. En jämförande mätning av strålningsemissionen från en blank kopparyta resp. från en blank kopparyta med en pålimmad folie av cellophan är mycket instruktiv. Ehuru man endast med svårighet kan se någon skillnad mellan ytorna, är emissionen från den sistnämnda, vid en folietjocklek av 0,2 mm, lika god som från en sotad yta. (Detta försök kan lämpligen utföras som en fysiklaboration.)

7. *Inströlningen mot kroppen från värmestrålande apparater i lokalen.*

Betydligt större inverkan få ytor med stor reflexionsförmåga för värmestrålning, om värmestrålande apparater finnas i rummet eller om väggarna ha väsentligt olika temperatur. I detta fall är det emellertid nödvändigt att beräkna värmestrålningsutbytet med hänsyn till minst tre olika slag av ytor, nämligen: människor, rummets väggar samt värmestrålande apparater, resp. människor samt väggar med olika temperatur. Christiansens metod är redan vid två ytor rätt besvärlig och torde knappast kunna

[1] E. Schmidt.

ifrågakomma. Man kan emellertid använda en av författaren angiven metod,[1] som medger en lösning vid ett godtyckligt antal ytor. Därvid ansättes instrålningen mot resp. ytor som obekant. Vid n ytor får man ett ekvationssystem

$$A_p \cdot q^i_{sp} = \sum_{\mu=1}^{n} A_\mu \cdot \varphi_{\mu p} (\varepsilon_\mu \cdot q^e_{s\mu} + \varrho_\mu q^i_{s\mu}), \tag{7}$$

som innehåller n ekvationer (index $p = 1, 2 \ldots n$) och som sålunda medger en lösning av de n obekanta. $\varphi_{\mu p}$ betecknar den andel av strålningen från ytan med index μ, som går direkt till ytan med index p. Det numeriska arbetet blir emellertid betydande vid många ytor. Tillsammans med civilingenjör B. Andersson[2] har jag undersökt förhållandena vid tre ytor och bl. a. uppställt följande fråga till besvarande: hur stor del av värmestrålningseffekten från en strålningskälla (P_s) nyttiggöres i form av ökad instrålning mot personerna i rummet? Enligt beräkningen tillkommer en instrålning, uttryckt i watt per m² av kroppsytan, av

$$\Delta q^i_s = \frac{\varepsilon_k}{1 + \varepsilon_k \cdot p} \cdot \frac{\varrho_v}{\varepsilon_v} \cdot \frac{P_s}{A_v}. \tag{8}$$

I detta uttryck har icke medtagits den andel, som går direkt från strålningskällan mot kroppen. Beträffande de förenklade antaganden, som införts vid härledningen av ekv. (7—8), hänvisas till förut citerade arbeten av Andersson och mig.

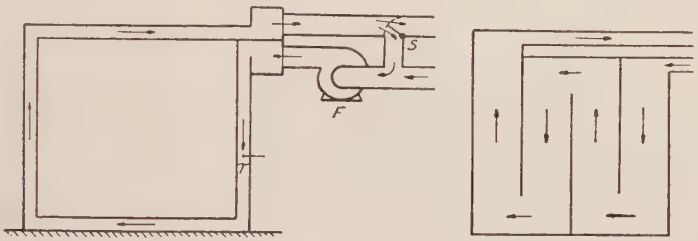
Genom användning av skärmar, som beklätts med aluminiumfolier, kan man uppnå att förhållandet $A_k : A_v$ och därmed p blir väsentligt större. En tillämpning av detta slag utgör en invändigt aluminiumfolierad låda, som anbringas under skrivbordet med en glödlampa som strålningskälla. Även utan den sistnämnda fås i överensstämmelse med ekv. (6) en märkbar verkan. En dylik strålningsvärmare för fötter och ben har nyligen förts i marknaden av AB Celer, Stockholm, under benämningen »Thermoflex».

En preliminär prövning av ekv. (8), som utfördes av Andersson som examensarbete vid Tekniska Högskolans fysiska institut gav tillfredsställande överensstämmelse mellan teori och experiment. För fortsatta mätningar med bättre experimentella resurser har uppförts ett provrum med inre dimensionerna $3 \times 3 \times 2{,}7$ meter, i vilket väggarnas temperatur och lufttemperaturen inom vissa gränser kunna ställas in oberoende av varandra. I princip består det av

[1] C. H. Johansson, Tekn. Tidskrift. Avd. f. mekanik, s. 29. 1936. Ann. d. Physik *28*, s. 185. 1937.

[2] C. H. Johansson och B. Andersson, Tekn. Tidskrift, s. 381. 1941.

två i varandra ställda lådor av 3 mm masonit med ett mellanrum av 200 mm. På sätt som schematiskt visas i fig. 9 blåser fläkten *F* luft genom detta mellanrum. Spjället *S* är kopplat till en spjällmotor, som över ett relä erhåller impulser från en i luftströmmen införd termometerbulb *T*. Om temperaturen överstiger den på reläet inställda, vrides spjället motsols, så att den cirkulerande luftmängden minskar och mängden kall ytterluft ökas. I gavlarna cirkulerar luften så som schematiskt visas i fig. 9 b. Den ena är kopplad till



a *b*

Fig. 9. Provrum i vilket vägg- och lufttemperatur kunna inställas oberoende av varandra.

huvudfläkten, under det att luftströmmen i den andra drives av en separat fläkt med tillhörande regleringsanordningar, vilka utförts enligt samma schema som återges i fig. 9 a. Temperaturen på denna vägg kan därför ställas in oberoende av de övriga. Luften i rummets inre kan uppvärmas medelst en utanför provrummet uppställd fläkt med värmebatteri (ej visad på figuren), vilken genom en fördelningstrumma blåser in varmluft vid golvet och suger ut rumsluften vid taket. Värmebatteriet är tillräckligt för att vid stationärt tillstånd upprätthålla en övertemperatur över samtliga väggtemperaturer av c:a 15° C. För mätningar med kalla väggar begränsas givetvis rummets användbarhet till vinterhalvåret. För att undvika en nerkylning av det rum, i vilket provkammaren uppförts, är den utåt isolerad med wellit. Luft- och väggtemperaturer i provkammaren uppmätas medelst ett system av termoelement.

Något om segelflygning och dess energikällor i atmosfären. II.[1]

Av H. HENRIKSON.

3. De termiska uppvindarna.

När man i dagligt tal använder ordet vind, avses i allmänhet luftrörelsens horisontalkomponent. Sällan tänker man på att det även finns en vertikal sådan, och ändå är denna av allra största betydelse, ty så vitt man vet bildas de flesta moln och all nämnvärd nederbörd genom uppstigande luftströmmar. I det föregående ha vi sett, att ett hinder i den horisontella luftströmmens väg i vissa fall kan tvinga luften i höjden och att de så alstrade uppvindarna kunna utnyttjas för segelflygning. Den innersta orsaken till dessa luftrörelser är temperaturmotsättningar och därav betingade lufttrycksskillnader i horisontell led över stora områden. Vertikala luftströmmar kunna emellertid uppkomma även på annat sätt, främst genom solstrålningens inverkan inom mera begränsade områden. Vi äro härmed inne på de *termiskt betingade uppvindarna* eller *termiken,* som i sina olika former direkt eller indirekt är en följd av den till jordytan instrålade solenergien. Denna kan nämligen ge upphov till cirkulationssystem, vilkas vertikala utsträckning i regel är större än den horisontella. I dessa cirkulationshjul ligger värmekällan vid jordytan och köldreservoaren i höjden, vilket är en nödvändig förutsättning för att en sådan cirkulation skall kunna igångsättas och vidmakthållas, då atmosfären i allmänhet är stabilt skiktad. Det bör emellertid framhållas, att avkylning i höjden kan ha samma effekt som uppvärmning underifrån; i båda fallen kan atmosfärens i regel stabila skiktning förvandlas till labil inom mer eller mindre begränsade områden och höjdintervall. De av ett segelflygplan utnyttjade vertikala luftströmmarna i den fria atmosfären äro i själva verket ingenting annat än den vertikala temperaturskiktningens potentiella energi omvandlad till rörelseenergi. Den rika förekomsten av dessa termiska uppvindar och deras mångskiftande karaktär har gjort, att termiken blivit den mest betydelsefulla av segelflygningens energikällor.

[1] Forts. från Elementas dec.häfte 1942, s. 191.

För ett närmare studium av de termiska uppvindarna är det lämpligt att genomföra en viss indelning av dem. Denna kan göras på flera sätt. Den som här lämnas sammanfaller i huvudsak med den som segelflygarna använda. De olika begreppen äro dock ej fullt entydiga utan gripa delvis in i varandra, och vissa invändningar mot denna indelning kunna göras.

Instrålningstermiken bildas på grund av stark uppvärmning av de lägsta luftskikten genom jordytans förmedling. Den leder till en s. k. torrlabil skiktning av den närmast marken befintliga luften och är bäst utvecklad sommartid och under dagen vid klart väder, kraftig solstrålning och svag vind. Stundom benämnes den soltermik eller helt kort termik (i inskränkt betydelse).

En förstärkt form av instrålningstermiken är uppvindarna i cumulus- och cumulonimbusmoln; man skulle kunna kalla den *molntermik*, ehuru denna benämning ännu ej använts. Vid vattenångans kondensation, som leder till bildandet av de vackra vitglänsande stackmolnen eller de mäktiga åskmolnen, frigöras stora mängder bundet värme. Genom denna process ökas den potentiella energien avsevärt och därmed också uppvindarnas styrka.

Likaväl som en uppvärmning underifrån kan göra atmosfärens skiktning labil kan en avkylning i höjden åstadkomma omvälvningar och vertikala luftströmmar. Man talar i detta fall om *höjdtermik*. Avkylningen i höjden kan orsakas antingen av utstrålning från de högre luftskikten eller genom tillförsel till dessa av kallare luft.

Dessa tre slag av termiska uppvindar ha således var sin särskilda energikälla, men alla tre typerna kunna likväl var för sig förekomma under något olika former. Med *kvällstermik* betecknar man de termiska uppvindar — med eller utan molnbildning —, som ännu flera timmar efter solnedgången kunna finnas kvar i höjden, trots att den egentliga energitillförseln avstannat. Dessa uppvindar äro således endast rester av förut befintlig instrålnings- eller molntermik. Goda termiskt betingade uppvindar i förening med kraftig vind kallas *vindtermik* och är i allmänhet förutsättningen för att man med segelflygplan skall kunna tillryggalägga någon längre sträcka. Om sådan termik förekommer över hav, t. ex. över passadområdet, kallas den *oceantermik*. Höjdtermiken — orsakad av avkylning i höjden och oberoende av den direkta instrålningen till markytan — kan förekomma som *natt-* och *vintertermik*. Dessa båda benämningar antyda, att det finns termiska uppvindar, som kunna möjliggöra segelflygning även nattetid och under den kalla årstiden. De i samband med vandrande åsk- och kallfronter förekommande kraftiga vertikala

luftströmmarna, *frontuppvindarna* eller *fronttermiken* är närmast att hänföra till instrålnings- och molntermik och kan många gånger betraktas som en förstärkt form av vindtermik.

En i detalj riktig förklaring till de olika slagen av uppvindar torde ej vara möjligt att ge. Visserligen kunna vi i stor utsträckning spåra en viss inre lagbundenhet i det som sker i atmosfären, men mycket undandrar sig vår kontroll. En obetydlig förändring av ett meteorologiskt element kan få stora verkningar, ena gången på ett sätt, en annan gång på ett annat. Härvid spela jämviktsförhållandena i atmosfären en stor roll. En närmare kännedom om dessa är nödvändig för förståelsen av de vertikala luftrörelsernas uppkomst.

a. *Atmosfärens jämviktsförhållanden.*

Då en avgränsad luftmängd rör sig uppåt, kommer den under lägre tryck och utvidgas. Om tillståndsförändringen sker adiabatiskt dvs. utan värmeutbyte med omgivningen, måste expansionsarbetet ske på bekostnad av luftvolymens eget energiförråd, och följden blir, att den uppåtstigande luftens temperatur sjunker. Så länge denna luft icke är mättad med vattenånga, är temperaturavtagandet praktiskt taget lika med 1 °/100 m, oberoende av trycket (höjden) och i det närmaste oberoende av temperaturen (*torradiabatisk tillståndsändring*), men så snart daggpunkten uppnås och kondensation börjar, frigöres det latenta ångbildningsvärmet. Härigenom minskas temperatursänkningen hos den uppåtstigande luftmängden, och den är nu i stor utsträckning beroende av såväl tryck (höjd) som temperatur (*fuktadiabatisk tillståndsändring*). Om trycket är 1000 mb eller 750 mm Hg är temperaturavtagandet vid + 20° 0,45 °/100 m, vid 0° 0,63 °/100 m och vid — 20° 0,86 °/100 m samt ökar med höjden, på c:a 2000 m resp. 0,49, 0,75 och 0,95 °/100 m.

De kurvor som erhållas, om dessa adiabatiska tillståndsförändringar åskådliggöras grafiskt som funktion av temperatur och tryck (höjd), kallas *torradiabater* resp. *fuktadiabater*. Gemensamt benämnas de också *individuella tillståndskurvor* eller *hävningskurvor*, emedan de hänföra sig till avgränsade (individuella) luftmängders tillståndsändringar under hävning i vertikal led. Det härmed förbundna temperaturavtagandet per höjdenheten 100 m kallas *individuell temperaturgradient*; för icke mättad luft är den 1 °/100 m, för mättad luft betecknas den med γ'.

För kvalitativa och approximativa beräkningar kan man med fördel använda ett rätvinkligt koordinatsystem med temperaturen

som abscissa och höjden som ordinata samt lineär skalindelning. Erfordras mera exakta kvantitativa beräkningar av olika slag, måste man använda yttrogna transformationer av det s. k. *pv*-diagrammet. Ett sådant adiabatpapper finns beskrivet i förut omnämnda uppsats av A. Nyberg (Elementas junihäfte 1942).

Genom mätningar har man funnit, att temperaturen avtager uppåt i atmosfärens undre del, troposfären, men detta temperaturavtagande är ej lagbundet såsom vid avgränsade luftvolymers rörelse uppåt utan varierar från fall till fall. Inom smärre höjdintervall är temperaturen ibland konstant (isotermi), ibland stiger den med höjden (inversion). I medeltal avtager temperaturen med 0,5 à 0,6 °/100 m i den av vertikalrörelser ostörda atmosfären. Om man på ett adiabatpapper eller annat liknande diagram uppritar den vid ett visst tillfälle genom mätning funna temperaturfördelningen i vertikal led, erhålles en temperaturfördelningskurva som kallas *geometrisk tillståndskurva* eller *skiktningskurva*. Det temperaturavtagande per höjdenheten 100 m, som fås ur en sådan kurva, kallas *geometrisk temperaturgradient* och betecknas med γ.

För studiet av jämviktsförhållandena i atmosfären är det av största vikt att skilja mellan individuell och geometrisk tillståndskurva. Vertikalrörelserna i atmosfären bero nämligen ej blott av temperaturändringen hos den upp- eller nedåtgående luftvolymen utan även av temperaturfördelningen i den omgivande atmosfären. Till varje kombination av tryck och temperatur i atmosfären (och i ett diagram) höra två hävningskurvor, en torradiabat och en fuktadiabat, som äro oföränderliga, men skiktningskurvan varierar från ett tillfälle till ett annat. *I regel sammanfalla ej hävnings- och skiktningskurvan.* Det är just på grund härav som olika betingelser skapas för vertikalrörelsers inledande och fortbestånd inom större eller mindre höjdintervall.

En liten avgränsad luftvolym, som har samma temperatur och därmed också samma täthet som den omgivande luften, befinner sig i jämvikt i förhållande till denna. Om jämvikten är stabil, labil eller indifferent, beror på hur de krafter verka, som eventuellt träda i funktion vid en liten rubbning ur jämviktsläget. En luftvolym som är varmare än den omgivande luften, är lättare än denna och strävar att stiga uppåt. Är luftvolymen kallare och således tyngre än omgivningen, vill den sjunka. I båda fallen är accelerationen $\frac{d^2z}{dt^2}$ proportionell mot temperaturskillnaden mellan luftvolymen och den omgivande luftmassan och kan uttryckas genom formeln

$$\frac{d^2z}{dt^2} = g\,\frac{T' - T}{T}, \qquad (1)$$

där g är tyngdkraftens acceleration, T' luftvolymens absoluta temperatur och T den omgivande luftens absoluta temperatur. Formeln kommer att härledas och utvecklas vidare i samband med en kvantitativ beräkning av uppvindarnas styrka. Tillsvidare får ett enkelt exempel ge en föreställning om storleken av de vertikalhastigheter som kunna förekomma. Om luftvolymens temperatur är $+28°$ och omgivningens $1°$ lägre, dvs. $T' = 301°$ och $T = 300°$, blir accelerationen 1/300 av tyngdkraftens (981 cm/sek²)

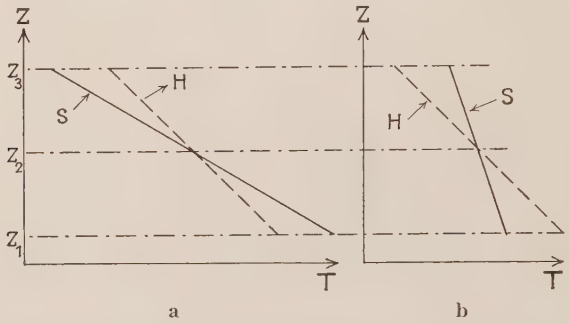


Fig. 5. Jämviktsförhållandena vid torradiabatiska tillståndsändringar omkring ett jämviktsläge (z_2). Temperaturfördelningen anges av skiktningskurvan S, temperaturändringen vid vertikalrörelse av hävningskurvan H (torradiabat). I *a* är skiktningen torrlabil, $\gamma > 1\,°/100$ m, i *b* torrstabil, $\gamma < 1\,°/100$ m. Om S och H sammanfalla, $\gamma = 1\,°/100$ m, är skiktningen indifferent.

och således blott c:a 3,2 cm/sek². Denna hastighetsökning är ju rätt obetydlig, men om blott accelerationen får verka tillräckligt länge, kan uppvinden nå avsevärd styrka. Under förutsättning att luftvolymen hela tiden är $1°$ varmare än omgivningen blir hastigheten på 10 meters höjd 81 cm/sek och på 250 m 4 m/sek. På grund av friktionen få dock dessa värden minskas med en tredjedel.

Vi kunna nu övergå till att närmare studera, hur temperaturskiktningen i olika fall inverkar på vertikalrörelserna och antaga först, att luften ej är eller under rörelsen blir mättad med vattenånga.

I. $\gamma > 1\,°/100$ *m.* På höjden z_2 (se fig. 5a) befinner sig en liten luftvolym i jämvikt med omgivningen med samma temperatur som denna. Luftvolymen antages nu bli rubbad ur sitt jämviktsläge.

Temperaturändringen sker då utefter linjen H med 1 °/100 m, medan omgivningens temperatur är given enligt linjen S ($\gamma >$ 1 °/100 m). Ovanför jämviktsläget, t. ex. på höjden z_3, blir luftvolymen varmare och lättare än omgivningen och differensen $T' - T$ växer med höjden, vilket enligt formel (1) även är fallet med den kraft (acc.), som träder i verksamhet. Nedanför jämviktsläget, t. ex. på höjden z_1, blir luftvolymen kallare och tyngre än den omgivande luften och differensen $T' - T$ negativ och till sitt belopp växande med avtagande z, varför även nu kraften (acc.) växer. I båda fallen avlägsnar sig luftvolymen hastigt från jämviktsläget, som alltså är labilt. Då den vertikala temperaturgradienten är överadiabatisk, $\gamma > 1$ °/100 m, kallas temperaturskiktningen *torrlabil*.

II. $\gamma <$ °/*100 m.* En liten luftvolym antages befinna sig i jämvikt med den omgivande luften på höjden z_2 (fig. 5b). Om den förskjutes uppåt från jämviktsläget, varvid temperaturändringen sker utefter linjen H, blir den kallare och tyngre än omgivningen, där temperaturfördelningen anges genom linjen S ($\gamma < 1$ °/100 m). Differensen $T' - T$ blir negativ och en nedåtriktad kraft träder i funktion enligt formel (1). Den motverkar rörelsen samt tvingar luftvolymen att återvända till det ursprungliga läget. Om luftvolymen sättes i rörelse nedåt, blir den varmare än omgivande luft och den positiva differensen $T' - T$ ger upphov till en uppåtriktad kraft, som återför luftvolymen till jämviktsläget. Fig. 5b och formel (1) visar även, att en redan på förhand existerande temperaturdifferens $T' - T$ (negativ på höjden z_3 och positiv på höjden z_1) strävar att tvinga in luftvolymen i jämviktsläget på höjden z_2 och att differensens absoluta belopp och därmed också accelerationen minskar under rörelsen. Jämvikten är stabil. Då $\gamma < 1$ °/100 m och luften ej är mättad med vattenånga, kallas temperaturskiktningen *torrstabil*.

III. $\gamma = 1$ °/*100 m* (*torradiabatisk gradient*). I detta fall sammanfalla hävningskurvan H och skiktningskurvan S. Även om en rubbning ur ett jämviktsläge kommer till stånd, får luftvolymen samma temperatur som den omgivande luften och någon acceleration enligt formel (1) uppkommer ej. Jämvikten och temperaturskiktningen är *indifferent*. Man bör emellertid observera, att även en sådan skiktning möjliggör vertikalrörelser. Om det nämligen redan finns en temperaturdifferens mellan en avgränsad luftvolym och omgivande luft och en vertikalrörelse kommer i gång, underhålles och ökar denna, då temperaturskillnaden förblir oförändrad och det då enligt förut nämnda formel finns en konstant acceleration.

Så snart en uppåtstigande luftström når kondensationsnivån, bli jämviktsförhållandena annorlunda. Här inträder mättning, och ovanför denna nivå spelar en annan del av hävningskurvan, fuktadiabaten, samt den fuktadiabatiska individuella temperaturgradienten γ' en avgörande roll. Till skillnad från den torradiabatiska temperaturgradienten, som alltid har det konstanta värdet 1 °/100 m, varierar γ' för olika kombinationer av temperatur och tryck men är alltid mindre än 1 °/100 m beroende på att det vid kondensationen frigjorda värmet motverkar temperatursänkningen

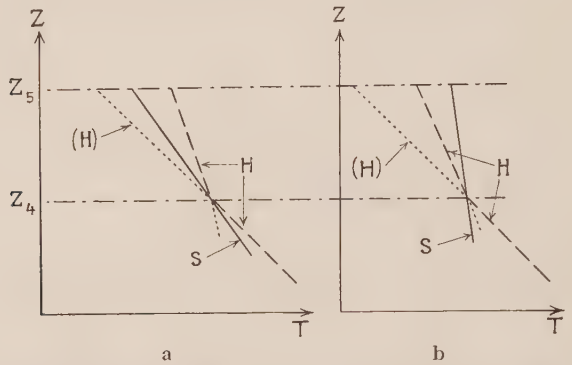


Fig. 6. Jämviktsförhållandena vid fuktadiabatisk tillståndsändring över ett jämviktsläge (z_4) sammanfallande med kondensationsnivån. *S* skiktningskurva och *H* hävningskurva, torradiabat under z_4, fuktadiabat över z_4; *(H)* är torradiabatens förlängning. Ovanför z_4 är skiktningen fuktlabil i *a*, $1\,°/100\text{ m} > \gamma > \gamma'$, fuktstabil i *b*, $1\,°/100\text{ m} > \gamma' > \gamma$, samt fuktindifferent, om *S* sammanfaller med fuktadiabaten *H*, $\gamma = \gamma'$. Nedanför z_4 är skiktningen torrstabil.

under uppstigningen. Härigenom skapas nya möjligheter till vertikala luftströmmar, vilka i vissa fall äro betydligt kraftigare än de, som förekomma mellan marken och kondensationsnivån.

IV. $1\,°/100\ m > \gamma > \gamma'$. Vi antaga att en liten luftvolym befinner sig i jämvikt med omgivande luft på höjden z_4 (se fig. 6a); för enkelhets skull får denna sammanfalla med kondensationsnivån, som anges genom en knyck i hävningskurvan *H*. För vertikalrörelser under denna nivå återföres såväl detta fall som de två följande till fall *II*. Om luftvolymen, som alltså innehåller mättad vattenånga, av någon anledning förskjutes uppåt från jämviktsläget, t. ex. till höjden z_5, ändras dess temperatur enligt den övre delen av hävningskurvan *H*, fuktadiabaten, medan den omgivande luftens temperaturskiktning anges av linjen *S*. Eftersom

H enligt förutsättningen kommer att ligga till höger om *S* i figuren ($\gamma' < \gamma$), kommer luftvolymen att bli varmare och lättare än omgivningen och fortsätter uppåt av sig själv, varvid temperaturskillnaden åtminstone till en början växer, liksom såväl hastigheten som accelerationen. Jämviktsläget på höjden z_4 är alltså labilt för luft som är mättad med ånga men stabilt för icke mättad luft (jfr *II*). En sådan jämvikt kallas *fuktlabil* liksom den temperaturskiktning, som anges genom olikheten $1\,°/100\ \text{m} > \gamma > \gamma'$. Den fuktlabila temperaturskiktningen är mycket vanlig i atmosfären och kan stundom omfatta luftskikt av 5 à 6 kilometers tjocklek. Resultatet blir då mäktiga bymoln eller åskmoln med våldsamma omlagringar i vertikal led.

V. $1\,°/100\ m > \gamma' > \gamma$. Man övertygar sig lätt om att jämvikten på höjden z_4 (se fig. 6b) är stabil för såväl torradiabatiska som fuktadiabatiska tillståndsförändringar. En sådan vertikal skiktning kallas *fuktstabil*. Den motverkar alla vertikala rörelser.

V. $\gamma = \gamma'$ *(fuktadiabatisk gradient).* Eftersom $\gamma < 1\,°/100$ m motverkas torradiabatiska tillståndsändringar. Ovanför kondensationsnivån sammanfaller hävningskurvan *H* med skiktningskurvan *S* och temperaturskiktningen är *fuktindifferent*. Detta är ett gränsfall mellan *IV* och *V*, och om det av någon anledning uppstår en temperaturdifferens mellan en begränsad luftmängd och omgivningen, äro vertikalrörelser möjliga (jfr *III*).

En stabil temperaturskiktning utgör visserligen ett hinder för vertikala luftströmmar i det att en luftvolym, som befinner sig i jämvikt med omgivningen, ej kan rubbas ur jämviktsläget utan att återförande krafter träda i verksamhet. Men detta betyder ej, att stabiliteten omöjliggör vertikalrörelser. Om energi tillföres luftvolymen genom uppvärmning (eller borttages genom avkylning), råder ej längre jämvikt, och vertikalrörelser äro möjliga inom vissa gränser alltefter energiändringens storlek, men temperaturskiktningen bromsar upp dem. Fig. 7 visar detta schematiskt för icke mättad luft och med bortseende från friktionen. Den heldragna linjen anger temperaturskiktningen i luften. Den vågräta temperaturaxeln låta vi sammanfalla med markytan. En där befintlig luftmängd uppvärmes indirekt genom solstrålningen, blir lättare än angränsande luft och kan ge sig av uppåt längs den streckade linjen (hävningskurvan). Ända till höjden z_1 ökar uppvindens styrka, då ju accelerationen enligt formel (1) är positiv. Ytan F_1 är ett aproximativt mått på den potentiella energi som omvandlats till rörelseenergi. På höjden z_1 ligger luftmängdens jämviktsläge, varest dess temperatur är densamma som omgiv-

ningens, men här är också dess hastighet uppåt störst, då accelerationen först här blir lika med noll. Luftvolymen fortsätter uppåt förbi jämviktsläget ända till dess rörelseenergien åter förvandlats till lägeenergi, således $F_2 = F_1$, vilket är fallet på höjden z_2. Här vänder luftvolymen och utför sedan en svängningsrörelse omkring jämviktsläget.[1] På grund av friktionen kommer i verkligheten F_2 att bli betydligt mindre än F_1, svängningarna bli starkt dämpade, och luftvolymen kommer snabbt till vila på höjden z_1. Under dessa vertikalrörelser har luftvolymen en tendens att deformeras, dels på grund av utbredning åt sidorna dels genom allmän turbulent blandning med omgivningen, varigenom dessutom temperaturmotsättningen utjämnas. Detta är bl. a. anledningen till att de uppåtriktade luftströmmarna äro kraftigare och oftare förekommande än de nedåtriktade. Ju mindre luftvolymen är, desto hastigare dör vertikalrörelsen ut.

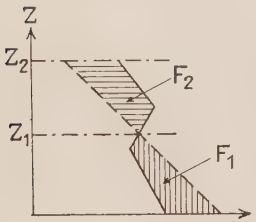


Fig. 7. Uppvärmning av en luftvolym vid marken möjliggör vertikalrörelse, även om skiktningen är stabil (heldragen bruten linje). Luftvolymen följer hävningskurvan (streckad linje) uppåt till höjden z_2, då approximativt $F_2 = F_1$; z_1 = luftvolymens jämviktsläge. Ingen friktion. Torradiabatisk tillståndsändring.

En labil temperaturskiktning främjar vertikalrörelser men kan i och för sig ej igångsätta dem. Det fordras en impuls utifrån för att den labila skiktningens potentiella energi skall omvandlas till kinetisk. En luftmassa som är i vila och har samma temperatur som omgivningen befinner sig ju i jämvikt med denna, och fria vetikalrörelser kunna inledas först om jämvikten störes genom att luftvolymen höjes eller sänkes. Även i de fall då en temperaturdifferens från början existerar, behövs i regel en utlösningsanordning, och detta gäller givetvis också, om skiktningen är stabil (se ovan). Sådana utlösningsanordningar för termiska uppvindar finns det gott om på jordytan. De utgöras av större och mindre ojämnheter, kullar, höjdsträckningar, skogsbryn, stränder osv., således orografiskt betingade. Exempel härpå kommer senare att lämnas.

(Forts.)

[1] På grund av friktionen kommer luftvolymen i verkligheten att vända, innan höjden z_2 nås ($\because F_2 < F_1$); svängningarna bli starkt dämpade, och luftvolymen kommer snabbt till vila på höjden z_1.

Beräkning av protonavståndet hos symmetriska, tvåbasiska syror ur dissociationskonstanterna.

En översikt.

Av BIRGER ADELL.

Problemet att ur en tvåbasisk syras båda dissociationskonstanter beräkna avståndet mellan dess protoner har under de senaste tjugo åren gång på gång aktualiserats genom viktiga teoretiska arbeten.

Själva grundidén emanerar från Wilhelm Ostwald, som 1892 påpekade, att hos en tvåbasisk syra H_2A bör den tvåvärda anjonen A^{--} ha så mycket svårare att uppkomma, ju närmare dess båda negativa laddningar sitta i förhållande till varandra. Desto mindre bör tydligen syrans sekundära dissociationskonstant vara. Omvänt bör man ur storleken av en tvåbasisk syras sekundära dissociationskonstant kunna få veta något om laddningsavståndet hos den tvåvärda anjonen.

Wegscheider framförde 1895 en annan tankegång, som för den kommande utvecklingen skulle få en väsentlig betydelse. Den kan i korthet uttryckas på följande sätt.

För en syra HX, vilken som helst, som dissocierar efter schemat:

$$HX \rightleftarrows H^+ + X^- \qquad (1),$$

gäller, att dess dissociationskonstant K är lika med kvoten mellan hastighetskonstanten k_1 för dissociationsprocessen, d. v. s. reaktionen åt höger, och hastighetskonstanten k_2 för associationsprocessen, d. v. s. reaktionen åt vänster.

Denna relation tillämpar Wegscheider bl. a. på en symmetrisk, tvåbasisk syra, där avståndet mellan de båda avspaltbara protonerna är så stort, att de motsvarande dissociationsprocesserna icke på något sätt påverka varandra. Syrans formel må skrivas H . R . H och formeln för den motsvarande sura metylestern H . R . CH_3. Denna ester disssocierar ju enligt schemat:

$$H \,.\, R \,.\, CH_3 \rightleftarrows {}^-R \,.\, CH_3 + H^+ \qquad (2)$$

och syran enligt ekvationerna:

$$H \,.\, R \,.\, H \rightleftarrows {}^-R \,.\, H + H^+ \qquad (3)$$

$$^-R \,.\, H \rightleftarrows {}^-R^- + H^+ \qquad (4).$$

Den sura esterns dissociation må nu jämföras med syrans primära. Eftersom det hos syran finns två avspaltbara protoner, men hos estern endast en, och de båda sura grupperna hos syran dissociera fullkomligt ostörda av varandra, finns det, rent statistiskt sett, dubbelt så många möjligheter för dissociation hos syran som hos den sura estern, och hastighetskonstanten för dissociationen måste vara dubbelt så stor i förra fallet som i det senare. Se vi på associationen, finns det i båda fallen hos den envärda anjonen endast ett associationsställe, nämligen det, där den fria negativa laddningen sitter, och hastighetskonstanten bör i båda fallen vara densamma. Därav följer omedelbart, att syrans primära dissociationskonstant K' blir dubbelt så stor som esterns dissociationskonstant K_E.

Jämföra vi vidare dissociationsprocessen hos estern med den envärda syraanjonens dissociation, finns i båda fallen endast en avspaltbar proton. Hastighetskonstanterna för dissociationen böra således vara lika. Men hos den tvåvärda syraanjonen finnas två associationsställen för protonen, hos esteranjonen blott en. Hastighetskonstanten för associationen bör följaktligen i förra fallet vara dubbelt så stor som i det senare och syrans sekundära dissociationskonstant K'' alltså vara hälften så stor som esterns dissociationskonstant K_E.

De ovan diskuterade förhållandena överblickas bäst med hjälp av tabell 1 nedan.

Tabell 1.

	Hastighetskonstant vid		Dissociations-konstant
	dissociation	association	
Sur ester.	k_1	k_2	$K_E = k_1/k_2$
Syra, primär diss.	$2k_1$	k_2	$K' = 2k_1/k_2 = 2K_E$
Syra, sekundär diss.	k_1	$2k_2$	$K'' = k_1/2k_2 = K_E/2$

För en symmetrisk, tvåbasisk syra med mycket stort avstånd mellan protonerna är alltså följande relation att vänta:

$$K' : K'' = 2K_E : K_E/2 = 4. \quad (5)$$

Nu är emellertid en syra med så stort avstånd mellan de sura grupperna, att de båda dissociationsprocesserna icke påverka varandra, att betrakta som ett gränsfall, som man knappast någonsin träffar på hos reella syror. Hos dem finner man, såsom Adams 1916 påpekade, genomgående, att K'/K'' är större än 4. Detta gäller t. ex. för den här närmast tillhands liggande oxalsyreserien.

Den fysikaliska kemien måste då ställa som sin uppgift att förklara, varför denna kvot hos verkliga, symmetriska syror avviker från det statistiska värdet 4. Frågan togs upp av BJERRUM i ett viktigt arbete från år 1923.

Avståndet mellan den fria negativa laddningen och den kvarvarande, avspaltbara protonen hos den envärda anjonen av en symmetrisk, tvåbasisk syra skall i det följande betecknas med r. BJERRUM utgår från det faktum, att när den andra protonen skall avspaltas, måste det utöver jonisationsprocessens normala aktiveringsenergi krävas ett tillskottsarbete för att avlägsna den positiva protonen från det kraftfält, som anjonens negativa laddning alstrar. Betecknar man den potential, som denna laddning ger på avståndet r, med Φ och protonens laddning med q', blir det nämnda tillskottsarbetet per proton $q'\Phi$, och BJERRUM antar, att kvoten mellan det experimentellt funna värdet på K'/K'' och det statistiska värdet 4 huvudsakligen är betingad av detta arbete. BJERRUM visar, att i så fall följande samband måste gälla:

$$kT \cdot \ln \frac{K'}{4K''} = q'\Phi \tag{6}$$

eller

$$\log \frac{K'}{K''} - \log 4 = \frac{q'\Phi}{2{,}303 \cdot kT} \tag{7}$$

k är Boltzmanns konstant och T absoluta temperaturen. Potentialen beräknar BJERRUM helt enkelt enligt den klassiska formeln

$$\Phi = \frac{q}{Dr} \tag{8}$$

och sätter D lika med lösningsmedlets makroskopiska dielektricitetskonstant. q är anjonens laddning. Insättes uttrycket för Φ i ekv (7), får man:

$$\log \frac{K'}{K''} - \log 4 = \frac{qq'}{2{,}303 \cdot DkTr} \tag{9}$$

Här känner man $q = q' = 4{,}774 \cdot 10^{-10}$ e. s. e., $k = 1{,}371 \cdot 10^{-16}$ erg. grad^{-1} och kan alltså för en given försökstemperatur och ett givet lösningsmedel ur det experimentellt funna värdet på K'/K'' få fram värdet på r. För vattenlösningar av 18° C, där D är 81,1 och T är 291,2, får man t. ex.

$$\log \frac{K'}{K''} - \log 4 = \frac{3{,}056}{r \cdot 10^8} \tag{10}$$

r uttryckes då i cm.

De r-värden, som ekvationer av typen (9) ge, gälla ju närmast avståndet mellan den fria laddningen och den avspaltbara protonen hos den envärda syraanjonen. A priori är det naturligtvis inte givet, att protonavståndet hos den odissocierade syramolekylen och laddningsavståndet hos den tvåvärda anjonen också kunna sättas lika med r. Tvärtom har man på olika teoretiska vägar sökt beräkna skillnaderna mellan dessa tre avstånd, men för närvarande torde vår kännedom om de inremolekylära kraftverkningar, som betinga dessa skillnader, vara alltför ringa för att möjliggöra en någorlunda tillförlitlig beräkning. De flesta forskare antaga därför, att de tre diskuterade avstånden kunna sättas approximativt lika.

Bjerrum tillämpade själv en formel av typen (10) på en hel rad symmetriska, tvåbasiska syror och jämförde de erhållna r-värdena med de avståndsvärden, han fick fram ur molekylmodeller. Det visade sig då, att för syror med längre avstånd mellan de båda sura grupperna, t. ex. bärnstensyra och dess högre homologer, r-värdena voro av den väntade storleksordningen, men att de för kortare syror som oxalsyra och malonsyra och ännu mer för kolsyra och vätesvavla voro orimligt små. (Jämför tabell 2 nedan!)

Bjerrums teori är emellertid, såsom han själv också betonar, behäftad med åtminstone två osäkerhetsmoment. Det första ligger däri, att hos den envärda anjonen kraftverkan från den negativa laddningen på den avspaltbara protonen fortplantar sig icke bara direkt genom lösningsmedlet utan också genom atomerna i molekylen. För denna s. k. inremolekylära polarisation göres i Bjerrums teori ingen korrektion. Det är att vänta, att den skall huvudsakligen vara av betydelse dels hos kortare, mättade syror som t. ex. oxal- och malonsyrorna, dels ock, och i ännu högre grad, hos omättade syror som fumar- och maleinsyrorna, vilka innehålla en starkt polariserbar dubbelbindning. Denna inremolekylära polarisation medför en ökning av de krafter, som kvarhålla den andra protonen hos syran och minska alltså syrans sekundära dissociationskonstant. Försummar man korrektionen för denna effekt, kommer kvoten K'/K'' att verka abnormt stor, och det beräknade r-värdet blir för litet. (Se tabell 2 nedan!)

Det andra osäkerhetsmomentet ligger däri, att, när det som här är fråga om atomära avstånd, man sannolikt icke har rätt att i uttrycket för potentialen Φ sätta D lika med mediets makroskopiska dielektricitetskonstant utan måste ta hänsyn till de förändringar, som åtminstone i ett dipolhaltigt medium inträda kring den envärda anjonens fria laddning.

Först 1931 sökte Ingold bemästra den senare av de ovannämnda

svårigheterna. Han utgår från Bjerrums ekvation (7) men vill för ett dipolhaltigt medium som t. ex. vatten komma fram till ett korrektare uttryck för potentialen Φ på avståndet r från den envärda anjonens fria laddning q. Han antar vidare, att lösningsmedelsmolekylerna ha det permanenta dipolmomentet μ och att de tack vare den ojämna laddningsfördelningen attraheras till syraanjonens laddning och ordna sig radiellt kring denna. Vidare tar han hänsyn till att denna laddning hos lösningsmedelsmolekylerna åstadkommer en elektronförskjutning och alltså hos dem ytterligare inducerar ett elektriskt moment. Deras polariserbarhet, d. v. s. det av fältstyrkan 1 alstrade momentet, kallar han γ. Han korrigerar också för lösningsmedelsmolekylernas anisotropa polariserbarhet, d. v. s. olika stora polariserbarhet i olika riktningar inom molekylen. Attraktionen mellan anjonens laddning och lösningsmedelsmolekylerna åstadkommer slutligen ett stegrat inre tryck i lösningsmedlet, och detta medför på grund av lösningsmedlets kompressibilitet en ökning av lösningens specifika vikt i närheten av nämnda laddning. Alla dessa korrektioner leda till ett mycket komplicerat ekvationssystem.

För r-värden mindre än 12 Å visar det sig, att potentialen Φ icke kan uttryckas som en explicit funktion av r, utan dess värden måste erhållas genom en serie tidsödande, successiva approximationer. För vattenlösningar vid 25° C beräknade Ingold genom sådana approximationer värdet av Φ för $r = 2{,}25$; $2{,}50$; $2{,}75$ ... $12{,}00$ Å och samlade resultaten i en tabell. För andra försökstemperaturer måste den, som vill pröva den Ingoldska teorien, själv genomföra dylika beräkningar.

Om r är större än eller lika med 12 Å, kan potentialen Φ enligt Ingold uttryckas som följande funktion av r:

$$\Phi = \frac{1 - \frac{4}{3}\pi\nu \cdot \left(\gamma + \frac{\mu^2}{3kT}\right)}{1 + \frac{8}{3}\pi\nu \cdot \left(\gamma + \frac{\mu^2}{3kT}\right)} \cdot \frac{q}{r} + \frac{\frac{4}{5}\pi\nu\mu^4 \cdot \frac{1}{45k^3T^3}}{\left[1 + \frac{8}{3}\pi\nu \cdot \left(\gamma + \frac{\mu^2}{3kT}\right)\right]^4} \cdot \frac{q^3}{r^5} \qquad (11)$$

ν betyder här antalet lösningsmedelsmolekyler per cm^3.

Jones och Soper visade emellertid 1936, att man för vattenlösningar kan använda ekv. (11) utan nämnvärda fel ända ner till $r \approx 4$ Å, nämligen om man försummar de obetydliga korrektionerna för vattnets kompressibilitet och dess molekylers anisotropa polariserbarhet.

Vill man t. ex. tillämpa den på vattenlösningar av 18° C, har man att sätta $\nu = 3{,}359 \cdot 10^{22}$. Polariserbarheten γ bestämmes ur temperaturvariationen hos vattenångans dielektricitetskonstant till

$2{,}129 \cdot 10^{-24}$ cm^3. De associerade vattenmolekylernas dipolmoment erhåller man ur DEBYES ekvation:

$$\frac{D-1}{D+2} = \frac{4\pi v}{3} \cdot \left(\gamma + \frac{\mu^2}{3kT}\right) \qquad (12),$$

där D är dielektricitetskonstanten för flytande vatten, k som förut betyder Boltzmanns konstant $1{,}371 \cdot 10^{-16}$ erg.grad^{-1} och T är 291,2; q är som förut $4{,}774 \cdot 10^{-10}$ e. s. e.

Genom insättning av alla dessa konstanter i ekv. (11) får man:

$$\Phi_{18^\circ} = \frac{5{,}884 \cdot 10^{-12}}{r} + \frac{1{,}396 \cdot 10^{-41}}{r^5} \qquad (13)$$

och genom kombination med BJERRUMS ekv (7):

$$\log \frac{K'}{K''} - \log 4 = \frac{3{,}056}{r \cdot 10^8} + \frac{725}{(r \cdot 10^8)^5} \qquad (13).$$

Märkas bör, att man vid användning av såväl ekv. (10) som (13) såsom värden på dissociationskonstanterna bör använda dem, som erhållits genom extrapolation till jonstyrkan noll, d. v. s. syrans termodynamiska dissociationskonstanter. Praktiskt utnyttjar man ekv. (13) på så sätt, att man grafiskt representerar logaritmen för dess högra membrum som funktion av r. För ett experimentellt bestämt värde på K'/K'' kan då vänstra membrum och dess logaritm beräknas, varefter man på kurvan kan direkt avläsa det sökta r-värdet.

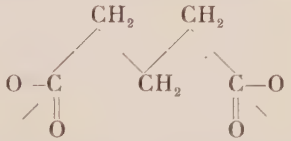
En jämförelse mellan ekvationerna (10) och (13) visar först och främst, att INGOLDS ekvation skiljer sig från BJERRUMS genom tillfogandet av korrektionsledet $725/(r \cdot 10^8)^5$. Detta led spelar naturligtvis störst roll för små r-värden, och ju mera r växer, desto mera skola de enligt BJERRUMS och INGOLDS ekvationer beräknade avståndsvärdena, betecknade med r_B resp. r_I, närma sig varandra. Detta framgår också av tabell 2. De här använda värdena på dissociationskonstanterna gälla vid 25° C och äro för paraffindikarbonsyrorna hämtade ur ett arbete av GANE och INGOLD, för de båda omättade syrorna bestämda av GERMAN, VOGEL och JEFFERY. Tabellen visar också, att för oxalsyra, malonsyra och maleinsyra, där BJERRUMS ekvation ger abnormt små värden, får man med hjälp av INGOLDS ekvation sannolikare resultat.

$\log K'/K''$ kan man experimentellt bestämma med en noggrannhet på c:a $\pm 0{,}018$ logaritmenheter. Det ger för $r = 5$ Å ett relativt fel på c:a 1 %. Ju längre syran blir, desto större blir emellertid det relativa felet och utgör för $r = 12$ Å ungefär 7 %.

Tabell 2.

Namn	r, beräknat ur		r, beräknat ur diss.-konstanter	
	styv modell	fritt vridbar modell	r_B	r_I
Oxalsyra	3,54 Å	3,50 Å	1,29 Å	3,37 Å
Malonsyra	4,26	4,12	1,35	3,42
Bärnstensyra	5,87	4,66	4,47	5,58
Glutarsyra	6,84	5,15	6,48	7,12
Adipinsyra	8,36	5,59	7,8	8,22
Pimelinsyra	9,43	6,00	9,0	9,43
Korksyra	10,88	6,38	10,8	11,07
Azelainsyra	12,04	6,74	11,7	12,03
Fumarsyra	5,91	—	4,01	5,25
Maleinsyra	4,25	—	0,83	2,92

I första kolumnen av tabell 2 äro angivna de avståndsvärden, man erhåller, om man utgår från en styv, plan, sicksackformig molekylmodell. För den tvåvärda anjonen av t. ex. glutarsyra skulle en sådan modell te sig på följande sätt:



Avståndet mellan alifatiska kolatomer är enligt röntgenundersökningar 1,54 Å och valensvinkeln vid kolatomerna 109°,5. Vidare anser man sig ur optiska data kunna sluta, att den negativa laddningen hos den dissocierade karboxylgruppen ligger symmetriskt i förhållande till de båda syreatomerna och på förlängningen av den yttersta C—C-linjen. Avståndet till kolatomen i karboxylgruppen skattas till 1 Å.

Med hjälp av dessa data och rent geometriska beräkningar kommer man ur dylika styva molekylmodeller fram till följande uttryck för avståndet r mellan de fria laddningarna hos den tvåvärda anjonen $^-OCO.(CH_2)_N.COO^-$

$$r = [(N+1)\cdot 1{,}54 + 2\cdot 1{,}00]\cdot \sin\frac{109°{,}5}{2}; \quad (N \text{ udda})$$

$$r^2 \quad [(N+1)\cdot 1{,}54 + 2\cdot 1{,}00]^2\cdot \sin^2\frac{109°{,}5}{2} + [1{,}54 + 2\cdot 1{,}00]^2\cdot \cos^2\frac{109°{,}5}{2}; \quad (N \text{ jämnt}) \qquad (14).$$

Antar man å andra sidan, att molekylmodellerna äro fritt vridbara kring de olika valenserna, kan man, såsom KUHN och EYRING visat, beräkna ett statistiskt medelavstånd mellan laddningarna hos den tvåvärda syraanjonen eller mellan protonerna i den odissocierade molekylen. Dessa värden äro upptagna i kolumn 2 av tabell 2.

Man finner, att r_I-värdena ligga mycket nära dem, som erhållas ur den styva molekylmodellen. INGOLD sluter därav också, att paraffindikarbonsyrornas molekyler i vattenlösning äro att betrakta som praktiskt taget styva och plana sicksackbildningar. Ett särskilt belägg därför finner han i följande resonemang.

Han representerar grafiskt r_I-värdena för paraffindikarbonsyrorna som en funktion av antalet metylengrupper N i molekylen och finner det lineära sambandet

$$r_I = 2{,}98 + 1{,}29 \cdot N \qquad (15).$$

Vinkelkoefficienten 1,29 anger ju syramolekylens längdökning per metylengrupp. Nu har MÜLLER genom röntgenundersökning av kristalliserade kolväten och CASPARI genom undersökning av kristaller av adipinsyran och dess normala homologer experimentellt funnit en motsvarande längdökning per metylengrupp på 1,27 Å. Överensstämmelsen är synnerligen god, och dock torde INGOLDS slutsats icke vara invändningsfri. För det första måste man komma ihåg, att r_I-värdena för de korta syrorna oxalsyra, malonsyra och ev. bärnstensyra äro behäftade med osäkerheter till följd av den inremolekylära polarisationen, och för de längre syrorna äro de mycket känsliga för försöksfel. Vidare är GANES och INGOLDS r_I-värde för bärnstensyra sannolikt c:a $^1/_2$ Å för lågt. Ett flertal forskare finna nämligen för denna syra $r_I \approx 5{,}05$ Å i st. f. 5,58 Å. Man har därför inte rätt att tillmäta värdet 1,29 för vinkelkoefficienten alltför stor vikt.

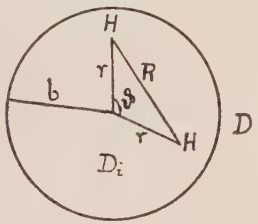
En av författaren till denna översikt gjord undersökning av paraffindikarbonsyrornas dissociationskonstanter vid 18° C visar också, att fastän dessa dissociationskonstanter inom försöksfelens gränser överensstämma med GANES och INGOLDS värden, ge de dock, representerade med antalet metylengrupper N som abscissa, en mot abscissaxeln svagt böjd kurva. Detta innebär, att ökningen av protonavståndet för varje nyinkopplad metylengrupp blir mindre och mindre, d. v. s. atomkedjan blir allt böjligare och böjligare. Detta gäller i än högre grad om polymetylen-bis-tioglykolsyrorna med den allmänna formeln:

$$HOOC \,.\, CH_2 \,.\, S \,.\, (CH_2)_n \,.\, S \,.\, CH_2 \,.\, COOH \quad (0 \leqq n \leqq 5),$$

vilket också talar mot antagandet om en absolut styv och plan molekylstruktur hos paraffindikarbonsyrorna.

I Ingolds teori tages ingen som helst hänsyn till den inremolekylära polarisationen Denna svårighet togs först 1938 upp till behandling av Kirkwood och hans medarbetare, bland dem främst Westheimer. Dessa forskare mena, att man vid behandlingen av avståndsproblemen bör betrakta syramolekylerna som öar med låg dielektricitetskonstant i ett yttre medium, t. ex. vatten, med högre dielektricitetskonstant. De anse korrektionen för den inremolekylära polarisationen såsom den viktigaste och mena, att Ingold överskattat mediumförändringarnas inflytande. T. v. försumma de korrektionerna för dessa förändringar.

De behandla syramolekylerna antingen som approximativa sfärer eller rotationsellipsoider. Till den förra gruppen av syror höra oxalsyra, malonsyra, metyl- och etylmalonsyrorna, metyletylmalonsyra, tetrametylbärnstensyra m. fl., till den senare de normala paraffindikarbonsyrorna fr. o. m. bärnstensyra.



Eftersom det är att vänta, att den inremolekylära polarisationen huvudsakligen gör sig gällande hos de kortare syrorna och dessa syror approximativt betraktas som sfärer, skall jag här i första hand redogöra för behandlingen av denna molekylmodell. Molekylsfärens radie kallas för b, och den odissocierade syrans protoner tänkas belägna på samma avstånd r från sfärens centrum; r antages vara mindre än b, och vinkeln mellan radierna till protonerna kallas ϑ. Det direkta avståndet mellan protonerna betecknas med R (se fig.). Vidare införes storheten $x = r^2/b^2$. Sfärens inre dielektricitetskonstant skrives D_i och lösningsmedlets D.

Kirkwood och Westheimer bibehålla formellt Bjerrums ekvation (9), som de teckna:

$$\triangle pK = \log \frac{K'}{K''} - \log 4 = \frac{q^2}{2{,}303 \cdot RkT} \cdot \frac{1}{D_E} \qquad (16).$$

q är en elementarladdning $= 4{,}774 \cdot 10^{-10}$ e. s. e. Men det yttre mediets makroskopiska dielektricitetskonstant D är här ersatt med en effektiv dielektricitetskonstant D_E, som är en funktion av såväl D_i som av D. Genom införandet av denna effektiva dielektricitetskonstant söka Kirkwood och Westheimer alltså ta hänsyn till att kraftlinjerna från syraanjonens fria laddning åtminstone delvis gå genom själva jonen. De finna följande samband.

$$\frac{1}{D_E} = \frac{f_1}{D_i} + \frac{f_2}{D} \qquad (17)$$

$$f_1 = \frac{2 \cdot \sqrt{2x(1-\cos\vartheta)}}{\sqrt{1-2x\cdot\cos\vartheta+x^2}} - \frac{\sqrt{2x(1-\cos\vartheta)}}{x} \cdot$$

$$\cdot \ln \frac{\sqrt{1-2x\cos\vartheta+x^2}+x-\cos\vartheta}{1-\cos\vartheta} \qquad (18)$$

$$f_2 = 1 - \frac{\sqrt{2x(1-\cos\vartheta)}}{\sqrt{1-2x\cdot\cos\vartheta+x^2}} \qquad (19).$$

Dessutom får man av figuren:

$$R = r\sqrt{2(1-\cos\vartheta)} \quad \text{eller} \quad R = b\sqrt{2x(1-\cos\vartheta)} \qquad (20).$$

D_i sättes lika med dielektricitetskonstanten 2,00 för flytande paraffin, och molekylsfärens radie b beräknas ur den lösta syrans partiella molekylarvolym V i lösningen. Denna erhålles i sin tur enligt TRAUBES regel för vattenlösningar. TRAUBE tillskriver nämligen varje atom av ett i vatten löst ämne en konstant atomvolym: kol 9,9, väte 3,1, hydroxylsyre 2,3; karbonyl- och etersyre 5,5 cm³ etc. Genom att för den lösta syran summera dess atomvolymer och lägga till den s. k. kovolymen på 12,4 cm³ får man fram syrans partiella molekylarvolym V. Eftersom denna innehåller $6{,}06 \cdot 10^{23}$ molekyler, kan man beräkna sfärens radie b ur ekvationen:

$$6{,}06 \cdot 10^{23} \cdot \frac{4}{3}\pi b^3 = V \qquad (21).$$

KIRKWOODS och WESTHEIMERS teori må här tillämpas på malonsyra, där man efter INGOLDS beräkningsmetod fann avståndsvärdet 3,42 Å, som, sannolikt till följd av den inremolekylära polarisationen, utföll alldeles för lågt, t. o. m. lägre än det man med utgångspunkt från den fritt vridbara molekylmodellen skulle vänta sig. För denna syra sättes vinkeln $\vartheta = 180°$; cos ϑ blir alltså — 1, molekylarvolymen V är 66,4 cm³ och radien b följaktligen 2,97 Å. För vattenlösningar av 18° C är D 81,1. Under dessa betingelser blir $D_E \cdot \sqrt{x}$ alltså en funktion av x enbart och kan grafiskt representeras. Å andra sidan får man genom kombination av ekvationerna (16) till (19) sambandet:

$$D_E \cdot \sqrt{x} = \frac{q^2}{2{,}303 \cdot bkT \cdot \triangle pK \cdot \sqrt{2(1-\cos\vartheta)}} \qquad (22).$$

q, b, k, T och cos ϑ äro alla bekanta storheter. För ett experimentellt bestämt värde på $\triangle pK$, som hos malonsyra är 2,262, kan man alltså beräkna $D_E \cdot \sqrt{x}$, här 18,46, och så på kurvan avläsa motsvarande $\sqrt{x}$-värde, i detta fall 0,705, som insatt i ekv. (20) ger det sökta protonavståndet R, vilket för malonsyra blir 4,19 Å i god överensstämmelse med modellvärdena (Se tabell 3).

Längre syrors molekyler behandla KIRKWOOD och WESTHEIMER som nämnts såsom approximativa rotationsellipsoider med de båda protonerna i foci. Beräkningen av protonavståndet är analog med den ovan relaterade för klotformiga syror, dock med den skillnaden, att D_E här betraktas som en funktion av ellipsoidens excentricitet. I tabell 3 äro sammanställda KIRKWOODS och WESTHEIMERS värden på protonavståndet hos paraffindikarbonsyrorna. De ligga i allmänhet mellan de värden, som erhållas ur den styva och den fritt vridbara molekylmodellen. Avståndet mellan laddningen och kolatomen hos den dissocierade karboxylgruppen sättes vid modellberäkningarna lika med 1,45 Å. De experimentellt bestämda R-värdena tyda icke på en styv molekylbyggnad.

Tabell 3.

Protonavståndet R hos paraffindikarbonsyrorna.

	Modellvärden		Experimentella värden
	Styv molekylmodell	Fritt vridbar modell	
Oxalsyra	4,44 Å	3,50 Å	3,85 Å
Malonsyra	4,87	4,12	4,19
Bärnstensyra	6,66	4,66	5,75
Glutarsyra	7,59	5,15	7,00
Adipinsyra	9,02	5,59	7,75
Pimelinsyra	9,91	6,00	8,30
Korksyra	11,46	6,38	9,30
Azelainsyra	12,42	6,74	9,85

KIRKWOOD och WESTHEIMER påpeka själva, att deras teori förvisso kräver ytterligare komplettering just med tanke på mediumförändringarna kring anjonernas fria laddning. Problemet om beräkningen av protonavståndet hos tvåbasiska symmetriska syror ur dissociationskonstanterna är sålunda ännu inte fullständigt löst men har genom de ovan relaterade teorierna förts ett betydande steg framåt mot sin lösning.

Växelströmsgeneratorn, synkron- och asynkronmotorn.

Av **AXEL NORDHULT.**

Maskinernas utförande och schematiska avbildning.

I syfte att i möjligaste mån hindra uppkomsten av de energiförbrukande virvelströmmarna äro alla sådana delar hos elektriska maskiner, som genomflytas av variabla magnetiska flöden, utförda av tunna plåtar, isolerade från varandra med papper, som klistrats på plåtarna. Av mekaniska skäl sammanhållas plåtpaketen med bultar och höljen eller ok. Sådana delar, som genomflytas av ett konstant magnetflöde, utföras däremot av massivt järn. Hos växelströmsgeneratorn av normal typ utföres sålunda statorn av plåt med statorlindningen inlagd i spår, som utstansats i plåten. Rotorn, som är en elektromagnet, matad med likström som tillföres genom släpringar, tillverkas däremot av massivt järn. Synkronmotorn utföres på identiskt samma sätt som trefasgeneratorn. Hos asynkron- eller induktionsmotorn är magnetflödet variabelt i såväl statorn som rotorn, varför båda utföras av plåt.

Fig. 1 anger konstruktionen i princip av en enfasgenerator. Samma generator avbildas starkt schematiserad i fig. 2. En statorlindning markerad på sätt som skett i fig. 2 betecknar alltså en lindning placerad i det läge, som angivits i fig. 1. En dylik schematisering innebär ingen fördel vid beskrivning av enfasgeneratorn men förenklar däremot beskrivningen av trefasgeneratorn och motorerna. Med det i fig. 2 definierade beteckningssättet är trefasgeneratorn och synkronmotorn schematiskt avbildade i fig. 3. Utan svårighet torde genom jämförelse med figurerna 1 och 2 inses, hur de tre fasernas lindningar äro fördelade utefter statorns inre periferi. Som framgår av fig. 4 är asynkronmotorns stator utförd på samma sätt som trefasgeneratorns och synkronmotorns. Asynkronmotorns rotor är däremot av helt annan konstruktion än generatorns. Den består nämligen av en cylinderformad kropp av plåtlameller, genomstansad av spår i vilka kopparledare inlagts. Vid små motorer äro dessa ledare vid ändarna förenade med varandra med en kopparring (kortsluten rotor). Vid medelstora och

större motorer äro rotorledarna lindade på likartat sätt som statorlindningen med tre »faser», som vid ändarna förenas via tre släpringar och ett strömbegränsande pådragsmotstånd, vilket vid motorns igångsättning successivt urkopplas, då varvtalet ökas. Då rotorn uppnått full hastighet, kortslutas härvorna, varefter borstarna lyftas från släpringarna. Luftgapet mellan stator och rotor göres så litet som de mekaniska egenskaperna tillåta.

De vid kraftverken använda generatorerna äro vanligen av trefastyp. Med hänsyn till deras betydande storlek och vattenturbinernas förhållandevis låga varvtal äro dessa generatorer ej tvåpoliga som här ritas utan mångpoliga. För alstrande av 50-periodig ström måste en 2-polig generators varvtal per minut vara 3000, en 4-poligs 1500 och exempelvis en 30-polig generators $3000 : 15 = 200$.

Generatorns verkningssätt.

Då rotorn drives runt av exempelvis en vattenturbin, alstras i enfasgeneratorns statorlindning en växelspänning, som visserligen ej är exakt sinusformig, men som dock vid en förenklad beskrivning av växelströmsmaskinerna kan anses vara av sinusform. I var och en av generatorns tre faser alstras en dylik växelspänning med en inbördes fasförskjutning på 120°. De i de tre faserna alstrade spänningarna äro grafiskt framställda i fig. 5. Om ström uttages av samma storlek i de tre faserna, kunna kurvorna även representera dessa växelströmmar.

Asynkronmotorns verkningssätt.

En elektrisk ström enbart genom fas 1 alstrar i motorn det magnetflöde, som antydes i fig. 6. En elektrisk ström i positiv riktning (fig. 5) antages alstra en magnetisk fältstyrka i motorns centrum, som är riktad från centrum ut mot fas 1 i den schematiska bilden av motorn. Vid positiv ström i faserna 1, 2 och 3 alstras alltså magnetflöden, som till form och riktning angivas i fig. 6, 7 och 8. Vid ström i negativ riktning i en viss fas blir induktionslinjernas riktning den motsatta.

Då motorn fungerar, ledes ström från faserna 1, 2 och 3 hos generatorn till resp. faser 1, 2 och 3 hos motorn. Därvid uppkommer i motorn ett magnetflöde, som ständigt ändras och som i varje ögonblick är sammansatt av de flöden, som alstras av strömmarna i de tre faserna. För att förstå motorns verkningssätt måste kännedom förvärvas om det resulterande magnetflödet i motorn. Den av strömmen genom en viss fas alstrade fältstyrkan

i rotorns centrum angives till storlek och riktning genom en pil eller vektor. Om de tre faserna samtidigt äro strömgenomflutna, erhålles den resulterande magnetiska fältstyrkan genom geometrisk addition av de tre fältstyrkornas vektorer. Vi skola nu undersöka, hur det resulterande fältet i vissa ögonblick ser ut och välja de tidpunkter, som i fig. 5 svara mot $\alpha = 0°$, 90° och 230°, d. v. s. generatorns rotor har från första till andra ögonblicket vridit sig 90° och från första till tredje ögonblicket 230°.

Fältstyrkorna för $\alpha = 0$ åskådliggöras i fig. 9 a och 9 b. I fas 1 är strömstyrkan $I_1 = 0$. Fältstyrkan härrörande från fas 1 är då också = 0. I fas 2 är $I_2 = -0{,}87\ I_0$, där I_0 är maximiströmstyrkan i varje fas, och i fas 3 är $I_3 = 0{,}87\ I_0$. Då enligt Biot-Savarts lag fältstyrkan i varje ögonblick är proportionell mot den alstrande strömstyrkan, kunna kurvorna i fig. 5 även representera de av strömstyrkorna i resp. faser alstrade fältstyrkorna i maskinens centrum. Om maximifältstyrkan alstrad av strömmen i varje fas betecknas med F_0 blir $F_2 = -0{,}87\ F_0$ och $F_3 = 0{,}87\ F_0$. Vektorerna få alltså den storlek och riktning, som angivits i fig. 9 a. Den resulterande fältstyrkan representeras till storlek och riktning av vektorn F, varför i detta ögonblick det magnetiska flödet får det i fig. 9 b angivna utseendet. För $\alpha = 90°$ är $I_1 = I_0$, $I_2 = -0{,}5\ I_0$ och $I_3 = -0{,}5\ I_0$. Vektorerna F_1, F_2 och F_3 återgivas i fig 10 a. Deras resultant har liksom generatorns rotor vridit sig 90° från det föregående läget. Magnetflödet har i detta ögonblick alltså det utseende, som antydes i fig. 10 b. På samma sätt kunna vi bestämma magnetflödets utseende i vilket ögonblick som helst, exempelvis då $\alpha = 230°$. Vektorerna och flödets läge framgår av fig. 11 a och 11 b. Genom uppmätning med gradskiva kan man konstatera, att flödet även nu vridits samma vinkel som generatorns rotor, nämligen 230° från det ursprungliga läget. Dessutom finner man genom uppmätning, att de resulterande fältstyrkorna äro lika stora ($= 1{,}5\ F_0$) vid de tre tidpunkterna. Samma resultat erhålles beträffande vridningsvinkeln och resulterande fältets styrka vid vilken tidpunkt som än väljes. Resultatet av denna undersökning blir alltså:

1. Magnetfältets styrka är konstant.
2. Magnetfältet vrider sig med konstant rotationshastighet, synkront med det roterande magnetfältet i generatorn.

Är motorns statorlindning utförd på samma sätt som hos en tvåpolig generator, blir rotationsvarvtalet hos motorns magnetflöde 3000 varv per minut. Är motorns statorlindning däremot utförd som hos en 4-polig generator, blir rotorflödets varvtal 1500 o. s. v. Magnetflödets varvtal per minut hos motorn, det s. k. synkrona

Fig 1
Enfasgenerator

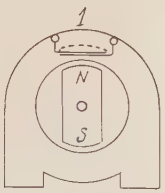


Fig 2
Enfasgenerator

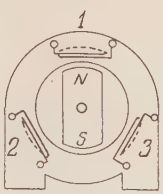


Fig 3
Trefasgenerator
Synkronmotor

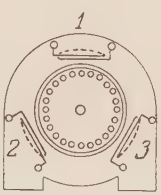


Fig 4
Asynkronmotor

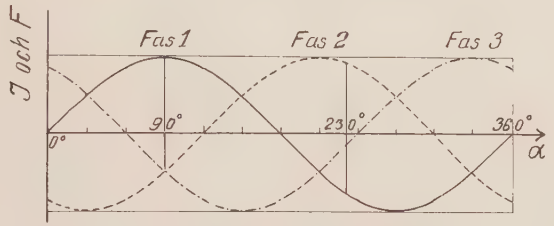


Fig 5

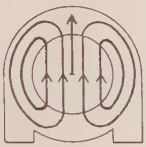


Fig 6

Fig 7

Fig 8

Magnetflödets utseende vid positiv ström enbart i
fas 1 fas 2 fas 3

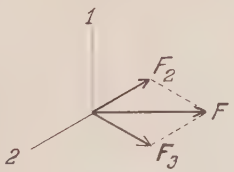


Fig 9a

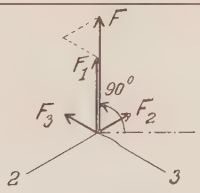


Fig 10a

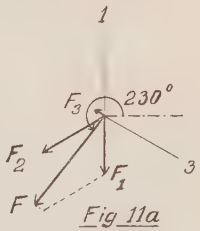


Fig 11a

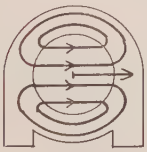


Fig 9b

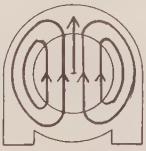


Fig 10b

Fig 11b

varvtalet, betecknas med n_s. Om rotorn roterar med varvtalet n, som är mindre än n_s, skäras rotorledarna av kraftlinjerna med en hastighet som är proportionell mot $n_s - n$.

Enligt Faradays induktionslag är den i rotorledarna inducerade spänningen och sålunda även strömstyrkan I proportionell mot $n_s - n$. Den mekaniska kraft, som påverkar en strömgenomfluten ledare i ett magnetfält är proportionell, dels mot magnetfältets styrka, dels mot strömstyrkan. Då i detta fall fältstyrkan är konstant, blir kraften som påverkar rotorledarna proportionell mot I och därmed också mot $n_s - n$. Härav inses, att det vridande moment M, som strävar att vrida rotorn i samma riktning som det roterande fältet eller vridfältet kan skrivas $M = k(n_s - n)$. Vid ett synkront varvtal på 1500 varv per minut är vid full belastning $n = 1330$ à 1400. Om vid full belastning $n = 1300$, fås $M = M_1 = k \cdot 200$. I startögonblicket blir, om rotorn då är kortsluten, $M = k \cdot 1500 = 7{,}5\, M_1$, d. v. s. startströmstyrkan 7,5 gånger strömstyrkan vid full belastning. För att minska strömrusningen i starten inkopplas i rotorlindningen det ovannämnda pådragsmotståndet. Vridande momentet vid motorns start avpassas härigenom förmånligt, och smältskydden i ledningen kunna dimensioneras lämpligt. Om belastningen på motorn minskas successivt, närmar sig varvtalet mer och mer det synkrona, vilket det dock aldrig kan uppnå, enär i så fall det vridande momentet blir noll. Varvtalet är alltså något beroende av belastningen. Eftersom motorns varvtal ej överensstämmer med det synkrona varvtalet, kallas den för asynkronmotor.

Synkronmotorns verkningssätt.

På samma sätt som i asynkronmotorn alstras i synkronmotorn ett vridfält. Med en hjälpmotor drives synkronmotorns rotor upp till det synkrona varvtalet, varunder den likström, som magnetiserar rotorns magnetpoler, hålles svag. Då magnetfältet, som alstras av rotorströmmen, sammanfaller med statorns vridfält, ökas magnetiseringsströmmen till fullt värde, varvid rotorns poler med stor kraft hålles fast vid vridfältet. Sedan startmotorn frånkopplats, fortsätter rotorn att rotera med samma hastighet som vridfältet. Motorns varvtal blir alltså lika med det synkrona varvtalet, därav namnet synkronmotor. Belastningen får ej ökas över det gränsvärde, som bestämmes av vridfältets förmåga att föra med sig rotorn. Överstiger belastningen detta värde, bringas motorn under starka mekaniska påkänningar och induktionsströmstötar ur funktion. Den måste då ånyo startas.

Meddelande från Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning.

Årsmötet 7—8 januari 1943.[1]

Föreningens årsmöte var denna gång förlagt till Göteborg, där ett 80-tal medlemmar mött upp, då ordföranden, lektor WETTERBLAD, kl 10 fm öppnade årsmötesförhandlingarna i den fysiska hörsalen till Nya Chalmers. Protokollet från föregående årsmöte samt styrelseberättelsen för år 1942[2] upplästes och godkändes. Revisionsberättelsen upplästes, och styrelsen och skattmästaren beviljades ansvarsfrihet för föregående års förvaltning. Därefter skedde val av funktionärer. Till ordförande omvaldes lektor TORSTEN WETTERBLAD, och av den övriga styrelsen omvaldes samtliga utom överste C. ÅRMANN, som under året avgått som chef för AIHS. I hans ställe valdes till ledamot av styrelsen lektor MARTIN SÖDERMAN, Göteborg. Förutvarande revisorer — inspektör E. HEDFORS och rektor M. KOLMODIN — och revisorssuppleanter — adjunkterna V. CARLSSON och S. COMÉT — omvaldes.

Som nästa punkt på årsmötets program följde ett föredrag av docent OLOF RYDBECK, betitlat: »Något om jonosfärens fysik». Intresserade hänvisas till årets Kosmos, där docent Rydbeck publicerar en uppsats i samma ämne. Efter föredraget begåvo sig mötesdeltagarna till

Statens skeppsprovningsanstalt,

där driftsingenjör RAGNAR RÖDSTRÖM först gav en kort orientering över anstaltens tillkomst och arbetsuppgifter och sedan ledde en intressant demonstration i provningsrännan.

Skeppsprovningsanstalten är en statlig institution. Den uppfördes åren 1937—1940 och togs i bruk hösten sistnämnda år. Anstalten har till uppgift att för det allmännas och enskildas räkning samt i vetenskapligt syfte utföra provningar och undersökningar rörande problem av betydelse för skeppsteknik och sjöfart. Den tjänar även undervisningen vid Chalmers tekniska högskola.

[1] Tidigare medd. från föreningen återfinnas i Elementa *16*, 226, 1933; *17*, 46 och 113, 1934; *18*, 42 och 47, 1935; *19*, 36, 1936; *20*, 42 och 133, 1937; *21*, 47, 1938; *22*, 45 och 113, 1939; *23*, 41 och 234, 1940; *24*, 38 och 89, 1941; *25*, 38 och 153, 1942.

[2] S. 47.

Provningarna utföras med modeller av fartyg och propellrar. Fartygsmodellerna som för vanliga handelsfartyg böra ha en längd av minst 6 m, framföras därvid antingen för egen maskin eller släpas fram i en vattenränna med en viss hastighet, varvid man systematiskt studerar motståndet. Med modellförsök kan man på empirisk väg undersöka motståndsproblemet för olika fartygstyper, vilket man för närvarande ej behärskar matematiskt. Man har på detta sätt nått värdefulla praktiska resultat. Provningarna utföras än så länge endast i lugnt vatten, men man har för avsikt att vidtaga anordningar för att kunna utföra prov även i av vågor upprört vatten, varigenom man kan vinna kunskap om ett fartygs sjövärdighet. Stundom undersöker man även strömlinjernas förlopp längs fartygskroppen vid viss fart och visst djupgående. Man bestryker modellen med färgränder längs ett lämpligt antal spantlinjer och kör sedan, innan färgen hunnit torka, modellen med den önskade farten. Färgen flyter då ut i strålar, som ge en tydlig bild av strömlinjernas förlopp. Vid släpförsöken fäster man modellen vid en tråd, så att drivkraften kommer att verka i propelleraxelns riktning. Modellen drages med en löpvagn, som körs över rännan på räls, lagda på rännans kanter. På löpvagnen befinner sig vågen, varmed motståndet väges ut, ävensom övriga instrument samt personal. Vid försök med självdrivna modeller styr man modellen från löpvagnen, under det att självregistrerande mätinstrument äro placerade i modellen. Man utför även försök med frigående propellrar och studerar propellerbladens hydrodynamiska egenskaper.

Från början hade man tänkt sig att tillverka modellerna av paraffin. Kriget har dock medfört svårigheter att anskaffa paraffin av lämplig kvalitet, och inte heller har man kunnat få hem en i England beställd fräsmaskin, avsedd för utformning av de gjutna modellerna. Man måste därför tills vidare utföra modellerna i trä, vilket är dyrare och tar längre tid. Modellverkstaden är omedelbart förbunden med den imponerande vattenrännan, som är 260 m lång, 10 m bred och 5 m djup. Rännan är byggd av armerad betong och rymmer ca 12 500 m^3 vatten. Kostnaden för att fylla rännan med vattenledningsvatten uppgår till den respektabla summan av 3 500 kronor. För att slippa ombyte av det dyrbara vattnet har man vidtagit vissa åtgärder, som gå ut på att förhindra uppkomsten av växtlighet i vattnet. Så t. ex. ha fönstren placerats på rännbyggnadens nordostsida, varigenom man undviker solbelysning av vattnet, och vidare har man anskaffat ett filter för periodisk rening av vattnet.

Löpvagnen är gjord av svetsade stålrör och väger med instru-

ment och personal ca 14,5 ton. Den uppbäres av fyra hjul, 1,4 m i diameter. Dessa drivas separat av var sin motor på 26 kW (vid 1 100 varv/minut). För att förhindra varje tendens till snedgång hos vagnen har man seriekopplat motorernas ankare, så att det drivande momentet blir lika stort på alla fyra hjulen. Rälsen, varpå vagnen köres, har lagts med utomordentlig precision för att nedbringa vibrationerna. Avståndet mellan de två rälsbanorna är 10,6 m ± 0,1 mm. Med samma noggrannhet är rälsbanan lagd i vågrät linje, och den följer exakt jordens krökning. Denna är så pass avsevärd, att tangenten till mittpunkten av den 260 m långa rälsbanan ligger 1,5 mm över rälsbanans ändpunkter. Vid avvägningen har man inte kunnat använda vattenytan i rännan som utgångspunkt, då det alltid råder en viss vågrörelse på denna. Även under dagar då det är absolut vindstilla, ha vågorna i bassängen en höjd av 0,1—0,2 mm. Som mätbas har man i stället använt en serie smala rännor, utlagda efter vardera rälssträngen, alla inbördes förenade med gummislangar.

Löpvagnens hastighet kan varieras från 0,028 till 14 m/sek. Maximalhastigheten är alltså 50 km/tim. Detta betyder, att en modell i skalan 1:4 kan framföras med en fart, motsvarande 55 knop, och i skalan 1:9 80 knop. Löpvagnens maximalhastighet uppnås först 90 m från startpunkten, och de sista 45 meterna av banan åtgå till inbromsningen. Därvid lyftas hjulen från rälsen och vagnen glider på »bromsskorna» mot bromsskenor vid sidan av rälsen.

Modellen åstadkommer vid körningen ett praktfullt vågsystem på vattenytan. För att nedbringa tiden som åtgår för att de mot rännans väggar reflekterade vågorna skola lägga sig — den uppgår till ca 15 minuter — har man anbragt en s. k. vågfälla vid rännans bortre ände. Framför vågfällan avtar vattendjupet såsom vid en långgrund strand, och vågkammarna gå sedan över en nivåkant (i lugnvattenhöjden) ned i en brunn, varifrån vattnet åter pumpas upp i rännan.

Bland instrumenten märkes främst motståndsdynamometern, som är en kombinerad vikt- och fjäderdynamometer. Släpmotståndet utväges med vikter så när som på ca 1 kg, vilket upptages av en fjäder. Motståndet registreras i form av ett diagram på en roterande trumma. Motståndsvariationerna utjämnas medelst oljedämpning. Även tiden (i sekunder) och vägen (var 2:a eller 4:de meter) registreras i diagrammet. Motståndsdynamometern kan mäta ett maximalt släpmotstånd av 50 kgf.

Styrningen av modellen sker i för och akter med s. k. trimapparater, som äro förenade med modellen medelst kardanknutar.

Vid försök med propellerdrivna modeller och frigående propellrar mätes propellertryckkraften och propellermomentet med en propellerdynamometer. Propellervarvtalet mätes med en tachometer.

Intresserade hänvisas i övrigt till en av ingenjör Rödström författad uppsats om provningsanstalten i årets Kosmos.

Efter gemensam lunch på Järntorgsrestaurangen samlades deltagarna i ännu en nybyggd och modern institution, nämligen det för donationsmedel från Knut och Alice Wallenbergs stiftelse uppförda

Oceanografiska institutet.

Ciceron var här docent Börje Kullenberg, som förevisade institutets olika avdelningar och redogjorde för dess arbete. Bland de oceanografiska forskningsuppgifterna märkas undersökning av havsvattnets struktur (vattenlagrens temperatur, salthalt, specifika vikt m. m.), havets dynamik, vari ingår studiet av de submarina böljor som uppträda på gränsen mellan vattenlager av olika spec. vikt, mätningar av det submarina dagsljuset och havsvattnets radioaktivitet m. m. Det nyuppförda institutet har tillfört denna forskning ett antal väl utrustade, centralt belägna laboratorier. Sålunda har man där även kunnat taga upp studiet av det första och grundläggande ledet i havets produktionscykel, ursyntesen av organisk substans genom havets mikroskopiska växtvärld, dess fytoplankton. Betydelsen av dessa undersökningar framgår därav, att man har skäl att antaga, att mängden av och framför allt tidpunkten för den s. k. planktonblommen har avgörande betydelse för det vid samma tid nykläckta fiskynglet. Ända från källaren, upp genom byggnadens fyra våningar sträcker sig det 12 m djupa planktontornet. Det har en inre diameter av 2 m och rymmer 37 m^3 vatten. Tornet är huvudsakligen avsett för odling av växtplankton samt försök med djurplankton och fisklarver. Inuti är tornet beklätt med en isolerande gummimassa, som är oskadlig för havets mikroorganismer. Hittills har kriget förhindrat det planerade hemförandet av havsvatten från Biskayabukten. Vattnet som pumpas in i tornet, filtreras och steriliseras med ultraviolett ljus från en i pumpledningen inbyggd kvartslampa. För att få en belysning av dagsljuskaraktär, vilken är nödvändig för planktonalgernas assimilation, har man över tornets krön anbragt två kvicksilver- och fyra natriumlampor jämte reflektorer med en sammanlagd ljusstyrka av 140 000 lumen. De hydrodynamiska undersökningarna utföras i en 17 m lång, 2 m bred och 1 m djup vattenränna i första våningen. Rännans

väggar äro liksom planktontornets belagda med gummimassa. Genom åtta större rutor av tjockt spegelglas kan man fotografera vågor, strömningar, undervattensböljor m. m. I det hydrodynamiska laboratoriet förevisade docent Kullenberg vidare ett av de på institutet efter en helt ny princip konstruerade vakuumloden. Instrumentet är avsett för upptagning av havssediment från stora oceandjup, men på grund av kriget ha upptagningar hittills endast kunnat göras i några svenska västkustfjordar. Man har lyckats taga upp sedimentproppar av mer än 8 m längd (mot förut högst 3 m). Vakuumlodet består av ett stålrör av 60 mm invändig vidd, upptill hermetiskt anslutet till en vakuumkammare i form av en sfärisk behållare av specialhärdat gjutjärn med 3 cm godstjocklek och en inre diameter av 35 cm. Dess rymd är 22,5 liter och lika stor som rörets volym för de längsta hittills uppmätta rörlängderna, 8,5 m. Vakuumkammaren är avstängd från röret med en tätt slutande kolv, som hålles kvar på sin plats av tre spärrtappar av stål. Då röret sändes ned till bottnen, är det fyllt med vatten, och kolven utsättes underifrån för ett alltmer växande tryck. Vid rörets stöt mot bottnen lossas spärrtapparna genom en mekanisk utlösningsanordning, och kolven slungas av vattentrycket in i vakuumkammaren. För att nu inte bottensedimentet skall explosionsartat slungas upp i röret, när passagen in till vakuumkammaren blir fri, finns under kolven i rörets övre ände en bromsventil, som släpper in vatten i vakuumkammaren med precis samma hastighet som röret tränger ned i bottensedimentet. Vattentrycket räcker mer än väl till att övervinna friktionsmotståndet mellan det inträngande sedimentet och rörets vägg. Inuti det yttre stålröret är ett mässingsrör av 50 mm invändig vidd inskjutet, i vilket sedimentproppen tages upp och varur den sedan kan tagas ut i oskadat skick.

Efter besöket på Oceanografiska institutet hade mötesdeltagarna beretts tillfälle att se Göteborgsläroverkens fysiska och kemiska institutioner, där resp. institutionsföreståndare voro ciceroner. Den ej så litet ansträngande dagen avslutades med gemensam middag och samkväm på Lorensbergs restaurang.

Fredagens program inleddes med ett besök på AB Kullager. Rundvandringen genom fabriken tog halvannan timme i anspråk, och deltagarna fingo i väsentliga delar följa tillverkningen av ett kullager. Det som särskilt imponerar på såväl lekmannen som fysikern är att det över huvud taget är möjligt att driva en massfabrikation av de mått det här rör sig om, med så oerhört hög grad av precision. I SKF:s fabriker i Göteborg tillverkas

dagligen ca 55 000 kullager och 1 000 000 kullagerkulor. Varje kula och kullagerring underkastas en upprepad och minutiös kontroll, där toleransen rör sig om 0,001, ja 0,0001 mm. Fabriksbesöket kompletterades med en förevisning på gamla Chalmers av den vackra och instruktiva SKF-filmen.

En diskussion över elektrotekniken i skolan

var sista punkten på programmet. Inledarna hade valt speciella områden för sina föredrag; lektor Alf Heimer »Om elektricitet och magnetism» och docent Thomas Öfvergaard »Elektricitetsläran på gymnasiet». Det senare kommer att införas i Elementa. Inledningsanförandena bjödo på nya, intresseväckande synpunkter, vilka — såsom ordföranden efteråt framhöll — man behöver tid på sig för att fatta ståndpunkt till. De efterföljande diskussionsinläggen blevo också få och rörde sig mest om metodiska frågor.

Docenten Öfvergaard gjorde först själv ett diskussionsinlägg angående elektriciteten på gymnasiet. Talaren ansåg, att man inte skulle driva växelströmsläran längre än till att omfatta strömvändning och periodtal. Allt annat som läses om växelströmsmaskiner saknar allmänt bildningsvärde och bör slopas.

Rektor S. E. Ohlon ansåg, att tekniska detaljer inte böra tagas upp i läroverkens kurs, vars huvudsyfte bör vara att klarlägga de teoretiska grundbegreppen. Dock äro exempel från elektrotekniken värdefulla för att belysa framställningen. De elektrotekniska tillämpningarna verka stimulerande på eleverna, då ju elektriska maskiner användas i dagligt bruk. Man måste påpeka för eleverna de svårigheter och risker som äro förbundna med användningen av sådana maskiner. Men man får inte driva elektrotekniken för långt; tendenser i sådan riktning ha visat sig.

Lektor Börje Svensson vände sig mot den av docent Öfvergaard i inledningsanförandet skisserade metodiken i fysikundervisningen, d. v. s. avsikten med skolförsöken och deras anordnande. Enligt undervisningsplanen skola fysiklagarna i regel härledas ur försök. Docent Öfvergaard ville först deducera lagarna och sedan belysa dem med försök. Den förra metoden är den bättre, men den tar längre tid. Man får gå en medelväg. När tiden medger det, bör man härleda lagen ur försök, i andra fall får man nöja sig med att belysa lagen med försök.

Docent Öfvergaard frågade, vad det är som sker, när läraren gör ett experiment. Visar han lagen eller lägger han försöket tillrätta så, att det passar för lagen? Är det sant, att läraren är en forskare, som finner lagarna ur sina försök, eller är han det inte och utför endast försöken i avsikt att belysa lagarna?

Rektor Ohlon antydde hur det går till, när kurserna utvidgas. Det händer att somliga censorer kräva vissa bestämda detaljer vid förhören i studentexamen. Läraren böjer sig ofta för kraven och utvidgar kursen med dessa detaljer. Lärarna böra säga ifrån, huruvida de förelagda ämnena falla inom kursen eller i dess utkanter. Angående experimentet vid undervisningen ville talaren säga, att docent Öfvergaard i sin undervisning hade att göra med folk, som hade elektricitetsläran till livsuppgift och som lärt sig att tänka elektriskt. Men talaren frågade sig, om det är möjligt att bygga upp en föreställningsvärld på detta sätt för pojkar och flickor i våra gymnasier. Det är sant, att läraren inte går tillväga på samma sätt som forskaren, den förre vet ju redan svaret. Men för eleven, som inte vet vad resultatet skall bli, innebär försöket en verklig upptäckt. Försök och lärjungelaborationer äro en tillgång från Molls dagar. Läroböcker före Moll tillämpade docent Öfvergaards framställningsmetod. Som åskådningsmaterial användes då mest krita och pekpinne. Men de resultat som vanns med dessa medel, kunna inte mäta sig med resultaten av våra metoder. Det värdefulla i docent Öfvergaards kritik, som vi äro honom tacksamma för, är att han understrukit nödvändigheten av enhetlighet vid behandlingen av de elektriska fenomenen. I själva verket kan hela detta problemkomplex elementärt behandlas med tillhjälp av tumregeln (lillfingerregeln) och energiprincipen.

Professor E. Rudberg ville inte gå in på en detaljgranskning av inledningsanförandet. Många synpunkter däri voro trevliga. Det finns dock en del svårigheter, som läroboksförfattare måste ta hänsyn till. Mekaniken måste t. ex. behandlas *efter* elektricitetsläran. Den borde dock komma före. Docent Öfvergaard yttrade, att man måste ta fram *vad som sker*, d. v. s. det elektronfysikaliska förloppet. Men det går inte att komma fram enbart på denna väg. Potentialbegreppet är ju ett arbetsbegrepp och skall enligt inledaren användas som det definieras. Men det visar sig inte alltid praktiskt. Så användes det exempelvis i Ohms lag utan samband med arbetsbegreppet. Talaren reagerade mot att skilja mellan så många olika slags »krafter». Uttrycket »levande kraft» hade talaren undvikit i sin lärobok. Däremot måste nog uttrycket »elektromotorisk kraft» bibehållas, vilket är desto lättare som man vanligen skriver EMK.

Docent Öfvergaard och professor Rudberg hade så en replikväxling angående innebörden i begreppen aktion och reaktion. Frågan gällde, om man kan tänka sig andra krafter än elektriska, då elektroner hejdas. Professor Rudberg ansåg, att docent Öfver-

gaards reaktionsspänningar ej voro fysikaliska men väl praktiska ur ledningsteknisk synpunkt. Hur skall man exempelvis kunna se något fysikaliskt i den reaktionsspänning som enligt docent Öfvergaards betraktelsesätt borde motsvara anodförlusten i ett radiorör?

Lektor Heimer varnade för att framställa elektricitetsläran elektronfysikaliskt, då man faktiskt inte vet, vad en elektron är. Man måste vara ytterligt försiktig. Talaren varnade vidare för populärvetenskapliga böcker, vilka docent Öfvergaard rekommenderat, därför att de ge en »frodig fantasi». De populärvetenskapliga böckerna förstöra elevernas förmåga att tillägna sig en riktig föreställning.

Docent Öfvergaard: »Men dom är roliga» (skratt).

Lektor Wetterblad. Vad som gör det så svårt att genomföra en riktig lärogång är att de olika partierna ha så olika svårighetsgrad. Man försöker dock bygga upp en logisk tankegång, men den blir så svårsmält. Man måste ofta ta till mekaniska åskådningar. Det vore därför bra att kunna räkna med större mekaniska kunskaper vid genomgången av vissa partier av elektricitetsläran. Men mekaniken fordrar mycket matematik. Ett sätt vore att koncentrera matematiken till ett tidigare stadium och fysiken till ett senare. Talaren hade ingen anledning att nu skissera något program härför och ville endast kasta fram tanken. Talaren fann det nuvarande systemet med tillvalsgrupper mycket beklagligt för kunskaperna i fysik. De s. k. »epagrupperna», som t. ex. för Stockholmsläroverken omfatta ca 20 % av eleverna på realgymnasiet, få knappast någon uppfattning av central, modern fysik. De läsa ingen optik och ingen vågrörelselära och av elektricitetsläran endast elektrostatik och elektrodynamik fram till Joules lag. Docent Öfvergaard hade berört användningen av skolfilm vid fysikundervisningen. Tyvärr finns det endast ett fåtal svenska fysikfilmer, och det är svårt att få tag i goda tecknare. Talaren ville instämma med lektor Heimer i hans skepsis beträffande den populärvetenskapliga litteraturens värde för elever på gymnasiet. Det är knappast lämpligt att i läroböckerna ge generella anvisningar på sådan litteratur. Däremot bör man allt efter elevernas speciella förutsättningar ge dem anvisningar på lämpliga böcker.

Till sist framförde ordföranden styrelsens och föreningens tack till mötesbestyrelsen i Göteborg, främst då till dess verkställande ledamot, lektor Martin Söderman. Mötet hade varit väl planerat och givit många värdefulla uppslag, och det var talarens förhopp-

ning, att det skulle kraftigt stärka arbetet för vårt gemensamma mål, de matematisk-naturvetenskapliga ämnenas bästa. Därmed förklarade han årsmötet 1943 avslutat.

Bror Gustaver.

Styrelseberättelse för år 1942.

Styrelsen har under året bestått av 21 personer, av vilka följande 5 även tillhört arbetsutskottet: lektor T. Wetterblad, ordförande, lektor A. Uhler, v. ordf., lektor B. Gustaver, sekreterare och skattmästare, adjunkt E. Sandén och adjunkt S. Åstrand, samtliga från Stockholm. Övriga medlemmar i styrelsen ha varit: rektor A. Björkeson, Stockholm, fil. lic. I. Bolin, Stockholm, lektor K. Dahr, Göteborg, lektor G. Funke, Stockholm, lektor E. G. Hjalmar, Stockholm, lektor C. Lönnqvist, Södertälje, rektor G. Mikaelsson, Stockholm, rektor A. Nordhult, Stockholm, rektor P. G. Persson, Malmö, lektor Eva Ramstedt, Stockholm, lektor G. Starck, Stockholm, docent B. Svensson, Lund, rektor B. Söderborg, Stockholm, rektor Lilly Tengnér, Stockholm, adjunkt B. Wahlström, Stockholm, överste C. Ärmann, Stockholm.

Föreningen höll sitt ordinarie årsmöte den 7—8 januari på Tekniska högskolan, Stockholm. Redogörelse över årsmötet finns införd i Elementa 25: 1 1942, och särtryck därav ha tillställts föreningens samtliga medlemmar.

Styrelsen har under året haft 5 och arbetsutskottet 4 sammanträden. Dessutom har sekreteraren haft ett sammanträde med en delegation i Göteborg angående årsmötet 1943. Av de övriga ärenden som behandlades vid styrelsens och arbetsutskottets sammanträden, må nämnas planetariefrågan (arbetsutskottet $^{31}/_{1}$ och $^{20}/_{5}$). Föreningens initiativ i denna fråga resulterade i 6 visningar av planetariet, tillsammans besökta av omkring 1500 elever från h. allmänna läroverk, realskolor och flickskolor i Stockholm och närmaste omgivning. Styrelsen har också genom sin ordförande och sekreterare muntligen och skriftligen framfört föreningens önskningar i planetariefrågan till borgarrådet Oskar Larsson. Tills vidare synes planetariets bibehållande vara säkrat, då Stockholms stadsfullmäktige för år 1943 anslagit 1000 kronor till detsamma.

Föreningen har i samarbete med Folkuniversitetsföreningen anordnat en sommarkurs i allmän elektricitetslära och elektroteknik den $^{27}/_{7}$—$^{8}/_{8}$. Redogörelse för kursen finns införd i Elementa 25: 3 1942, och särtryck därav ha sänts ut till föreningens medlemmar.

Arbetsutskottet och styrelsen ha diskuterat frågan om ett upprepande av årets sommarkurs i fysik under sommaren 1943 i samarbete med Folkuniversitetsföreningen och Sveriges allmänna folkskollärarförening, och styrelsen har ställt ett belopp av 500 kronor till disposition under förutsättning, att Sveriges allmänna folkskollärarförening även bidrar med 500 kronor och Folkuniversitetsföreningen med 1000 kronor.

Vid styrelsesammanträde den $^{21}/_{12}$ beslöt styrelsen att sända en skrivelse till Folkuniversitetsföreningen med begäran, att denna ville i samarbete med Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning anordna en sommarkurs i kemi för lärare under sommaren 1944.

Under året har styrelsen startat en pedagogisk skriftserie, varom meddelande sänts ut till föreningens medlemmar.

Liksom föregående år har styrelsen sänt ut PM från undervisningsråden R. Lundblad och C. E. Sjöstedt till ledning vid rättningen av vårens studentskrivningar i fysik och matematik samt de matematiska uppgifterna i realexamen.

Medlemsantalet i föreningen var vid årsskiftet 1942—1943 605, vilket betyder en ökning från föregående år med 46. Under året ha 6 medlemmar avlidit, 7 övergått till avdelningen i Lund, 15 utträtt ur föreningen och 74 nya medlemmar ingått i densamma.

Stockholm den 31 december 1942.

Torsten Wetterblad
Ordförande

Bror Gustaver
Sekreterare

Bokanmälningar.

H. Bergström, *Algebraisk analys o. differential- o. integralkalkyl med tillämpningar*, för fil. kand.- och fil. ämbetsexamen, Lundequistska bokhandeln, Uppsala 1942, dupl., 508 s., kr. 26: —.

Detta kompendium uppfyller höga krav. Framställningen är matematiskt sträng, klar och även ur pedagogisk synpunkt lyckad. Ett stort antal övningsexempel av lämplig svårighetsgrad äro medtagna. Det första kapitlet innehåller en framställning av teorin för irrationella tal, talföljder, gränsvärdesbegreppet, serier m. m. På den solida grund som här lägges bygger sedan den följande framställningen, som omfattar differential- och integralkalkyl för en och flera variabler, teorin för oändliga serier och produkter, teorin för plana kurvor samt något om teorin för funktioner av komplex variabel. — Det återstår att se, om de nämnda goda egenskaperna

förmå uppväga den lätt deprimerande verkan, som själva kompendieformen alltid har på läsaren. Därom få vi överlämna åt studerandena själva att döma. Men säkert äro de tacksamma för denna liksom för andra lättnader i den svåra situationen på läroboksfronten, som av kriget ytterligare accentuerats.

Hans Rudberg.

Matematisk problemsamling: Tentamensproblem, givna vid Lunds universitet; 1-betygskursen (41 s., kr. 5:—) och 2-betygskursen 55 s., kr. 5:50) andra uppl., Lunds studentkårs intressebyrå.

De duplicerade problemsamlingar, väsentligen innehållande tentamensproblem, som för ett par år sedan utgåvos i Lund, ha nu utkommit i tryck.

1-betygskursen har undergått en grundlig omarbetning. Problemen ha grupperats om så, att samhörigheten mellan dem mera framträder. Antalet problem har kraftigt utökats; den nya upplagan innehåller 250 uppgifter mot 175 i den förra.

2-betygssamlingen är relativt mindre förändrad. Några problem ha även här omgrupperats och c:a 20 nya ha tillkommit. Antalet uppgifter rörande determinanter, som i förra upplagan var obetydligt, har framför allt ökats.

Om båda samlingarna gäller fortfarande, att de böra vara en god hjälp för de matematikstuderande vid högskolorna.

Arvid Uhler.

Carl Drucker, *Atomen.* Studentföreningen Verdandis Småskrifter 450. Bonnier, Stockholm 1942. 66 sid., pris kr. 1:50.

En för den bildningssökande allmänheten avsedd svensk framställning av atomteorien på dess nuvarande ståndpunkt har länge saknats. Så till vida är det tillfredsställande, att med Verdandis Småskrifter införlivats ovan angivna lilla arbete, som på 66 sidor ger en koncentrerad, men lättläst framställning av det vidlyftiga ämnet. Dock vill man göra den anmärkningen, att förf. har lagt för stor vikt vid atomens äldre historia och att han upptagit till diskussion felkällorna vid atomviktsbestämningar. Denna del, som för en populär framställning av atomteorien är av föga intresse, har fått ett oproportionerligt stort utrymme. Som en beklaglig brist måste man också påtala den fullständiga avsaknaden av illustrationer. Framställningen är vederhäftig; dock säges på sid. 54, att ordningstalet är proportionellt mot våglängdens kvadratrot, skall vara kvadratroten ur svängningstalet.

G. Starck.

Åke Wallenquist: *Tvillingsolar och stjärnhopar.* Verdandis småskrifter n:r 448, Albert Bonniers förlag, Stockholm, 1942. 64 sid., kr. 1: 50.

Docenten Åke Wallenquist, som redan tidigare flera gånger dokumenterat sig som en populärvetenskaplig författare av rang, har ånyo berikat den populärastronomiska litteraturen med en synnerligen läsvärd liten volym. Han har denna gång valt att i mycket lättläst stil ge en framställning av huvuddragen i vår kunskap om dubbelstjärnor och stjärnhopar.

Efter att inledningsvis ha pekat på de sammangyttringstendenser hos stjärnorna, som man blir varse redan vid ett flyktigt studium av himlen, utreder författaren begreppen optiska och fysiska dubbelstjärnor och presenterar därefter de tre olika slagen av fysiska dubbelstjärnsystem, visuella, spektroskopiska och fotometriska. Härefter följer en redogörelse för de mera allmänna och lättillgängliga av de astrofysiska och stellarstatistiska resultat, som studiet av dubbelstjärnorna lett till. Så behandlas i olika avsnitt stjärnornas massor, dubbelstjärnornas ställning i stjärnsystemet och de olika hypoteserna för dubbelstjärnornas uppkomst och utveckling. I de multipla stjärnorna får författaren en naturlig övergång från dubbelstjärnorna till stjärnhoparna, som bokens senare del ägnas. Här beskriver författaren först de mera kända av de s. k. rörliga stjärnhoparna, särskilt Hyad-driften, och skisserar därefter de öppna stjärnhoparnas allmänna egenskaper, deras Hertzsprung-Russell diagram, avstånd och fördelning i rymden, och likaså de klotformiga stjärnhoparnas karaktär, avstånd och rymdfördelning. Slutligen beröres också i korthet frågan om stjärnhoparnas kosmogoni. — Den lilla boken, som är utmärkt illustrerad bl. a. med flera helsidesplanscher, kan livligt rekommenderas som en första introduktion i de delar av stellarastronomien, den behandlar.

Jöran M. Ramberg.

Iwan Bolin, *I kemistens verkstad.* Tidens förlag 1942, 191 s., kr. 6: 50.

Från guldmakarkonst till kemisk vetenskap, det levande livets kemi, den kemiska »livskraften», kemien i konkurrens och i samverkan med naturen, växten som kemist, konstgjord kautschuk, bakelit och andra konstmassor, levande och död materia äro bokens lockande kapitel, där den välkände författaren och uppburne föreläsaren med mästarhand serverar valda delar av kemien i den mest aptitretande form, kryddade av ett stort antal trevliga och aktuella illustrationer.

Boken, som utgör en bearbetning av en serie radioföredrag sommaren 1941, leder oss med ett direkt och målande språk in på de intressanta upptäckter och spännande problem som kemien just nu brottas med och visar oss i livliga drag hur långt denna vetenskap hunnit inom de områden som mest intressera den bildade och tidningsläsande allmänheten av i dag. En i högsta grad läsvärd bok, idealisk att sätta i både lärares och elevers händer för att göra undervisningen aktuell och stimulera till självstudier.

Ett störande tryckfel (s. 78) bör påpekas: C-vitaminets uppgivna pris, 2 kr, gäller ej per kg utan per gram.

E. Nordefeldt.

Hessel—Martin—Hessel, *Chemistry in Warfare.* Hastings House, New York 1940, kr. 10:55.

Kemiens betydelse för krigföringen tages här i mycket vidgad betydelse och omfatttar även födande, klädande, skyddande och transporterande av soldaterna samt framställande av vapen, maskiner, sprängämnen och stridsgaser. Boken lämnar en hel del siffermaterial och tekniska detaljupplysningar, som mer torde intressera militärer än kemister, men såsom exponent för kemiens framträdande andel i den stora utveckling som hithörande industrier numera nått kan boken vara av intresse för en ingenjörtekniskt intresserad läsare.

E. Nordefeldt.

Bonniers Konversationslexikon, band VII, Stockholm 1942, hfrb. kr. 21:—.

Detta sjunde band omfattar *Ihre-Klövedal* och upptager 1462 spalter jämte 10 planscher och 4 kartor. Bland de naturvetenskapliga artiklar, som här äro av intresse, må nämnas: *Indikator, Induktion, Integral, Interferens, Isomeri, Jonisering, Jorden, Jordmagnetism, Järn, Järnföreningar, Kadmium, Kalcium, Kalium, Kalorimetri, Kamera, Kanalstrålar, Kapacitet, Kapillaritet, Katalys, Kaustika, Kemi, Kemisk analys, Kikare, Kinetiska gasteorin, Kisel, Klor.*

Rec. har ej observerat några fel av nämnvärd betydelse.

J. Tandberg.

Tidskrifter.

Populär astronomisk tidskrift, 1942: 3—4.

Ur innehållet: Å. Wallenquist, Om fotografiska färgindices; T. Elvius, Den nya stjärnan i Svanen 1942; N. V. E. Nordenmark, Olof Hiorter; A. Wallenquist, Variabla stjärnor av U Germinorum-typ och deras samband med Novae; Y. Öhman, Astrofysiska mätningar över väteatomens kontinuerliga spektrum.

Svensk kemisk tidskrift, 1942: 11—12; 1943: 1.

Ur innehållet: L. Bettelheim, Über die Ermittlung des Phenol- und Kresolgehaltes in phenolhaltigen technischen Kresolen für die Erzeugung härtbarer Kunstharze; H. Willstaedt, Studien zur Chemotherapie der Tuberculose; K. H. Gustavson, Behavior of collagen in combination with tanning agents toward trypsin; T. Ekstrand, Sulfanilamidderivat med elektromera substituenter vid amidokvävet; S. Arrhenius, Serumproteinernas dipolelement.

Populär radio, 1942: 9—12; 1943: 1.

Ur innehållet: De ultrakorta vågornas utbredning; Rummets form och dess inverkan på akustiken; Räknemetoder vid växelströmkretsar — räkning med $j\omega$; Nätlikriktarens verkningssätt; Hur radioteknik studeras vid amerikanska universitet.

Ljuskultur, 1942: 3—4.

Ur innehållet: När elljuset kom till Stockholm; Synen och färgseendet; Lysämneslampor som ljuskälla vid fotografering; Lysämneslampor i hörsalar; Belysningsteknisk rationalisering; En anordning för färgbedömning i USA.

Teknik för alla, 1942: 48—52; 1943: 1—8.

Ur innehållet: Svalöv; Arvika-verken; Svensk kraftförsörjning; De gamla mästarnas oljefärger; Evighetsuret på Carlsund; Skogen ger; C. W. Scheele; Från Tekniska museets utställning »Teknik i miniaty»; Dynamit; Månen; Julstjärnan; »Hembygdsforskning» i världsrymden; Miniatyrmotorer; Den piezoelektriska effekten; Elektronmikroskopet; Götaverken. Fr. o. m. nr 48 ingår som »följetong» en teknisk ordbok, där förekommande definitioner granskats av prof. H. Faxén, prof. H. Alfvén och fil. lic. I. Bolin. Omfattar: Absolut måttsystem — dragskåp.

Nordisk Astronomisk Tidsskrift, København 1942: 4; 1943: 1.

Ur innehållet: Y. Öhman, Om ljusets polarisation och dess användning inom astronomisk forskning II; L. Hansen, Dimensioner; J. P. Møller, Kometerne; B. Edlén, Tydningen av de ljusa linjerna i solkoronans spektrum; H. Spencer Jones, Solparallaksen og Maanens Masse etc.; Å. Wallenquist, Solsystemets kosmogoni; H. Shapley, Metagalaktiske Problemer.

Naturen, Bergen 1942: 9—12; 1943: 1.

Ur innehållet: L. Harang, Jordens magnetiske felt og det sekulære variasjon; I. Ruud, Bør vinterens temperaturforhold søkes karakterisert ved et enkelt tall?; K. F. Wasserfall, Den magnetiske nordpol; K. Fægri, Klimahistorie og arkeologi; A. Røed, Vannet bryter ned på et sted — og bygger opp på et annet sted; B. Trumpy, Isaac Newton; S. Einbu, Vårt univers; A. Kvale, Geologisk tidsregning.

(Forts. s. 56)

Problemavdelning.[1]

Matematiska uppgifter.

1261) *I en tresidig pyramid äro sidokanterna l cm, baskanterna a, b och c cm. I topphörnet är kantvinklarnas summa 360°. Visa, att* $a^2 + b^2 + c^2 = 8l^2$. *X.*

1262) *Visa, att enveloppen för de kordor i en konisk sektion, som halveras av en rät linje, är en parabel.* *N. J.*

1263) *Visa, att tangeringspunkterna för de gemensamma tangenterna till två cirklar ligga på en hyperbel.* *N. J.*

Enklare matematiska uppgifter.[2]

1264) Lös ekvationen $\binom{n}{m-1} + \binom{n}{m+1} = 2\binom{n}{m}$.

Med $\binom{n}{m}$ menas koefficienten för $a^{n-m} \cdot b^m$ i utvecklingen av $(a+b)^n$.

Svar: $n = a^2 - 2$; $m = \frac{1}{2}(a+1)(a-2)$ eller $\frac{1}{2}(a-1)(a+2)$, där a är ett godtyckligt helt tal större än 2.

1265) Angiv sambandet mellan x och y, om $x = \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t+1}$ och $y = \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t$.

Svar: $x^y = y^x$.

1266) Genom logaritmering av ekvationerna $xy = z$, $xz = y$, $yz = x$ erhålles en lösning: $x = y = z = 1$. Vart ta de andra lösningssystemen $x = y = z = 0$, $x = y = -1$ $z = 1$ m. fl. vägen?

Svar: De tillhöra talområden, där de använda logaritmlagarna icke gälla.

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. Bågman, till vilken uppgifter och lösningar kunna insändas under adress: Högre allm. läroverket å Östermalm, Stockholm.

[2] Uppg. 1264—1266, 1269, 1271—1272 äro insända av *N. J.*, 1267—1268 av *Ingre*, 1270 av *B. W.*, 1273 av *S. B.*

1267) I en triangel är en sida a, de in- och omskrivna cirklarnas radier resp. r och R. Beräkna ytan.

Svar: $\frac{r}{a}(a^2 + 2Rr + r\sqrt{4R^2 - a^2})$.

1268) De yttre och inre bissektriserna till vinkeln A i en triangel äro resp. a och b. Beräkna den inskrivna cirkelns radie.

Svar: $\dfrac{ab \sin \frac{A}{2}}{a + \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sin \frac{A}{2}}$.

1269) Genom en regelbunden tetraeders hörn som spetsar läggas tangentkonerna till den sfär, som tangerar alla dess kanter. Dessa koner skära varandra tre och tre i ytterligare fyra punkter, vilka äro hörn i en annan regelbunden tetraeder. Sök förhållandet mellan följande sidor i en rätvinklig triangel: normalen från sfärens centrum mot denna tetraeders kant, halva den korda som denna kant avskär av sfären samt dess radie.

Svar: 3 : 4 : 5.

1270) I en romb inskrives ett parallelltrapets, vars baslinjer äro parallella med den ena diagonalen. Visa, att dettas yta är störst, då dess höjd är hälften av den andra diagonalen.

1271) Brännpunkterna till två kägelsnitt bilda hörnen i en kvadrat och parametersekanterna skära varandra i segment med lika produkter. Angiv sambandet mellan excentriciteterna e_1 och e_2.

Svar: $e_1^2 + e_1^{-2} + e_2^2 + e_2^{-2} = 6$, om endast den ena sekantens segment äro inre; i annat fall antingen $e_1 = e_2$ eller $e_1 \cdot e_2 = 1$.

1272) I vilka trianglar är bissektrisen från ett hörn median i den triangel, som bildas av höjden och medianen från samma hörn samt motstående sida?

Svar: I likbenta trianglar med spetsen i hörnet eller trianglar, där hörnet ligger på en ellips med excentriciteten $\frac{\sqrt{2}}{2}$ och de andra hörnen som foci.

1273) Visa, att en brännpunktsradie, som är parallell med en asymptot i en hyperbel är $\frac{1}{4}$ av parametern.

Lösn. till uppg. 1232—1234.

1232) *En tangent till kurvan* $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *avskär ett segment, i vilket en rektangel inskrives. Bestäm maximum av förhållandet mellan rektangelns och segmentets ytor.* *X.*

Origo lägges i tangeringspunkten och x-axeln utmed tangenten, som bildar vinkeln ω med y-axeln. Kurvans ekv. är då $y = Ax^3 + Bx^2$ och segmentets yta $\sin\omega \int_0^{-\frac{B}{A}} y\,dx = \left|\frac{A}{4}\cdot\frac{B^4}{A^4} - \frac{B}{3}\cdot\frac{B^3}{A^3}\right|\cdot\sin\omega = \left|\frac{B^4}{12A^3}\right|\cdot\sin\omega$.

Den med tangenten parallella rektangelsidan råkar kurvan i punkterna $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_1)$, $(x_3; y_1)$. Om rektangelytan $= Y$, så erhålles $Y^2 = y_1^2(x_1 - x_2)^2\sin^2\omega = y_1^2\sin^2\omega\,[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2] = \sin^2\omega(Ax_3^3 + Bx_3^2)^2\left[\left(\frac{B}{A} + x_3\right)^2 - \frac{4}{A}\left(Ax_3^2 + Bx_3\right)\right]$ eller om indices borttagas $Y^2 = \frac{\sin^2 w}{A^2}(Ax + B)^3(Bx^4 - 3Ax^5)$, varav $(Y^2)' = -\frac{\sin^2 w}{A^2}\cdot x^3(Ax + B)^2(24A^2x^2 + 8ABx - 4B^2)$. Ekv. $(Y^2)' = 0$ ger $x_{1,2} = -\frac{B(1 \pm \sqrt{7})}{6A}$.

Då Y kommer att innehålla faktorn $\frac{B^4}{A^3}$, kunna vi sätta $A = -1$ och $B = 1$ och $\therefore (Y^2)' = -24x^3\sin^2 w(x-1)^2\left(x - \frac{1-\sqrt{7}}{6}\right)\left(x - \frac{1+\sqrt{7}}{6}\right)$.

x_1 och x_2 ge båda rektangelmax., men blott $\frac{1-\sqrt{7}}{6}$ duger. Det sökta förhållandet blir nu $\frac{(\sqrt{7}-1)^2(5+\sqrt{7})^{\frac{3}{2}}(3-\sqrt{7})^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{3888}} = \frac{7\sqrt{21} - 10\sqrt{3}}{27} = 0{,}547$.

S. B.

1233) *Ekvationen* $(\cos x - a)(\cos v - a) + \sin x \sin v = \frac{a^2 - 1}{2}$ *förutsättes ha två olika lösningar* x_1 *och* x_2. *Visa, att*

$$(\cos x_1 - a)(\cos x_2 - a) + \sin x_1 \sin x_2 = \frac{a^2 - 1}{2}.$$

X.

Ekv. är av formen $m\sin x + n\cos x = r$, där $m = \sin v$, $n = \cos v - a$, $r = a\cos v - \frac{1}{2}(a^2 + 1)$. Sättes $\operatorname{tg}\varphi = \frac{n}{m}$, erhålles $\sin(x + \varphi) = \frac{r}{\sqrt{m^2 + n^2}} = \sin t$, varav $x_1 = t - \varphi + 2\pi k$, $x_2 = \pi - t - \varphi + 2\pi k$. Man får nu $(\cos x_1 - a)(\cos x_2 - a) + \sin x_1 \sin x_2 = a^2 + \cos(x_1 - x_2) - 2a\cos\frac{x_1 + x_2}{2}\cdot\cos\frac{x_1 - x_2}{2} = a^2 - \cos 2t - 2a\sin t\cdot\sin\varphi = a^2 - 1 + 2\sin t(\sin t - a\sin\varphi) = a^2 - 1 + \frac{2r(r - a\cos v + a^2)}{m^2 + n^2} = \frac{a^2 - 1}{2}$.

E. Smn.

Även löst av *N. J.*

Trigonometriska cirkeln $x^2 + y^2 = 1$ är enl. en känd sats omskriven kring en och därmed ∞^1 polartrianglar till cirkeln $(x - a)^2 + y^2 = \frac{a^2 - 1}{2}$, ty den senares Mongeska cirkel $(x - a)^2 + y^2 = a^2 - 1$ skär cirkeln $x^2 + y^2 = 1$ under 90°. Väljes en punkt $(\cos v;\ \sin v)$ på den senare som pol, skär dess polar med avseende på $(x - a)^2 + y^2 = \frac{a^2 - 1}{2}$ cirkeln $x^2 + y^2 = 1$ i punkterna $(\cos x_1,\ \sin x_1)$ och $(\cos x_2,\ \sin x_2)$. Polaren till $(\cos x_1,\ \sin x_1)$ går genom $[(\cos v;\ \sin v)]$ och $(\cos x_2;\ \sin x_2)$. *X.*

1234) *Tangenten till en kurva i punkten P skär två fasta linjer i A och B. Konstruera tangenten i M till orten för AB:s mittpunkt M.* *X.*

De fasta linjerna a och b skära varandra i O. Konstruera P_1, som ligger harmoniskt med P i förhållande till A och B. Den sökta tangenten går genom mittpunkten till OP_1. Vi betrakta två tangenter AB och A_1B_1 (A och A_1 på a) samt den av AB_1, A_1B, a och b bildade fyrsidingen. AB och A_1B_1 råkas i Q, A_1B och AB_1 i Q_1. Enl. en känd sats ligga mittpunkterna till AB, A_1B_1 och OQ_1 i rät linje. Linjerna a och b dela därjämte QQ_1 harmoniskt. Låter man A_1B_1 tendera mot AB, erhålles lösningen. *X.*

Även löst av *E. Smn.*

Forts. från s. 52.

Fra Fysikkens Verden, Oslo, Årg. 4. 1942—43: 1—2.

Ur innehållet: C. Størmer, Lysende nattskyer; L. Harang, Ionosfæren; Chr. Finbak og O. Hassel, Om krystalliserte stoffer med »roterende» gitterbestanddeler — molekyler eller ioner; N. H. Moxnes, Den tekniske bygning av elektronmikroskopet med elektromagnetiske linser; Bokanmeldelser; Eksamensopgaver i fysikk våren 1942; E. B. Schielderop, Isaac Newton 1642—1942; E. A. Hylleraas, Om tidevannssvingninger i havområder begrenset av kontinenter; A. K. Brynildsen, En metode til titrimetrisk bestemmelse av kulldioxid i luft; E. A. Hylleraas, Robert Mayer og energilovens 100-års jubileum.

Uppsatser av matematiskt och naturvetenskapligt innehåll i följande tidskrifter under 1942.

Tidning för Sveriges läroverk: C. E. Sjöstedt, Bedömningen av provräkningen i realexamen v.t. 1941 (nr 9); K. E. Fylking, Den grundläggande kemiundervisningen (nr 24).

Folkskollärarnas tidning: E. Lizell, Anordningar för den elektriska strömmens utnyttjande i naturkunnighetsundervisningen (nr 25 o. 26).

Teckning, Tidning för svensk teckningsundervisning: G. Nordlander, Konstruktiv lösning av åttonde uppg. i matematik (allm. kurs), studentexamen nov. 1942 (häftet nr 4).

Fyllnadsprövning efter studentexamen.

Januari 1943.

Matematiska uppgifter för latinlinjen.

1. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^2 + x + y^2 = 10, \\ 2x^2 + x + 2y^2 + 2y = 19. \end{cases}$$

2. I ett parallelltrapets äro de parallella sidorna 3 cm och 6 cm. En av de övriga sidorna är 4 cm och bildar med den större av de parallella sidorna en vinkel av 66°,42. Beräkna trapetsets övriga vinklar.
3. I en geometrisk serie är det aritmetiska mediet till första och tredje termerna en enhet större än andra termen och det aritmetiska mediet till andra och fjärde termerna två enheter större än tredje termen. Vilken är serien?
4. Lös ekvationen

$$\frac{2}{x^2 - x - 2} + \frac{2}{x^2 - 2x - 3} + \frac{3}{x + 1} = 0.$$

5. Kordorna AB och AC i en cirkel med 6 cm radie bilda med varandra en vinkel av 30°. Den kortare kordan är 4 cm. Beräkna de övriga sidorna och ytan i triangeln ABC.
6. I en triangel ABC är vinkeln C rät, sidan AB 13 cm och radien i den vid sidan AB vidskrivna cirkeln 15 cm. Beräkna kateterna.
7. Från en punkt P utanför en cirkel dragas tangenterna och en linje, som skär cirkeln i två punkter, A och B, så att $PA = AB$. Vinkeln mellan tangenterna, som är 60°, delas genom linjen PB i två delar. Hur stora äro dessa?
8. I en likbent triangel ABC är basen AB 36 cm. De räta linjerna AD och BE skära varandra under rät vinkel i F. Vidare skära de triangelns sidor i D och E, så att DE blir parallell med AB. Slutligen är $AF = FC$. Beräkna längden av DE.

Resultat: **1.** $x_1 = -3$ och $y_1 = -2$; $x_2 = 2{,}6$ och $y_2 = 0{,}8$. **2.** 69°,10; 110°,90; 113°,58. **3.** 2, 4, 8, 16 ... **4.** $x_1 = 1$; $x_2 = 2\frac{2}{3}$. **5.** $BC = 6$ cm; $AC = 4\sqrt{2} + 2\sqrt{3} = 9{,}121$ cm. Ytan $= 4\sqrt{2} + 2\sqrt{3} = 9{,}121$ cm^2. **6.** 5 cm och 12 cm. **7.** 6°,72 och 53°,28. **8.** $36(\sqrt{2} - 1) = 14{,}91$ cm.

Matematiska uppgifter för realgymnasiet.

Allmän kurs.

1. I en triangel äro två sidor 37,23 m och 48,31 m. Den ena av de mot dessa sidor stående vinklarna är 4°,68 större än den andra. Beräkna den tredje sidan och vinklarna i triangeln.
2. Lös ekvationen

$$(\cos x + \cos 2x + \cos 3x)^2 + (\sin x + \sin 2x + \sin 3x)^2 = 1.$$

3. Ett klot skäres av ett plan i två delar, vilkas totala ytor förhålla sig som 5 : 8. Beräkna förhållandet mellan delarnas volymer.
4. Ekvationerna för två av en triangels sidor äro $x + y + 2 = 0$ och $2x - y + 4 = 0$. Den tredje sidan är parallell med linjen $5x - y - 9 = 0$. Bestäm denna sidas ekvation, om triangelns tyngdpunkt ligger på linjen $2x + y + 1 = 0$.
5. En person köpte i början av ett år aktier i ett bolag till ett pris av 130 kr per aktie. Under de första fem åren lyfte han vid slutet av varje år en utdelning av 5 kr per aktie. Av vissa skäl måste bolaget därefter inställa all utdelning under fem år. Vid slutet av vart och ett av de fem därpå följande åren var utdelningen 6 kr per aktie. Vid början av det 16:de året önskade personen sälja aktierna. Hur mycket borde han då begära för varje aktie för att få 4 % ränta på ränta på sitt insatta kapital?
6. Diskutera utseendet av kurvan $y = x^3 + ax + b$, där a och b äro konstanter. Angiv kurvans skärningspunkter med tangenten i en punkt på kurvan med abskissan α.
7. Från spetsen A i den likbenta triangeln ABC drages en rät linje, som delar toppvinkeln i två olika stora delar, α och β. På denna linje är punkten D så belägen, att vinklarna ADB och ADC äro lika stora ($= v$). Visa, att storleken av vinkeln v är oberoende av α och β.
8. Genom en punkt P på en diagonal AB i en kub lägges normalplanet till AB. Undersök, hur ytan av den inom kuben belägna delen av detta plan varierar, då P rör sig från A till B.

Resultat: **1.** 15°,17; 19°,85; 144°,98; 81,63 cm. **2.** $90° + n \cdot 180$; $180° + n \cdot 360°$. **3.** 7 : 20. **4.** $y = 5x + 4$. **5.** 161,5 kr. **6.** Om $a \geqq 0$, saknas max. och min. Om $a < 0$, erhållas max. och min. för x-värdena $-\sqrt{-\frac{a}{3}}$ resp. $\sqrt{-\frac{a}{3}}$. Sättes $D = 4a^3 + 27b^2$, gäller följande om kurvans skärning med x-axeln. 1) $D < 0$: tre skärningspunkter; 2) $D = 0$: en skärningspunkt och en tangeringspunkt,

vilka sammanfalla (inflexion), om $b = 0$; 3) $D > 0$: endast en skärningspunkt. Kurvan har således alltid minst en punkt gemensam med x-axeln. Tangenten i $x_1 = a$ skär kurvan i $x_2 = -2a$.

7. Punkten D ligger på den kring triangeln omskrivna cirkeln.

8. Sätt kanten $= a$ och $AP = x$. Om $0 < x \leqq \frac{a\sqrt{3}}{3}$, är snittytan en liksidig triangel med ytan $y = \frac{3x^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$ (parabel I). Om $\frac{a\sqrt{3}}{3} \leqq x \leqq \frac{2a\sqrt{3}}{3}$, är snittytan en sexhörning med alla vinklar 120° och ytan $y = 3\sqrt{3}\left(ax\sqrt{3} - x^2 - \frac{a^2}{2}\right)$, som är en parabel (II) med vertex (y_{max}) i $\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\ \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}\right)$; max.ytan är en regelbunden sexhörning. Om $\frac{2a}{3}\sqrt{3} \leqq x < a\sqrt{3}$, erhålles en ny parabel (III), kongruent med den första och med vertex i $(a\sqrt{3};\ 0)$. Snittytans variation representeras alltså av tre parabelbågar, av vilka I och II ha gemensam tangent i $\left(\frac{a\sqrt{3}}{3};\ \frac{a^2\sqrt{3}}{2}\right)$ och II och III gemensam tangent i $\left(\frac{2a\sqrt{3}}{3};\ \frac{a^2\sqrt{3}}{2}\right)$. Se för övrigt figuren å sid. 63.

Matematiska uppgifter för realgymnasiet.

Specialkurs.

1. En cirkel går genom medelpunkten och en ändpunkt av vardera axeln i en ellips. Under vilka vinklar skära de båda kurvorna varandra, om ellipsens excentricitet är $\frac{1}{2}$?
2. Sök derivatan av y som funktion av x, om

$$\operatorname{tg} \frac{y}{2} = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

3. Normalen i ena ändpunkten av en parameter i en hyperbel skär transversalaxelns förlängning i en punkt, vars avstånd från närmaste brännpunkt är tre gånger transversalaxelns längd. Bestäm vinkeln mellan hyperbelns asymptoter.
4. Två parabler, vilka vardera ha parametern $4a$ och vilkas axlar äro vinkelräta mot varandra, ha gemensam brännpunkt. Visa, att parablernas gemensamma korda går genom styrlinjernas skärningspunkt. Beräkna även den gemensamma kordans längd.

5. Upprita kurvan $4y = \frac{3x^2 + 10x}{x - 5}$.

Kurvan är en hyperbel. Bestäm läget av dess vertices.

6. F är ena brännpunkten i en ellips. A är den närmast F belägna ändpunkten av storaxeln, B den andra. C är lillaxelns ena ändpunkt och P en punkt på ellipsen. Sträckorna FA, FP, FC och FB utgöra i nämnd ordning termer i en geometrisk serie. Beräkna ellipsens excentricitet. Bestäm även läget av punkten P.
7. Tangenterna i två punkter A och B på en parabel skära varandra i P. F är parabelns brännpunkt. Visa, att trianglarna APF och PBF äro likformiga.

Resultat: **1.** 40°,89 och 49°,11. **2.** $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$. **3.** 120°. **4.** $8a$. **5.** Vertices ligga i $(0; 0)$ och $(10; 20)$. Max. i $\left(5 - \frac{\sqrt{375}}{3};\ 10 - \frac{\sqrt{375}}{2}\right)$ och min. i $\left(5 + \frac{\sqrt{375}}{3};\ 10 + \frac{\sqrt{375}}{2}\right)$. Asymptoter: $x - 5 = 0$ och $y = \frac{3x + 25}{4}$. **6.** Excentriciteten är $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$; P ligger i parameterns ändpunkt. **7.** Dragas normalerna AM och BN mot styrlinjen, så är enligt kända satser AP och BP mittpunktsnormaler till FM resp. FN och alltså $PM = PF = PN$. Konstruera en cirkel genom punkterna M, F och N, så blir $\angle BPF = \angle NMF$ (satsen om medelpunktsvinkeln och periferivinkeln) $= \angle MAP = \angle PAF$. På samma sätt fås $\angle PBF = \angle APF$.

Uppgifter i fysik.

Obs. Lösningarna till uppgifterna 2 samt 4—8 böra åtföljas av enkla figurer. — Erforderliga konstanter, vilka ej äro uppgivna i problemens text, hämtas ur formelsamlingen.

1. Man planerar att utnyttja en fors, som en å bildar mellan två sjöar. För att få en föreställning om vilken effekt som bör kunna utvinnas, anlägger man på lämpligt ställe i ån mellan de båda sjöarna en fördämning, som förses med en rektangulär öppning, vars storlek regleras så, att den genom densamma rinnande vattenmängden kan anses som den normala avrinningen från den övre till den nedre sjön. Med en särskild apparat mäter man vattnets hastighet i olika punkter av öppningen och bestämmer på detta sätt vattnets medelhastighet vid passagen genom öppningen till 4,3 m/sek. Den vattenfyllda öppningen är 2,00 m bred

och 1,30 m hög. Nivåskillnaden mellan sjöarna uppmätes till 5,1 m. Hur många hästkrafter bör en turbin kunna utvinna av fallet, om man räknar med att den nyttiggör 75 % av fallets energi?

2. På ett strävt lutande plan ligger en liten metallskiva A, vilken medelst ett fint snöre är förenad med en fast punkt O på planet. Planets lutningsvinkel är α och friktionskoefficienten μ; tg $\alpha > \mu$. OB är den linje, som genom O drages rätt utför planet. Metallskivan ligger först på linjen OB men föres sedan långsamt åt sidan, under det snöret hålles sträckt. Om skivan slutligen släppes, ligger den kvar eller kommer i glidning, allteftersom vinkeln AOB under- eller överstiger ett visst värde β. Ställ upp den ekvation, som angiver sambandet mellan β, α och μ, och beräkna vinkeln β för $\alpha = 30°$ och $\mu = 0{,}2$.

3. För att bestämma spec. värmet för vätgas vid konstant tryck ledde man en konstant ström av vätgas genom ett spiralformat mässingsrör, som var nedsänkt i en med fotogen fylld kalorimeter. Kalorimeterns temperatur hölls under försöket oförändrad medelst en elektrisk uppvärmningsanordning, som avgav effekten 1,90 watt. Gasens temperatur var vid inträdet i kalorimetern 0° C och vid utträdet 10°,5 C, den per minut utträdande gasens volym var 8,93 liter och dess tryck 752 mm kvicksilver. Beräkna vätgasens specifika värme, om dess täthet vid 0° C och 760 mm kvicksilvertryck är $8{,}99 \cdot 10^{-5}$ g/cm³. Man kan bortse från kalorimeterns värmeförluster till omgivningen.

4. För att bestämma tjockleken av ett tunt skikt kanelolja, som är utbrett på ena ytan av en planparallell 6,08 mm tjock glasskiva, inställer man först ett mikroskop, så att man får en skarp bild av ett på dess objektbord anbragt märke. Därefter lägges glasskivan med oljeskiktet uppåt på objektbordet med dess märke. För att nu åter få en skarp bild av det sistnämnda måste man förskjuta mikroskoptuben genom att vrida dess inställningsskruv 12,10 varv. Genom tidigare försök har man funnit, dels att glasskivans och kaneloljans brytningsexponenter äro 1,52 resp. 1,62, dels att en vridning av ett varv på mikroskopets inställningsskruv motsvarar en tubförskjutning av 0,18 mm. Vilken tjocklek har vätskeskiktet?

5. Ett parallellt, monokromatiskt strålknippe infaller mot den plana ytan till en plankonvex lins; strålknippet är parallellt med linsens optiska huvudaxel. Den plana linsytan täckes med en skärm, i vilken fyra små öppningar äro utskurna. Dessa öppningar, A_1 och A_2 samt B_1 och B_2, äro två och två symmetriskt

belägna med avseende på axeln; A_1 och A_2 ligga helt nära axeln, medan avståndet mellan B_1 och B_2 utgör 60 mm. Strålar, som passera genom A_1 och A_2, sammanbrytas till punkten P på axeln, under det att strålar, som framgå genom B_1 och B_2, sammanbrytas till punkten Q. Radien i linsens buktiga yta utgör 90 mm; glasets brytningsexponent är 1,60. Beräkna avståndet PQ.

6. I ett laboratorium hade man en s. k. isolationsmätare, ett instrument, som brukar användas, när man hastigt önskar få en ungefärlig uppfattning om ett tämligen stort motstånd. När isolationsmätaren begagnades, kopplades den i serie med det motstånd, som skulle mätas, och anslöts till ett ficklampsbatteri, varvid man på instrumentets gradering direkt kunde avläsa det sökta motståndet i ohm. Instrumentet var byggt som en voltmeter, och för att det skulle kunna användas även för att mäta spänningar, var det försett med både ohmskala och voltskala. Vid ohmskalans gradering hade förutsatts, att ett ficklampsbatteri med 4,5 volt polspänning skulle begagnas som strömkälla. Vilket inre motstånd hade detta instrument, om man samtidigt avläste 15 000 ohm på ohmskalan och 0,75 volt på voltskalan?

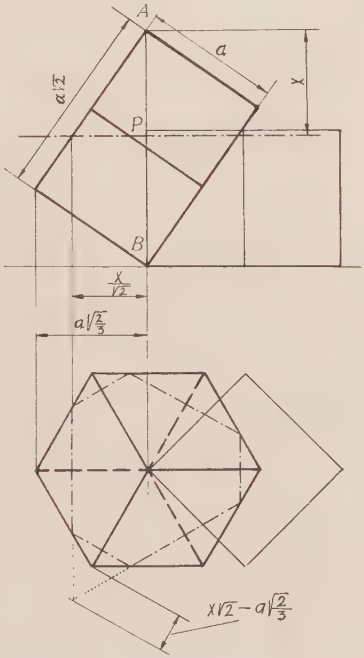
7. En elev hade fått till uppgift att undersöka några nifeackumulatorer. Två av dem fann han hava samma elektromotoriska kraft, vilken han med kompensationsmetod bestämde till 1,26 V. Genom förprov visste han, att bägges inre motstånd voro små, med säkerhet under 1 Ω. För att få dem noggrannare bestämda förenade han deras negativa poler medelst en kort och grov metalltråd och inkopplade mellan de positiva polerna efter varandra en ampèremeter med mycket litet motstånd samt ett motstånd på 1 Ω. Ampèremetern visade då ingen ström. Om han emellertid dessutom mellan den ena ackumulatorns poler inkopplade ett motstånd på 1 Ω, visade ampèremetern en ström av 0,07 A. Kopplade han därefter i stället in det sistnämnda motståndet mellan den andra ackumulatorns poler, visade ampèremetern åter 0,07 A. Vilka värden på ackumulatorernas inre motstånd erhöll han härigenom? Ingen hänsyn behöver tagas till ledningstrådarnas motstånd.

8. På en ort, där inklinationen är 70°,50, är en inklinationsnål inställd så, att dess svängningsplan bildar 60° vinkel med den magnetiska meridianen. Vid jämvikt bildar nålen en viss vinkel med horisontalplanet. Hur mycket bör inklinationsnålens vertikalplan vridas, för att denna vinkel skall ökas med 1°? Nålen är likformigt magnetiserad, och vridningsaxeln går exakt genom dess tyngdpunkt.

Resultat: **1.** 570 hk. **2.** $\operatorname{tg}\alpha \cdot \sin\beta = \mu$; 20°,3. Uppdela tyngdens komposant utför planet i två komponenter: längs snöret och vinkelrätt mot detta. Jämvikt råder mellan den senare och friktionskraften. **3.** 3,41. **4.** 0,26 mm. **5.** 22,7 mm. **6.** 3000 Ω. **7.** $\frac{15 - \sqrt{221}}{2} \approx 0{,}07$ ohm. **8.** Det bör vridas 3°,3, så att nålens svängningsplan kommer att bilda 63°,3 med den magnetiska meridianen.

Om uppg. 8 i allmän kurs, jan. 1943.

Vid lösningen av denna uppg. kan man med fördel begagna sig av projektionsritning. Figuren visar en på sedvanligt sätt ritad vertikal- (den övre) och horisontalprojektion av kuben med diagonalen *AB* i lodrät ställning. Beteckningar se fig. Horisontalproj. är en regelbunden sexhörning, vars sidor och radier äro $= a \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$. I fig. är *P* placerad så, att snittytan blir en sexhörning (streckprickad, alla vinklar 120°). Förlängas tre av snittytans sidor, erhålles en liksidig triangel med sidan $= 2 \cdot \frac{x}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{3}$ samt tre hörntrianglar, av vilka den nedre vänstra är inlagd i fig. (prickade linjer). Hörntriangelns sidor äro $= \left(x\sqrt{2} - a\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\sqrt{3}$. Den sökta snittytan *(y)* är den liksidiga triangeln minskad med de tre hörntrianglarna. Efter förenkling erhålles $y = 3\sqrt{3}\left(ax\sqrt{3} - x^2 - \frac{a^2}{2}\right)$. Se för övrigt resultat till uppg. 8, detta häfte sid. 59.



C. E. Blom.

Föredrag under hösten 1942 inom svenska matematiska, fysiska och kemiska föreningar.

Lund:

Matematiska Sällskapet, ordf. prof. M. Riesz, sekr. fil. mag. B. Holmberg,

Föredrag: fil. lic. N. Svartholm, Något om relativistiska vågekvationer ($^{15}/_{9}$); fil. mag. K. Gustafsson, Något om hydrodynamikens differentialekvationer ($^{12}/_{11}$); fil. lic. L Gårding, Något om singulariteter hos reela funktioner av en variabel ($^{8}/_{12}$).

Kemiska Föreningen, ordf. prof. L. Smith, sekr. fil. lic. Ido Leden.

Föredrag: amanuens S. Sunner, Framställning av tiolsyror ($^{2}/_{10}$); prof. K. Freudenberg, Heidelberg, Über die Konstitution des Lignins und die Möglichkeiten seiner Verwendung ($^{12}/_{10}$); övering. K. Cederquist, Organiskkemisk industri, baserad på trä (Skånska Ingenjörsklubben, $^{6}/_{11}$); ingenjör E. Kåreby, Om statliga torvbolagets verksamhet ($^{13}/_{11}$); prof. E. Larsson, Ur torvens kemi ($^{13}/_{11}$); prof. K. Hess, Berlin, Feinstruktur und Eigenschaften natürlicher und künstlicher Faserstoffe ($^{26}/_{11}$).

Föreningen i Lund för matem.-naturv. undervisning, se årg. 1942, s. 211.

Stockholm:

Matematiska Sällskapet, ordf. prof. F. Carlson, sekr. fil. lic. H. Rudberg.

Föredrag: fil. lic. H. Rudberg, Teorien för Hilbertska rum ($^{20}/_{11}$).

Föreningen för matem.-naturv. undervisning se s. 39.

Fysiska Sällskapet, ordf. prof. E. Holm, sekr. fil. dr E. Lindholm.

Föredrag: prof. G. Borelius, Studier över kärnbildning i metallfaser ($^{28}/_{9}$); docent H. Johansson, Lufttemperatur och värmestrålning vid »rumstemperatur» ($^{27}/_{10}$); docent B. Edlén, Tydningen av de ljusa linjerna i solkoronans spektrum ($^{9}/_{11}$); lektor T. E. Aurén, Solstrålning och vegetation ($^{23}/_{11}$). Medlemmarna voro inbjudna till den av Tekniska Fysikers Förening anordnade föreläsningsserien över »Röntgenstrålarna, deras fysik och deras tillämpning inom materialforskningen» (15—17 okt.).

Kemiska Sällskapet, ordf. prof. H. v. Euler, sekr. docent L.-G. Sillén,

Föredrag: fil. lic. B. Steenberg, Jonadsorption och jonutbyte på aktivt kol ($^{30}/_{10}$); prof. Winge, Köpenhamn, Om Gærsvampenes Biologi samt om Nedarving af deres enzymatiske Egenskaber, med Bemærkninger om tetraploid Gær og Tumordannelse ($^{16}/_{11}$).

Uppsala:

Matematiska Föreningen, ordf. doc. S. Täcklind, sekr. fil. lic. B. Kjellberg.

Fysiska Sällskapet, ordf. docent B. Edlén, v. ordf. docent S. v. Friesen.

Föredrag: fil. mag. C. Reuterswärd, De naturliga atomkärnornas uppkomst ($^{18}/_{11}$); fil. dr N. Ambolt, Några moderna gravimetriska och magnetiska instrument ($^{18}/_{12}$).

Kemiska Sällskapet, ordf. prof. A. Fredga, sekr. doc. I. Hedlund.

Föredrag: Prof. K. Freudenberg, Heidelberg, Über den Hauptfaktor der menschlichen Blutgruppe A ($^{30}/_{9}$); prof. G. Hägg, Några undersökningar över skiktgitter ($^{30}/_{10}$); prof. K. Buch, Helsingfors, Om kolsyrejämviktssystemet i havet och dess betydelse för naturhushållningen ($^{27}/_{11}$).

Elektrisk ljusalstring.

Av G. SILJEHOLM.

Innan vi betrakta, hur ljus framställes i moderna tekniska ljusalstrare, är det lämpligt att undersöka förutsättningarna och anvisningarna härför, sådana dessa äro givna i naturen. Den naturligaste ljusalstraren för oss är solen, vars ljusalstrande hölje, den s. k. fotosfären, har en temperatur, som kan anges till 6 000 à 6 500° K. Härifrån utsändes ett praktiskt taget kontinuerligt spektrum, som på den ultravioletta sidan om det synliga spektret tämligen tvärt avbrytes vid en våglängd av ungefär 2 900 Å. Naturligtvis emitterar solen ljus betydligt längre in på den kortvågiga sidan av spektrum, men jordens atmosfär, i detta fall speciellt ozonskiktet, verkar som ett kraftigt filter och är orsaken till att strålar under 2 900 Å ej nå jordytan. I detta sammanhang intresserar oss alltså huvudsakligen det förhållandet, att solen utsänder ett kontinuerligt ljus av nyssnämnda höga färgtemperatur.

Se vi nu på den naturliga mottagningsapparaten för detta ljus, ögat, så visar fig. 1, hur ögats känslighet för ljus varierar med färgen. Kurvan *b* svarar mot tappseende, d. v. s. seende vid belysningsnivåer så höga, att vi korrekt kunna iaktta och bedöma färger. Kurvan *a*, stavseende, gäller för så låga belysningsnivåer, att allt färgseende har upphört. I föreliggande fall intresserar oss alltså endast kurvan *b*, färgseende. Vi finna här, att ögats maximala känslighet ligger vid gröngult, motsvarande en våglängd av c:a 5 550 Å. Härifrån faller kurvan mot spektrets röda och blå delar. För att maximal verkningsgrad i ögat skall erhållas bör alltså ljusalstrarens våglängd ligga vid ungefär 5 550 Å. Detta skulle dock innebära en monokromatisk strålning, varvid vi måste avstå från färgseende. Verkningsgraden hos varje ljusalstrare, som lämnar ljus inom hela det synliga området, bestämmes alltså av denna ögats känslighetskurva.

Fig. 2 framställer energifördelningen i strålningen från en svart kropp vid olika temperaturer. Det synliga området är markerat genom en snedstreckad yta. Figuren utgör en grafisk framställning av Plancks lag. Vi se, att vid en temperatur av 2 000° C endast en högst obetydlig del av den svarta kroppens strålning faller inom

det synliga området. Strålningsmaximum ligger långt bort i det ultraröda området. Vid en temperatur av 3 000° C, vilken är betydligt högre än den som förekommer t. ex. i vanliga glödlampor för belysningsändamål, ligger fortfarande strålningens maximum i ultrarött, ehuru nu en betydligt större del faller inom det synliga området. Först när kroppens temperatur uppgår till 6 000° C, faller en väsentlig del av energin inom det synliga området. Strålningsmaximum befinner sig då också där. Detta är ju naturligt, eftersom

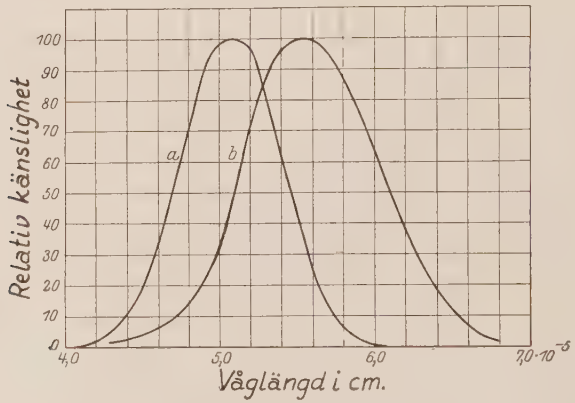


Fig. 1. Ögats känslighetskurva. *a*) nattseende, *b*) dagseende.

vi människor ha ett öga, som utvecklats i en med solljus belyst värld. Maximum i strålningen från en kropp med solens temperatur borde genom utvecklingens anpassning ligga mitt i ögats känslighetsområde, vilket också är fallet.

Taga vi nu hänsyn till ögats spektrala känslighet, så finna vi av fig. 3, att totalstrålningens visuella verkningsgrad når sitt maximum vid en liknande temperatur men att den möjliga verkningsgraden är begränsad till ungefär 14 %. Totalstrålningens visuella verkningsgrad är den kurva, som här närmast intresserar oss, särskilt vid diskussionen om teknisk ljusalstring medelst den metod — elektrisk upphettning av en fast kropp — som kommer till användning vid den ojämförligt vanligaste moderna ljusalstraren, den elektriska glödlampan. För att uppnå största möjliga verkningsgrad måste vi försöka erhålla en glödande kropp med en temperatur motsvarande fotosfärens.

Den första tekniskt utbildade glödlampan hade en glödtråd av kol. Denna brukade drivas vid en temperatur av ca 2 100° K, alltså $^1/_3$ av den önskade temperaturen, 6 500° K. Genom införandet

av volframglödtråden kunde temperaturen i ett slag höjas till c:a 2 500° K, motsvarande 20 %. Eftersom ljusstrålningens intensitet ökar med glödkroppens 4 à 5 potens, betyder detta en ökning av den utsända synliga strålningen med icke mindre än c:a 300 %.

Användningen av volframglödtrådar är även gynnsam av ett annat skäl. Under det att koltråden utsänder en strålning, som mycket nära överensstämmer med den svarta kroppens, är volframmetallen i viss utsträckning en s. k. selektivstrålare, d. v. s. den avger något mer nyttig strålning, alltså synligt ljus, än koltrådarna, vilka avge en ännu större del av sin totala strålning i form av värme. Vid konstruktion av moderna ljuskällor med glödkropp användas glödtrådar av volfram, då vi f. n. ej ha något annat material med högre smältpunkt, 3 660° K, som låter forma sig på önskat sätt.

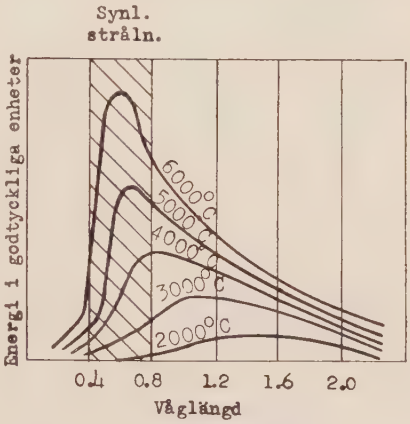


Fig. 2. Strålning från en svart kropp vid olika temperaturer. Våglängden angiven i 1000-dels millimeter.

Utom av smältpunkten begränsas naturligtvis den temperatur, vid vilken en glödtråd kan användas, av den hastighet, varmed metallen förångar vid den givna temperaturen. Ursprungligen användes rak volframtråd, uppspänd i sicksack i den evakuerade lampkolven. Vid förångning rörde sig då partiklarna rätlinigt från glödtråden och hamnade på glaskolven, där de så småningom bildade en ljusabsorberande metallhinna. Utbildandet av den ljusabsorberande hinnan på glaset kan i viss utsträckning fördröjas därigenom att glasets insida behandlas så, att den erhåller en berg- och dalliknande struktur. Den kraftiga ljusabsorptionen i hinnan sätter nämligen först in, sedan de olika partiklarna bildat en tillräckligt sammanhängande beläggning. Berg- och dalstrukturen fördröjer nu detta, så att lampans nyttiga livslängd — vilken brukar anges som tiden till dess ljusflödet nedgått till 80 % av det ursprungliga — förlänges ända till det dubbla. Uppkomsten av den berg- och dalliknande strukturen på glaset förorsakas av att glödtrådarna vid lampans tillverkning besprutas med lämpliga ämnen, såsom fosfam, vissa halogener etc., vilka när lam-

pan tändes första gången snabbt förångas från glödtråden och slungas mot glasväggen. Det är möjligt, att till den nyss beskrivna rent geometriska effekten kommer en annan, bestående däri, att en del av de förångade glödtrådspartiklarna inträngа i det på kolvens insida belägna skiktet och där ingå i någon sorts kolloidalt tillstånd. Den berg- och dalliknande strukturen är emellertid direkt fastställd medelst upptagna elektronböjningsdiagram.

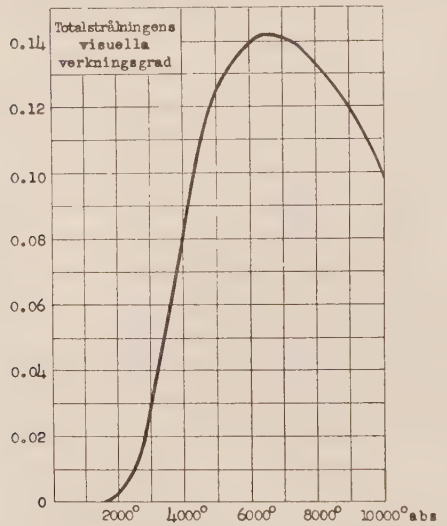


Fig. 3. Totalstrålningens visuella verkningsgrad, d. v. s. verkningsgraden under hänsynstagande till ögats känslighetskurva.

Genom att spiralisera glödtråden har man lyckats ernå, att en viss del av det förångade materialet åter hamnar på glödtråden. Genom dubbel spiralisering ökas sannolikheten härför i ännu högre grad. I de moderna glödlamporna har förångningshastigheten hos glödtråden avsevärt kunnat minskas därigenom, att lampkolven efter sin evakuering fyllts med en lämplig gas. Gasfyllningens hämmande inverkan på förångningshastigheten kan beskrivas på följande sätt:

Ett visst antal partiklar förångas per tidsenhet från glödtråden. I vakuum fortsätta dessa rätlinigt ut från denna och hamna t. ex. på glasväggen. I den gasfyllda lampan däremot kunna de förångade metallpartiklarna ej alltid röra sig helt obehindrat utan riskera att stöta samman med gasfyllningens molekyler. Är vid en dylik sammanstötning gasmolekylens energi större än den förångade partikelns, inträffar det, att metallpartikeln knuffas tillbaka och ånyo hamnar på glödtråden. Ju fler gasmolekyler som finnas, d. v. s. ju högre tryck gasfyllningen har, desto större är sannolikheten för att en dylik gynnsam sammanstötning skall äga rum. Ju tyngre gasfyllningens molekyler äro, desto större kraft få de i slaget och desto större är sannolikheten för att de skola förmå knuffa tillbaka metallpartiklarna till glödtråden. Den förra synpunkten är anledningen till att en gasfyllning med ett tryck av ungefär 1 atmosfärs storlek (vid

rumstemperatur) användes i de moderna lamporna. I vissa fall användes t. o. m. tryck uppgående till flera atmosfärer, men svårigheten att därvid åstadkomma en elegant fabrikationsmässig avsmältning av lampan har t. v. begränsat användningen av denna metod till speciallampor. Denna övertrycksavsmältning är dock i princip redan löst på olika sätt. Den andra synpunkten — betydelsen av fyllnadsgasens molekylvikt — är en av anledningarna till att den först använda kvävgasen med molekylvikten 28 numera ersatts med argongas, vars molekylvikt är 40. På senare tid har man också i viss utsträckning börjat använda en ännu sällsyntare ädelgas, nämligen krypton med molekylvikten 83. Den ringa förekomsten av krypton i den atmosfäriska luften gör dock tillverkningen av denna gas så dyr, att dess användning f. n. begränsas till vissa lamptyper. Med ökad atomvikt följer minskad värmeledningsförmåga, vilket ytterligare är en gynnsam faktor vid användning av tunga fyllnadsgaser. Kunde t. ex. xenon framställas till överkomligt pris, skulle glödlampstekniken med stor fördel kunna begagna sig därav.

Användningen av spiraliserad glödtråd i en gasfylld lampa är fördelaktig även ur en annan synpunkt. Genom spiraliseringen elimineras nämligen i avsevärd grad de nackdelar, som förorsakas av gasfyllningens värmebortledande förmåga. Runt omkring en i en gas glödande tråd utbildas ett skikt, i vilket ingen gasströmning förekommer. Ytan av detta skikt avgör strömningsförlusternas storlek. Det stillastående skiktets tjocklek är förvånansvärt stor, 1 à 2 mm. Förhållandet mellan värmeförlusterna och nyttig strålning, vilken senare är proportionell mot trådytan, minskar med stigande glödkroppsdiameter. Glödtråden bör alltså göras så kompakt som möjligt, och spiraliseringen är ur denna synpunkt fördelaktig.

Genom spiralisering kan även glödtrådens motstånd bekvämt anpassas till de allmänna nätspänningarna. En avsevärd sammanträngning av glödkroppen kan åstadkommas; så förkortas t. ex. genom spiralisering en enkeltråd med en längd av 1 400 mm till 70 mm. Genom dubbelspiralisering minskas glödkroppens utsträckning ytterligare till 16 mm. I speciella fall tillämpas t. o. m. flera spiraliseringar av glödkroppen.

Vilka ljusutbyten kunna nu erhållas med lampor konstruerade enligt de skildrade principerna? Nedanstående tabell visar, att hos vanliga lampor ljusutbytet kunnat höjas från koltrådslampans 3 Lm/W till den moderna lampans 12 Lm/W. I vissa speciallampor kan utbytet stegras till storleksordningen 20 Lm/W vid godtagbar livslängd.

Ljusbyten för olika lamptyper för 110 volt och 25 å 40 watt:

Koltrådslampa	lufttom	raktråd	3	lumen/watt,
Volframtrådslampa	»	»	8	»
»	»	enkelspiral	10	»
»	gasfylld	»	11	»
»	»	dubbelspiral	12	»

Om all till lampan tillförd energi kunde omvandlas till ljusemission med en våglängd av 5 550 Å, d. v. s. den våglängd, för vilken ögat är känsligast, skulle ett utbyte av ca 650 Lm W kunna erhållas. Såsom framgår av kurvan över totalstrålningens visuella verkningsgrad, kan en svart kropp utnyttja högst 14 % d. v. s. emittera ca 90 Lm W. För att detta resultat skall uppnås förutsättes emellertid glödkroppstemperaturer omkring dubbelt så höga som de, vilka f. n. kunna åstadkommas i praktiken. Ljustekniken har därför sökt andra vägar för realiserandet av önskemålet om förbättrat ljusutbyte.

Man har därvid frångått den glödande kroppens princip och i stället begagnat sig av den omvandling av elektrisk till elektromagnetisk energi, som äger rum vid elektricitetens gång genom gaser. Då urladdningen vanligen sker genom gaser inneslutna i ett rörformigt hölje, talar man om urladdningsrör eller urladdningslampor. Egendomligt nog är principen att för belysningsändamål utnyttja urladdningsrör mycket gammal; den har rätt målande beskrivits av professor Johann Heinrich Winkler, Leipzig, som under åren 1744—46 utgivit några intressanta avhandlingar. Han använder också uttrycket »det elektriska ljuset», vilket, som han säger, »på en gång genomtränger och utfyller glasbokstäverna».

Fig. 4 lämnar en schematisk översikt av företeelserna i ett gasurladdningsrör vid strömgenomgång och ljusutsändning. Katoden är täckt med ett svagt ljus, katodljus. Något framför detta i riktning mot anoden synes det negativa glimljuset, och skilt från detta genom Faradays mörka rum sträcker sig det mycket markanta positiva pelarljuset mot anoden. Ljusintensiteten hos den positiva pelaren överträffar vanligen flerfaldigt intensiteten från det negativa glimljuset. Det utsända ljusets spektrala sammansättning är beroende på gas- eller ångfyllningen. I allmänhet använder man en gasfyllning bestående av någon lämplig ädelgas.

Utom denna gasfyllning finns ofta en ångfyllning härrörande t. ex. från något kvicksilver, vilket inneslutits i röret. Andra ångbildande metaller, som bruka komma till användning, äro t. ex. natrium och kadmium. Eftersom ångtrycket från dessa senare är synnerligen lågt, maste urladdningsröret först ha antagit en högre

temperatur, innan dessa metallers ångor börja delta i urladdningen. Primärt sker alltså urladdningen praktiskt taget enbart i ädelgasfyllningen, som därför i dessa fall brukar kallas grundgasfyllningen. Även när kvicksilver användes, äro temperaturförhållandena vanligen sådana, att kvicksilvrets ångtryck vid urladdningens startande icke är tillräckligt för att möjliggöra en urladdning i ren kvicksilverånga, varför även i detta fall en ädelgasfyllning erfordras. Orsaken till att urladdningen föredrar metallångan är naturligtvis den, att jonisationsspänningen där är lägre än ädelgasens.

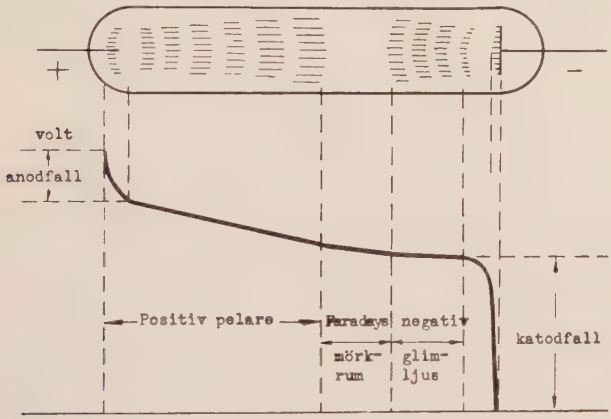


Fig. 4. Schema över företeelserna vid en gasurladdning.

Nyssnämnda figur visar också, hur spänningen fördelar sig över urladdningsröret. Som synes äger en avsevärd spänningsförlust rum i närheten av katoden, det s. k. katodfallet. Detta uppgår för vanliga metaller, t. ex. järn, till storleksordningen 150 volt vid argongasfyllning. I det positiva pelarljuset äger en med dess längd linjär spänningsökning rum. Vid själva anoden uppstår åter en mera plötslig spänningsförlust, som dock uppgår till betydligt lägre värden än vid katoden.

De senast nämnda förhållandena ge förklaringen till att urladdningsrör såsom de i allmänhet användes under några tiotal år före 1930 utfördes för mycket höga spänningar, av storleksordningen 1 000 eller 1 000-tals volt. Härigenom kunde en avsevärd del av den använda spänningen utnyttjas till ljusutsändning i den positiva pelaren, som drogs ut till avsevärd längd. De för ljusutsändning icke utnyttjade spänningsförlusterna i katod- och anodfallen komma därvid att procentuellt bli av mindre betydelse för rörets verkningsgrad. Sådana rör, neonrör, kunna emellertid ej utan vidare använ-

das för belysningsändamål inomhus, då de användbara höga spänningarna fordra motsvarande skyddsåtgärder mot beröring. Genom användning av glödkatoder kan katodfallet reduceras, så att det går ned till något 10-tal volt. Härigenom står en avsevärd del av nätspänningen till förfogande för ljusalstring, och röret kan anslutas till det vanliga belysningsnätet med 220 volts spänning. I vissa fall kan man t. o. m. konstruera urladdningslampor för 110 volt; som regel användes dock vid växelström i sådana fall en upptransformering till 220 volt.

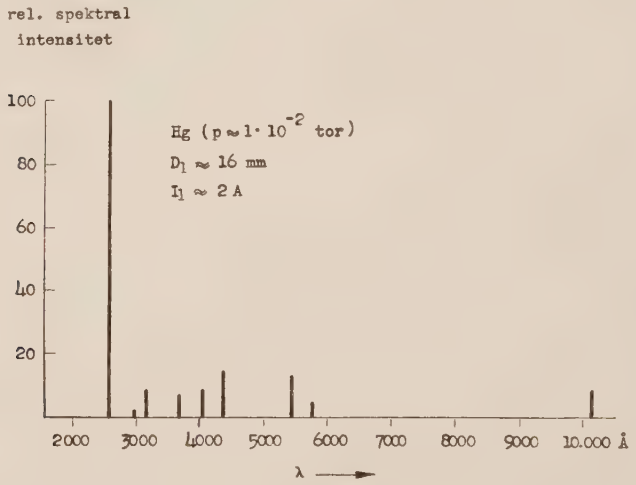


Fig. 5. Relativ spektralintensitetsfördelning hos strålningen från en kvicksilverlågtrycksurladdning.

Vid glödkatoder måste, såsom namnet anger, elektroden på något sätt upphettas till hög temperatur. För de ofta använda oxidkatoderna användas temperaturer av 700—1 000° C; vid de mera komplicerade katoder, som användas t. ex. vid kvicksilverhögtrycksurladdningar, användas ofta ännu högre temperaturer av storleksordningen 1 500° C, ibland t. o. m. mer. Ehuru dessa temperaturer icke behöva gälla för hela elektrodkroppen utan kunna vara ganska lokalt begränsade till det emitterande området, ligger det nära till hands att a priori antaga, att ekonomin hos en dylik elektrod genom den sålunda nödvändiga tillförseln av upphettningsenergi måste vara sämre än hos de kalla elektroderna. Så är dock icke fallet. Som exempel kan anföras ett urladdningsrör (LUMA LL40), vilket arbetar med en urladdningsström av 0,4 ampère. Antaga vi, att kalla katoder med ett katodfall av 150 volt användas, blir katodför-

lusten alltså $150 \cdot 0{,}4 = 60$ watt. Vid de i praktiken använda självupphettande glödkatoderna uppgår katodfallet till ca 13 volt, varför förlusten blir $13 \cdot 0{,}4 = 5{,}2$ watt.

Vid en fyllning med kvicksilverånga äro de alstrade resonanslinjerna osynliga och befinna sig i spektrets ultravioletta del. Fig. 5 visar den spektrala sammansättningen av ljuset från en kvicksilverlågtryckslampa med ett tryck av omkring 1/100 mm Hg-pelare. Sättes resonanslinjens (2537 Å) intensitet = 100, se vi, att ingen av de övriga linjerna kommer upp till ens $^1/_5$ av detta värde. En kvicksilverlågtrycksurladdning lämpar sig därför föga för alstring av synligt ljus och knappast heller för alstring av långvågig ultraviolett strålning. Däremot alstras ju resonansvåglängden i det

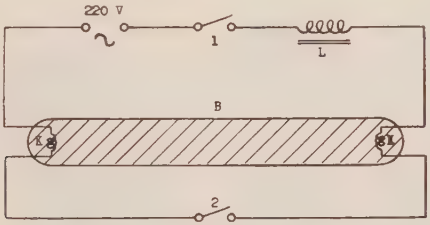


Fig. 6. Principiell konstruktion och koppling av ett lågtrycksurladdningsrör.

kortvågiga ultravioletområdet med god verkningsgrad, varför denna lamptyp numera fått sin ojämförligt viktigaste användning icke som direkt ljusalstrare utan indirekt därigenom, att den starka kortvågiga ultravioletstrålningen utnyttjas för att framkalla fluorescens hos vissa material, som i sin tur alstra den synliga strålningen. Härom mera nedan.

Den principiella konstruktionen och kopplingen av ett urladdningsrör för kvicksilverlågtrycksurladdning framgår t. ex. av fig. 6. Detta urladdningsrör, som är avsett att drivas med 220 volt växelström, har i vardera ändan en glödspiralförsedd katod. Sedan nätspänningen lagts på röret, startas urladdningen genom att hjälpströmbrytaren (2) slutes för ett ögonblick. Detta kan ske manuellt eller automatiskt. Härunder bringas katoderna till emissionstemperatur, varigenom rörets tändspänning avsevärt sänkes. Dessutom underlättas tändningen i hög grad genom den induktionsstöt, som uppstår i den förkopplade drosseln (L) vid hjälpströmbrytarens öppnande. Denna drossel är nödvändig på grund av att urladdningsröret har en negativ strömspänningskarakteristik, d. v. s. med ökad strömgenomgång faller spänningen över urladdningssträckan (alltså raka motsatsen till förhållandet vid t. ex. ett ohmskt mot-

stånd). För begränsning av strömstyrkan till de värden, för vilka urladdningsröret är utfört, måste i strömkretsen införas en impedans, vilken då vid växelströmsdrift lämpligen utgöres av en drossel. Vid likströmsdrift måste naturligtvis ett ohmskt motstånd användas. Detta ställer sig emellertid betydligt ogynnsammare ur effektsynpunkt, då ju begränsningen medför, att en stor del av energin går till spillo i jouleskt värme i stället för att som vid drosseln matas tillbaka i nätet.

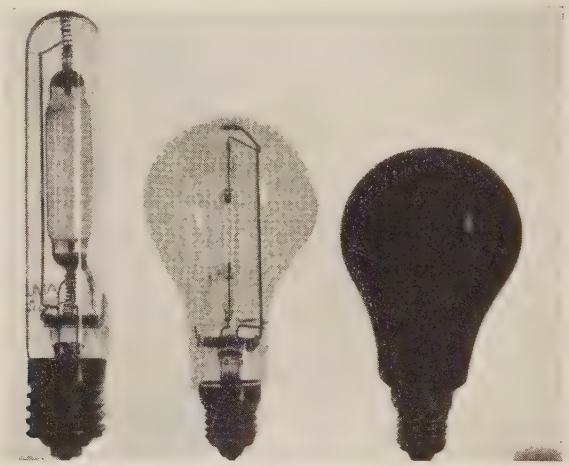


Fig. 7. Några vanliga utföringsformer av kvicksilverhögtrycksurladdningsrör.

Då vid lågtrycksurladdning på grund av det låga trycket kollisionerna mellan de accelererade elektronerna och gasfyllningens atomer inträffa inom en relativt utsträckt volym, blir urladdningens spänningsförlust per cm urladdningslängd liten, varför urladdningsröret, ifall det är avsett att drivas med vanliga nätspänningar, måste utföras rätt långsträckt, t. ex. av storleksordningen 1 m eller mera. Dessutom bör röret ha låg strömtäthet, ty då minskas sannolikheten för att högre nivåer skola exciteras. I praktiken utföras lågtrycksrör därför med relativt stor area; diametern ligger ofta mellan 25 och 40 mm.

När kvicksilverånglamporna skola utföras för direkt alstring av synligt ljus, måste man frångå lågtrycksurladdningen och i stället genom att använda höga tryck (flera atomer per volymsenhet samt högre strömtäthet) sörja för att kvicksilveratomernas strålningselektroner höjas upp till högre nivåer, varifrån en kraftigare synlig

strålning äger rum. Några av villkoren högre tryck och högre strömtäthet betingade utföringsformer framgå av figur 7. Lampan längst till vänster utföres för tryck av storleksordningen 1—3 atm. Själva urladdningsröret består här av hårdsmält glas. De två andra lamporna äro utförda med ännu mer hopträngda urladdningskammare. Då kammarens temperatur därigenom stegras, måste den göras av kvartsglas. Den antar vid driften rätt avsevärda temperaturer av storleksordningen 1 000°. Lampan längst till

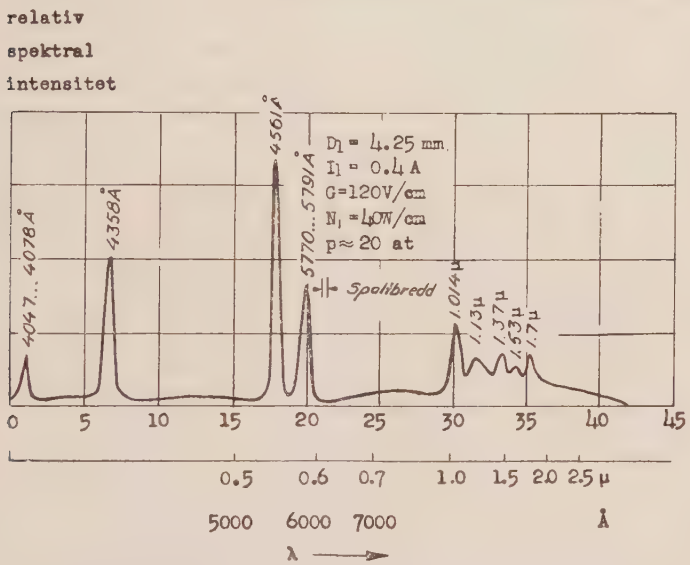


Fig. 8. Relativ spektralintensitet hos den synliga urladdningen från en kvicksilverhögtrycksurladdning med ca 20 atm. tryck.

höger är identisk med den mellersta lampan. Den har dock ett ytterhölje, som släpper igenom enbart långvågiga ultravioletta strålar men däremot i högsta grad absorberar den synliga strålningen. Trycken hos de med kvartskammare utförda lamporna för vanliga belysningsändamål bruka ligga mellan 10 och 20 atm.

Fig. 8 visar, hur spektret ter sig vid ett tryck av c:a 20 atm. Spektrallinjerna ha nu blivit bredare, och en viss om än svag kontinuerlig bakgrund börjar framträda. Vid vissa kvicksilverånglampor, s. k. superhögtryckslampor, ernås genom ytterligare stegrad strömtäthet och högre tryck en ännu kraftigare växelverkan mellan de exciterande elektronerna och gasfyllningens atomer, vilka nu i mycket stor utsträckning i redan exciterat tillstånd

erhålla förnyad energitillförsel genom upprepade kollisioner med urladdningsströmmen. Dessutom kollidera de naturligtvis kraftigt sinsemellan.

De ljusutbyten, som kunna erhållas från de nyss skildrade gasurladdningslamporna, ligga för vanliga belysningstyper inom området 35—45 lumen per watt, alltså betydligt högre än för glödlampan. Emellertid är skillnaden mellan glödlampans kontinuerliga och gasurladdningens linjespektra av avgörande inflytande på ljusets kvalitet. Natriumlampans enbart gula ljus och kvicksilverånglampans grönvita, vilket saknar röd strålning, begränsa naturligtvis i hög grad användbarheten av dessa lampor. På färgåtergivningens korrekthet få blott mycket blygsamma fordringar ställas. Likväl underlättar just den egenartade ljussammansättningen i många fall seendet, t. ex. genom en karakteristisk höjning av kontrastverkan mellan olika färgnyanser, och som det synes stegras synskärpan icke minst vid användning av rent kvicksilverljus. I andra fall, såsom vid belysning av tillfartsvägar o. dyl., där korrekt färgåtergivning är av mindre betydelse, spelar den goda ljusekonomin och långa livslängden hos dessa lampor en framträdande roll. För inomhusbelysning har användningen av enbart kvicksilver- och natriumljus i de flesta fall ej slagit igenom. Man har i stället genom tillblandning av glödlampsljus åstadkommit en angenämare ljussammansättning, vilken funnit en icke oväsentlig användning i industrier, för gatubelysning i zoner med livligare gångtrafik o. s. v. Ofta utföres denna blandning av kvicksilver- och glödlampsljus i speciella blandljusarmaturer, vari en kvicksilverånglampa kombineras med en eller flera, ofta 3 glödlampor, så att den totala ljusströmmen från de bägge lamptyperna blir ungefär lika stor. Vissa speciella kombinationslampor, där kvicksilverånglampan sammanbyggts med en glödlampa till en enhet, varvid glödtråden på samma gång verkar som strömbegränsare för kvicksilverånglampan, ha även kommit i marknaden.

Alla dessa blandljuskonstruktioner resultera emellertid i att ljuspunkterna med naturnödvändighet måste utföras med hög wattförbrukning. Den minsta blandljuskombinationen har sålunda en effektförbrukning på över 150 watt. Oftast uppgår effektförbrukningen vid dylika armaturer till 250 watt eller mer. Härigenom och till följd av det resulterande höga ljusflödet ha blandljusarmaturerna inomhus fått sitt förnämsta användningsområde i stora hallar o. dyl. För användning i smärre utrymmen, såsom kontor, bostadsrum o. s. v., lämpa de sig alltså icke. Speciellt i bostadsutrymmen önskar man ju oftast en icke alltför förvanskad färgåtergivning, som i de flesta fall, då den icke direkt ansluter sig till

dagsljuset, icke alltför mycket bör avvika från det invanda glödlampsljusets kontinuerliga spektrum. Efter blandljusets framträdande i mitten på 1930-talet dröjde det några år, innan tekniken lyckades åstadkomma en annan, härför acceptabel lösning. Man begagnar sig därvid av en kvicksilverlågtrycksurladdning men använder ej det direkt utsända synliga ljuset utan låter i stället den alstrade ultravioletta resonansstrålningen påverka luminiscerande substanser, vilka alltså övertaga den direkta alstringen av det synliga ljuset och bestämma dess karaktär.

Den verkningsgrad, med vilken goda lumiforer omvandla den instrålade ultravioletts trålningen till synligt ljus, kan vara förvånansvärt hög och från 50 % uppgå till mycket nära 100 %.

Fluorescenslamporna, lysämneslamporna eller lysrören utföras i princip som en kvicksilverlågtrycksurladdningslampa i enlighet med fig. 6. På lampans insida äro de fluorescerande ämnena anbragta i form av en fastsintrad, rätt tunn pulverbeläggning. Genom att använda en beläggning sammansatt av fluorescerande pulver av olika färgkaraktär kan man framställa lampor med önskad ljusfärg inom rätt vida gränser. Aktuella lysämnen, avsedda att bestrålas med kvicksilvrets resonanslinje, äro följande:

Färg	*Material*
rött	kadmiumborat
gulrött	zink-berylliumsilikat
gult	» »
gulvitt	» »
gulgrönt	» »
gulgrönt	zinksilikat
grönt	»
blåvitt	magnesiumvolframat
blått	kalciumvolframat

Fig. 9 visar en s. k. färgtriangel, vari lysämnena kadmiumborat (c), zinksilikat (W) och magnesiumvolframat (M) äro inprickade. Förbindas dessa punkter med räta linjer, erhålles en triangel, på figuren snedstreckad. Varje färgton, som befinner sig inom detta snedstreckade område, kan framställas genom lämplig blandning av de tre komponenterna. Den heldragna grova kurvan representerar färgen hos en glödande svart kropp. Med de valda lysämnena kunna färgtemperaturer från 2 650° K upp till c:a 10 000° K realiseras. Vi ha alltså möjlighet att efter behag åstadkomma en färgtemperatur t. ex. liknande solens eller den vanliga glödlampans. F. n. användas i huvudsak två olika färgsammansättningar hos

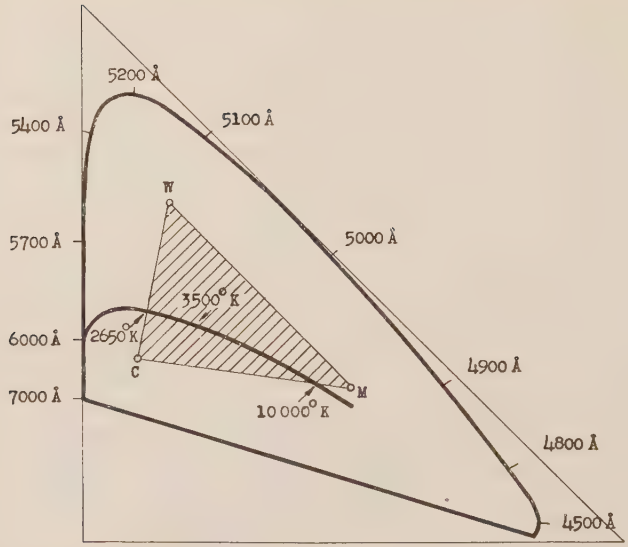


Fig. 9. S. k. färgtriangel. Den streckade ytan innesluter färgtoner, som kunna realiseras genom blandning av lysämnena zinksilikat (grönt), kadmiumborat (rött) och magnesiumvolframat (blåvitt).

lysämneslamporna. Den första har en färgtemperatur av omkring 5 500° K; färgen motsvarar alltså ungefär dagsljusets. Ett andra utförande har en färgtemperatur av omkring 3 500° K, vilken färg brukar betecknas som vit, och ljusets karaktär liknar glödlampsljuset men är något vitare. En tredje typ, som dock ej tycks ha slagit igenom, har en färg, som betecknats som varmt vit.

De ljusutbyten, som erhållas från nu aktuella lysämneslampor med vitt ljus eller dagsljuskaraktär, uppgå under hänsynstagande till de i förkopplingsapparaterna ingående förlusterna till 35 à 40 Lm/W, vilket alltså är ungefär 3 gånger bättre än vad man får ut av glödlampor med motsvarande effektförbrukning. Men trots denna förbättring är verkningsgraden även hos denna moderna ljuskälla förvånansvärt liten, nämligen ej fullt 7 %. Gentemot glödlampan, vars verkningsgrad uppgår till ca 2 %, är ökningen ju stor, men onekligen finns det alltjämt rikligt utrymme för forsatta förbättringar.

Hyperbolisk trigonometri i lorentzrymden.

Av **STIG COMÉT.**

I en nyligen utkommen avhandling[1] visar prof. M. Riesz, att geometrien på den ena manteln av en tvåmantlad hyperboloid överensstämmer med Bolyai-Lobatschefskijs icke-euklidiska plangeometri, om metriken i den tredimensionella rymd, vari hyperboloiden befinner sig, definieras på lämpligt sätt. Många analogier uppvisas mellan denna geometri å ena sidan och sfärisk geometri (i en vanlig rymd) å andra. Här skall i korthet visas, att den på hyperboloiden gällande trigonometrien även kommer att visa stora likheter med vanlig sfärisk trigonometri.

Låt (x_1, x_2, x_3) vara koordinater för en punkt x i rymden och

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1; \quad x_3 > 0$$

vara ekvationen för den hyperboloidmantel, vars trigonometri vi skola behandla. Inför bilinearformen

$$L(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3$$

och definiera kvadraten på avståndet mellan två punkter x och y såsom $L(x-y, x-y)$; rymden kallas då en lorentzrymd.

Om x ligger på hyperboloiden, är alltså

$$L(x, x) = -1. \tag{1}$$

Om x och y ligga på hyperboloidens betraktade mantel och $\overline{xy}$ är längden (i lorentzmetrik) av den kortaste linje *i ytan*, som förbinder dem, så är

$$\cosh \overline{xy} = -L(x, y). \tag{2}$$

Beträffande dessa och övriga erforderliga definitioner och satser hänvisas f. ö. till den nämnda avhandlingen.

Låt punkterna x, y och z ligga på hyperboloidmanteln. Beteckna längden av sidorna i den av dem bestämda hyperboliska triangeln med $\overline{yz} = a$, $\overline{zx} = b$, $\overline{xy} = c$ (dessa kunna beräknas enligt (2)), och kalla triangelns vinklar (se nedan) för A, B och C resp. I punkten x dragas tangenterna till sidorna c och b (som ju äro hyperbler).

[1] Marcel Riesz, En åskådlig bild av den icke-euklidiska geometrien. Lund 1943. Rec. i detta häfte s. 102.

Dessa båda tangenters riktningstal (d. v. s. komposanterna av en vektor längs resp. tangent) betecknas α_1, α_2, α_3 resp. α'_1, α'_2, α'_3. Vinkeln mellan dessa tangenter är definitionsvis $= A$ och beräknas i lorentzmetrik ur

$$\cos A = \frac{L(\alpha, \alpha')}{\sqrt{L(\alpha, \alpha)} \cdot \sqrt{L(\alpha', \alpha')}}. \tag{3}$$

Vi skola visa, att denna formel efter införande av α och α' omedelbart ger den hyperboliska trigonometriens grundformel.

Emedan vektorn α ligger i hyperboloidens tangentplan i punkten x, så är

$$x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 - x_3 \alpha_3 = 0. \tag{4}$$

Vidare ligger α i det diametralplan, som går genom x och y, följaktligen:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

Ur (4) och (5) framgå α_1, α_2, α_3 på en betydelselös proportionalitetsfaktor när:

$$\begin{aligned} \alpha_1 = x_2 \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + x_3 \cdot \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} &= x_1 (x_2 y_2 - x_3 y_3) - y_1 (x_2^2 - x_3^2) = \\ &= x_1 (x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3) - y_1 (x_1^2 + x_2^2 - x_3^2) = \\ &= x_1 \cdot L(x, y) - y_1 \cdot L(x, x), \end{aligned}$$

d. v. s. enligt (1) och (2), emedan $\overline{xy} = c$:

$$\alpha_1 = y_1 - x_1 \cdot \cosh c.$$

För α_2 och α_3 erhållas analoga uttryck. Sammanfattning:

$$\alpha = y - x \cdot \cosh c.$$

P. s. s. $$\alpha' - z - x \cdot \cosh b.$$

Nu fås omedelbart de uttryck, som skola ingå i (3):

$$L(\alpha, \alpha') = L(y - x \cosh c, \; z - x \cosh b) =$$

$$= L(y, z) - \cosh b \cdot L(x, y) - \cosh c \cdot L(x, z) + \cosh b \cosh c \cdot L(x, x),$$

som enligt (1) och (2) ger:

$$L(\alpha, \alpha') = -\cosh a + \cosh b \cosh c. \tag{6}$$

Vidare:

$$\begin{aligned} L(\alpha, \alpha) = L(y, y) - 2 \cosh c \cdot L(x, y) + \cosh^2 c \cdot L(x, x) &= \\ = \cosh^2 c - 1 = \sinh^2 c, & \end{aligned} \tag{7}$$

och p. s. s.

$$L(\alpha', \alpha') = \sinh^2 b. \tag{8}$$

Genom insättning av (6), (7) och (8) i (3) erhålles:

$$\cos A = \frac{\cosh b \cosh c - \cosh a}{\sinh b \sinh c}, \tag{9}$$

där kvadratrötterna (= sträckor) valts positiva.

Detta den hyperboliska trigonometriens cosinusteorem är som synes en slående analogi till motsvarande teorem inom sfärisk trigonometri.

Ur (9) kan man genom räkning härleda ett sinusteorem:

$$\frac{\sin A}{\sinh a} = \frac{\sin B}{\sinh b} = \frac{\sin C}{\sinh c} = \frac{K}{\sinh a \sinh b \sinh c}, \tag{10}$$

där

$$K^2 = 2 \cosh a \cosh b \cosh c - \cosh^2 a - \cosh^2 b - \cosh^2 c + 1.$$

Vid beviset, som ej torde behöva utföras här, bildar man ur (9) $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$, vilket lätt ger den önskade relationen.

Slutligen erhålles ur (9) och (10) det återstående cosinusteoremet (»cosinus för en sida»):

$$\cosh a = \frac{\cos B \cos C + \cos A}{\sin B \sin C}. \tag{11}$$

Vid beviset kan man lämpligen bilda $\cosh a \sin B \sin C$ och $\cos B \cos C$ samt visa, att dessa uttrycks differens $= \cos A$.

Ur (9) och (11) kunna även formler för halva vinkeln (halva sidan) erhållas, t. ex. om $a + b + c = 2s$:

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sinh (s-b) \sinh (s-c)}{\sinh s \sinh (s-a)}}.$$

Kvantiteterna $s - a$, $s - b$, $s - c$ äro alla positiva, ty emedan a, b och c äro geodetiska avstånd, är vart och ett av dessa mindre än summan av de två andra.

Det förtjänar kanske att nämnas, att den härledning som här använts kan tillämpas nästan ordagrant, om man vill erhålla den sfäriska trigonometriens grundformler. Man måste då överallt ersätta $L(x, y)$ med formen

$$E(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3,$$

så att vanlig (euklidisk) metrik kommer att gälla i rymden.

De pytagoreiska trianglarnas fundamentaltransformation.

Av B. BERGGREN.

I denna tidskrift, årg. *17*, 129 visade jag, att man av en godtycklig pytagoreisk triangel kunde genom användning av trenne transformationer erhålla tre nya pytagoreiska trianglar, och att man, utgående från triangeln med sidorna 3, 4, 5, kunde genom upprepad användning av dessa transformationer erhålla varje annan pytagoreisk triangel.

Fundamentaltransformationen var denna

$$\left.\begin{aligned} x &= 3a + 2b + 2c \\ y &= 2a + 2b + c \\ z &= 2a + b + 2c \end{aligned}\right\}, \quad (1)$$

där a, b, c äro den givna triangelns sidor ($a^2 = b^2 + c^2$; $b > c$) och x, y, z den söktas. De båda andra erhållas ur (1) genom utbyte av c mot $-c$, resp. b, c mot c, $-b$. Man får

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 3a + 2b - 2c \\ y_1 &= 2a + 2b - c \\ z_1 &= 2a + b - 2c \end{aligned}\right\}, \quad (2) \qquad \left.\begin{aligned} x_2 &= 3a + 2c - 2b \\ y_2 &= 2a + 2c - b \\ z_2 &= 2a + c - 2b \end{aligned}\right\}. \quad (3)$$

Dessa tre formelsystem synas mig direkt locka till geometrisk behandling. Min avsikt är dock ej att här lämna någon grundligare utredning. Jag vill blott visa, hur man lätt når fram till en geometrisk sats, som ej saknar en viss skönhet och dessutom är så elementär, att varje gymnasist utan större svårighet kan tillägna sig den.

För varje triangel gälla formlerna $r = \frac{T}{p}$; $r_a = \frac{T}{p-a}$; $r_b = \frac{T}{p-b}$; $r_c = \frac{T}{p-c}$, där beteckningarna kunna förutsättas så allmänt kända, att de ej tarva någon presentation. Är nu triangeln rätvinklig ($a^2 = b^2 + c^2$), så är $r = p - a$; alltså

$$T = p(p-a) = (p-b)(p-c);$$
$$r_a = p,\ r_b = p - c;\ r_c = p - b.$$

Införes $2p = a + b + c$ i syst. (1), övergår detta till

$$\left.\begin{aligned} x &= 4p + a \\ y &= 4p - c \\ z &= 4p - b \end{aligned}\right\}. \quad (1\,a)$$

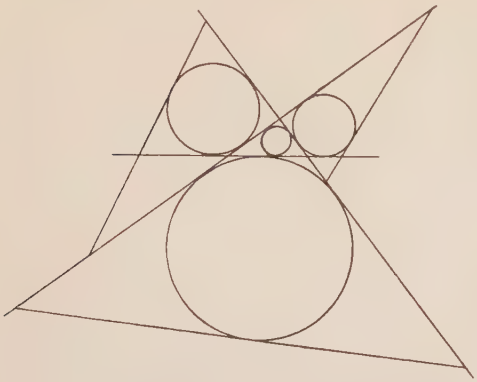


Fig. 1. Den egyptiska triangeln med dess tangentcirklar och förgreningstrianglar.

Vi sätta analogt $2\pi = x + y + z$ och beteckna med ϱ den nya triangelns inskrivna cirkels radie och få $\pi = 5p + a$ och alltså $\varrho = \pi - x = p = r_a$.

Vår nya triangel (x, y, z) kan alltså omskrivas den vidskrivna cirkel, som tangerar den givnas hypotenusa a.

Behandla vi systemen (2) och (3) på analogt sätt, få vi för (2) $2\pi_1 = x_1 + y_1 + z_1 = 7a + 5b - 5c$; $2\varrho_1 = 2\pi_1 - 2x_1 = a + b - c = 2p - 2c$ och alltså $\varrho_1 = p - c = r_b$.

För (3) fås lika enkelt $\varrho_2 = r_c$.

Som sammanfattning ha vi alltså

$$\varrho = r_a,\ \varrho_1 = r_b,\ \varrho_2 = r_c. \quad (4)$$

De tre trianglar (x, y, z), (x_1, y_1, z_1) och (x_2, y_2, z_2), som ha triangeln (a, b, c) till »förgreningstriangel» (l. c.), äro alltså geometriskt förbundna på så sätt att de kunna omskrivas kring var sin av de tre vidskrivna cirklarna till triangeln (a, b, c). Fig. 1 visar detta för den egyptiska triangeln (5, 4, 3) och dess förgreningar (29, 21, 20), (17, 15, 8) och (13, 12, 5). Den sistnämnda är den kinesiska triangeln.

Det vill synas mig, som om åtskilliga trigonometriska, för skolstadiet lämpade problem även vore att hämta här. Att någon begränsning till heltalstrianglar härvid ej är nödvändig behöver väl knappast framhållas.

Något om segelflygning och dess energikällor i atmosfären. III.[1]

Av H. HENRIKSON.

b. *Instrålningstermik.*

Den till jordytan instrålade solenergien förmår ej i någon nämnvärd grad direkt uppvärma de luftskikt, genom vilka den passerar. Atmosfärens uppvärmning sker i stället till största delen underifrån genom jordytans förmedling. Orsaken till detta betydelsefulla faktum är ju att den mot jorden infallande kortvågiga solstrålningen genomsläppes utan att märkbart försvagas, medan den från jordytan efter dennas uppvärmning utgående långvågiga värmestrålningen till stor del absorberas av luften, som alltså verkar på samma sätt som glastaket över en drivbänk. Det är framför allt vattenångan och kolsyran i atmosfären, som absorberar denna långvågiga värmestrålning. Ju torrare luften är, desto mera värme försvinner ut mot världsrymden.

Genom att uppvärmningen sker underifrån skapas en första förutsättning för att vertikala luftströmmar skola komma till stånd. Enbart uppvärmning räcker emellertid ej. Denna måste med nödvändighet också ske olikformigt, så att temperaturdifferenser uppkomma i horisontell led, ty annars kunna ej uppdriftskrafter träda i verksamhet. Detta framgår bl. a. av uttrycket för accelerationen, $\frac{d^2z}{dt^2} = g\,\frac{T' - T}{T}$, som också ger besked om en annan sak: för en och samma temperaturdifferens mellan den uppvärmda luften och omgivningen blir accelerationen eller den uppåtriktade kraften *mindre* ju *högre* omgivningens temperatur T är. Detta faktum verkar ofta förbluffande, då man gärna vill föreställa sig, att ju högre lufttemperaturen är, desto starkare kunna uppvindarna bli. Man övertygar sig emellertid lätt om att variationer i temperaturdifferensen $T' - T$ i regel har många gånger större verkan än förändringar i själva omgivningens temperatur.

För olikformig uppvärmning är det i verkligheten väl sörjt därigenom att jordytans beskaffenhet varierar från en plats till en annan. Största skillnaden uppträder mellan land och vatten. Fast

[1] Forts. från Elementas marshäfte 1943, s. 22.

mark uppvärmes hastigt, vatten däremot mycket långsamt och mera likformigt. Olikheterna bero på skillnaden i spec. värme och i absorptions- och värmeledningsförmåga. Genom mätningar har man funnit, att solstrålningen en normal sommardag under 15 min. förmår uppvärma ytan av en granitklippa 1,2°, bar sandmark 2,2° men ytvattnet på en insjö blott 0,05°. Intet ämne i fast eller flytande form är ju så svårt att uppvärma som vatten. Av den fasta marken uppvärmes endast ett tunt ytskikt, medan vatten i stor utsträckning släpper igenom värme. I t. ex. sand märks knappast uppvärmningen på större djup än c:a 1 dm, medan den för vatten är ungefär densamma på detta djup som vid ytan.

För att olikformigheter i jordytans och därmed också luftens uppvärmning skola uppstå äro emellertid betydligt mindre motsättningar tillräckliga än de, som förefinnas mellan land och vatten. De viktigaste faktorerna härvidlag äro variationer i den fasta markens sammansättning och vattenhalt samt i vegetation och molnighet. Torr mark uppvärmes mera än fuktig vid samma intensitet i strålningen. En stor del av solenergien åtgår nämligen för vattnets avdunstning, och yttemperaturen stiger därför ej nämnvärt, förrän största delen av vattnet övergått i vattenånga. För avdunstning av 1 gr vatten åtgår lika mycket värme som för uppvärmning av 1 kg luft (normalt omkring $^3/_4$ m^3) 2,5 — 3°. Vegetationen förbrukar också ansenliga värmemängder dels för avdunstning av vatten dels för kemiska processer. Växlingar i molnigheten orsaka variationer såväl i markytans uppvärmning genom den direkta solstrålningen som i den diffusa strålningen och ha därför den allra största betydelse. Följande lilla tabell må ge en föreställning om hur förhållandena kunna skifta.

	Klar majdag kl. 13	Mulen aug.dag kl. 13
Bar sandmark	23,2°	18,8°
Skogbevuxen sandmark	13,9	15,5
Veteåker	17,4	16,5
Bar myrmark	18,4	17,7
Skogbevuxen myrmark	12,8	13,9

Skogens inflytande på marktemperaturen är särskilt anmärkningsvärt. Vid klart väder uppfångas den direkta solstrålningen med bestämd riktning av trädkronorna, medan den diffusa strålningen vid molntäckt himmel kommer från alla håll och därför lättare kan tränga igenom. Undersökningar ha visat, att de största temperaturvariationerna förekomma i den mellan trädkronorna

befintliga luften. Inom skogklädda områden magasineras stora mängder solenergi, vilket är mycket viktigt för uppkomsten av s. k. kvällstermik.

Markens uppvärmning är också beroende av solstrålarnas infallsvinkel. Ju snedare dessa infalla mot jordytan, över desto större yta sprides energien. Kuperad terräng kan således underlätta en olikformig uppvärmning av markytan.

Till det anförda kan fig. 8 tjäna som illustration. En närmare förklaring till den i fig. tänkta markbeskaffenheten torde vara överflödig.

Kraftig solstrålning över ett kuperat landskap bestående omväxlande av t. ex. sand- och myrmark, klipphällar, skog och åkrar av skilda slag, sjöar och mindre vattensamlingar osv. är vad som behövs för att tillfredsställa segelflygarens anspråk på god termik.

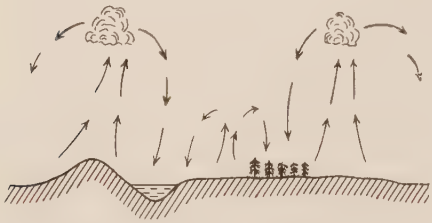


Fig. 8. De vertikala luftströmmarnas fördelning över en ojämnt uppvärmd markyta.

Talrika mätningar av temperaturen i fria atmosfären ha visat, att temperaturgradienten här endast sällan överstiger 1 °/100 m. Detta betyder, att atmosfärens temperaturskiktning i regel är stabil för torradiabatiska tillståndsförändringar (under kondensationsnivån). Icke desto mindre förekomma dagligen under sommarhalvåret vertikala luftströmmar av betydande styrka även utan molnbildning. I ett föregående sammanhang har visats, att en stabil skiktning visserligen utgör ett hinder för vertikalrörelser men ej omöjliggör sådana. För att de skola kunna komma igång måste i så fall energi tillföras utifrån, vilket som vi sett så gott som uteslutande sker genom uppvärmning av markytan. Om vi bortse från de allra lägsta luftskikten, ger fig. 9 en föreställning om utvecklingen en normal sommardag. I fig. anger den heldragna brutna linjen temperaturfördelningen i atmosfären vid tiden för soluppgången. Under natten har genom avkylningen en markinversion bildats upp till 200 m höjd. För att komma förbi denna erfordras en uppvärmning av minst 5°. Upp till 1 000 meter går det sedan lättare att övervinna stabiliteten, 4° ytterligare uppvärmning är tillräckligt. Höjdinversionen mellan 1 000 och 1 200 m verkar som ny broms, och för att komma igenom detta blott 200 m tjocka skikt behövs ännu 5° uppvärmning. Det

erfordras således inalles 14° temperaturhöjning för att bortskaffa de båda inversionerna.

Samtidigt som vertikalrörelserna pågå förändras skiktningskurvan. De uppåtgående luftströmmarna måste kompenseras genom nedåtriktade rörelser i omgivningen, och dessa komma till stånd därigenom att hela luftskikt med stor horisontell utsträckning sjunka, varvid uppvärmning sker torradiabatiskt med 1 °/100 m. På så sätt fördelas den tillförda energien över hela det höjdintervall och område som vertikalrörelserna omfatta, stabiliteten minskas mer och mer, och den geometriska temperaturgradienten närmar sig alltmer 1 °/100 m, oftast dock utan att nå detta värde.

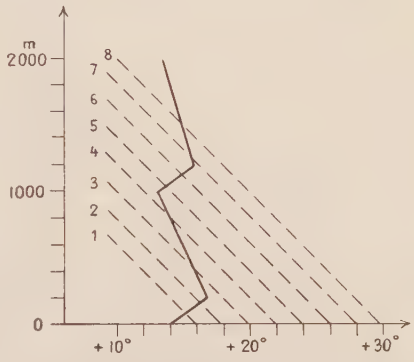


Fig. 9. Den heldragna brutna linjen anger temperaturfördelningen (skiktningskurvan) tidigt en sommarmorgon. De streckade linjerna äro torradiabater, som visa den gradvisa uppvärmningens inverkan på uppvindarnas vertikala mäktighet (jfr fig. 7 marshäftet).

I det närmast markytan belägna, några meter tjocka luftskiktet påträffa vi temperaturgradienter, som ha helt annan storleksordning än de som förekomma i fria atmosfären. Följande exempel är tämligen representativt för en varm sommardag: marken 50,4°, 29 cm höjd 32,2°, 54 cm 30,0° och 300 cm 28,9°. Mellan höjderna 29 och 54 cm utgör enligt denna mätning temperaturdifferensen 2,2° och mellan 54 och 300 cm 1,1°. Detta motsvarar en temperaturgradient av ca 900° resp. 45 °/100 m! Inom det tunna, marknära luftskiktet finns det således goda förutsättningar för uppkomsten av vertikalrörelser. Upp till 1—2 meters höjd över markytan äro dessa synnerligen oordnade, men däröver till 20—30 m ha de uppåtstigande små luftpartiklarna slutit sig mera samman och bilda spiralformiga trådar. Under varma och lugna sommardagar kan man tydligt se, hur luften »dallrar» och ibland till och med med blotta ögat följa de små ringlande luftströmmarna på deras väg uppåt. Ju kraftigare och ojämnare uppvärmningen är, desto högre nå de uppåtstigande luftvolymerna, innan temperaturmotsättningen mellan dessa och omgivningen utjämnats. Samtidigt växa de trådformiga luftströmmarna i omfång, och på ett eller annat hundratal meters höjd

ha de slutit sig samman till en större enhet, en liten varmluftballong. Först något högre upp ha ett flertal sådana hunnit förena sig till en verklig »termikblåsa», stor nog att under sin färd uppåt bära ett segelflygplan.

Man kan likna det hela vid rötterna till ett träd. Liksom detta genom rötterna sitter fast vid jorden och för sin tillväxt är beroende av dem, häfta termikblåsorna delvis fast vid marken genom de talrika varmluftsträngarna. Först sedan värmeströmmen fortgått en stund och blåsans temperatur med några grader överstiger

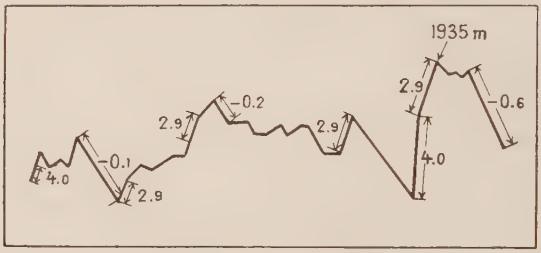


Fig. 10. Ett barogram från en segelflygning utförd vid instrålningstermik. Siffrorna ange luftens vertikalhastighet i m/sek.

omgivningens, så att labiliteten blivit tillräckligt stor, ger sig blåsan iväg uppåt, varvid även dess »rötter» följa med. Vid marken strömmar kyligare luft till från sidorna, och samma procedur upprepas med jämna mellanrum, till dess värmetillförseln genom solstrålningen upphör. På grund härav får termiken en pulserande karaktär (se fig. 10) och är således alls icke någon jämn ström av uppåtstigande luft. Tidsintervallet mellan termikblåsorna varierar inom rätt vida gränser beroende på instrålningens styrka. I regel uppgår tidsskillnaden till 5—15 minuter. Om emellertid solstrålningen är mycket stark och förhållandena i övrigt gynnsamma, följa termikblåsorna tätt på varandra men äro då också av mindre omfång. De kunna i viss mån liknas vid de små luftblåsor, som stiga upp från bottnen av ett kokkärl när man värmer vatten.

För att termikblåsorna skola kunna stiga till väders fordras en utlösningsanordning. Ju mindre möjligheterna till störningar av det labila jämviktsläget äro, desto större horisontella temperaturdifferenser erfordras, innan ordnade uppvindar komma igång, t. ex. vid lugnt väder. Ändringar i den horisontella vindens styrka och riktning kunna ibland vara tillräckliga, men de bästa möjligheterna erbjuder kuperad terräng. Ett hang eller vilken höjdsträckning som helst är en förträfflig utlösningsanordning. Omkring ett hang kan

utlösningen ske såväl i förterrängen som på vind- eller läsidan, varvid hangvinden kan avsevärt förstärkas. Vetter läsidan mot den infallande solstrålningen, kommer uppvindsområdet att bli förskjutet åt detta håll, vilket innebär vissa risker för att man kan råka in i lävirveln vid avbrott i termiken.

Ett exempel på hur ett skogsbryn kan tjänstgöra som utlösningsanordning visas i fig. 11. Man har här använt en mycket vanlig metod för utforskandet av uppvindarnas styrka och utbredning. En gummiballong fylles med vätgas och avväges så att den varken stiger eller sjunker. När den sedan släppes följer den tämligen väl luften i dess rörelser. Med täta mellanrum bestämmes ballongens läge i rymden genom vinkelmätningar med två teodoliter på känt avstånd från varandra. I stället för den ena teodoliten kan man använda ett avståndsmätningsinstrument. Enkla räkningar ge sedan ballongens bana och uppvindarnas styrka. För att komma över det uppvindsvaga skiktet närmast marken kan man släppa ballongen från ett flygplan. Så har skett vid den mätning som fig. 11 ger en bild av. Ballongen har släppts på 500 meters höjd, varvid den först sjunkit och av vinden långsamt förts fram mot skogskanten, där den råkat in i ett kraftigt uppvindsområde och stigit med 2,5 m/sek från 300 m till nära 1 000 m. Här ha uppvindarna tagit slut, men strax därefter har ballongen kommit in i en ny och tydligen energirikare termikblåsa, som fört den vidare uppåt. Den framför skogskanten uppvärmda luften har genom en vindstöt förts fram till skogsbrynet, vilket varit tillräckligt för att labiliteten skulle utlösas.

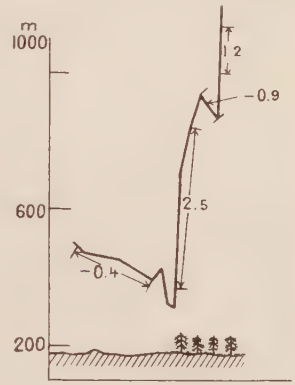


Fig. 11. Ett skogsbryn kan göra tjänst som utlösningsanordning för termiken. En vätgasfylld, avvägd gummiballong, som släppts från ett flygplan på 500 m höjd, följer med luftströmmen och råkar in i ett uppvindsområde vid skogskanten. Siffrorna ange luftens vertikalhast. i m/sek.

Erfarenheterna och en mångfald mätningar visa, att uppvindarna i allmänhet ej nå bärkraftig styrka, 1—2 m/sek, förrän på 400—500 meters höjd. De kraftigaste uppvindarna vid ren termik utan molnbildning kunna nå en hastighet av 4—6 m/sek, och de påträffas under kondensationsnivån. För att hjälpa segelflygplanet över det uppvindsvaga markskiktet måste man i regel vinscha upp

det eller bogsera upp det med motorflygplan, såvida ej starten kan ske från ett hang. Efter losskopplingen är segelflygaren hänvisad till sin egen förmåga att leta rätt på uppvindsområdena. En god kännedom om solstrålningens inverkan på olika slags mark och om utlösningsmöjligheterna är då av avgörande betydelse. Får han sällskap med t. ex. några måsar, kan han använda dem som studieobjekt och vägvisare, ty de förstå att väl tillvarataga varje tillfälle som bjuds att utan vingslag låta sig skjutsas uppåt. Det gäller att vinna höjd så fort som möjligt, ty då kan möjligheterna bättre överblickas.

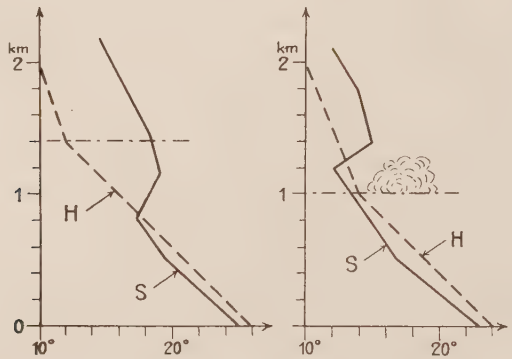


Fig. 12. Den heldragna brutna linjen är skiktningskurvan *S* vid typisk instrålningstermik. Den streckade brutna linjen *H* är en hävningskurva. I *a* ligger kondensationsnivån (streckpunkterad linje) ovanför inversionen, vilket förhindrar molnbildning. I *b* ligger kondensationsnivån omedelbart under inversionen och smärre platta cumulusmoln bildas som synliga tecken på var uppvindarna äro att söka.

Med enbart instrålningstermik utan molnbildning torde man endast i undantagsfall nå större höjder än 1 500—2 000 m. Omkring 1 000 m får nog anses som normalt. För övrigt är det rätt ovanligt med vackra sommardagar utan spår av cumulus på himlen, ty i regel leder uppvärmningen till molnbildning. Förutsättningar för helklara dagar finnas inom de centrala delarna av ett högtrycksområde, där luften i höjden har en nedåtgående rörelse och på grund härav uppvärmes adiabatiskt 1 °/100 m. På 1 000—2 000 m upphör i regel nedsjunkningen, och på denna höjd bildas då en temperaturinversion, vars storlek är beroende av de nedåtriktade luftströmmarnas intensitet. Inversionen kan stundom vara så kraf-

tig, att ej ens en uppvärmning till 30—35° vid marken förmår bortskaffa den. Uppvindarna (konvektionsströmmarna) som alstras genom uppvärmningen bromsas upp av inversionen, som därför också fått namnet spärrskikt. Om inversionen ligger under kondensationsnivån, förhindras molnbildning och luften blir disig genom att stoftpartiklar och andra föroreningar samlas i markskiktet. Fig. 12 a avser att ge ett exempel på temperaturfördelningen i höjden vid ett sådant tillfälle. Klar och genomskinlig luft tyder däremot på att stabiliteten är liten och möjligheterna till högtnående uppvindar stora.

Trots att utrymmet i vertikal led är tämligen begränsat vid ren instrålningstermik, kan en van segelflygare ofta hålla sig uppe i åtskilliga timmar (t. ex. 2—3 timmar över Stockholm den $^2/_5$ 1943, max. höjd 1 700 m) och även tillryggalägga ansenliga sträckor (15—20 mil). Det senare är särskilt anmärkningsvärt i betraktande av att vinden i höjden i dylika fall oftast är rätt svag och segelflygplanets färdhastighet därför liten.

Om inversionen ligger omedelbart under kondensationsnivån, kan det inträffa, att uppvindarna åtminstone delvis förmå tränga igenom spärrskiktet, när uppvärmningen nått tillräckligt långt. Detta visar sig därigenom att det bildas små vita molntappar, som emellertid snabbt åter upplösas. Termikens pulserande karaktär blir härigenom mycket tydlig. Vidare kan det hända, att kondensationsnivån ligger något under inversionen (se fig. 12 b). I så fall blir molnbildningen livligare, men de små cumulusmolnen få ett mer eller mindre platt utseende, därför att inversionen, om den är tillräckligt kraftig, även nu hindrar fortsatta vertikalrörelser. I intetdera fallet kan cumulusbildningen utnyttjas för att vinna höjd men väl underlätta sökandet efter uppvindsområdena.

(Forts.)

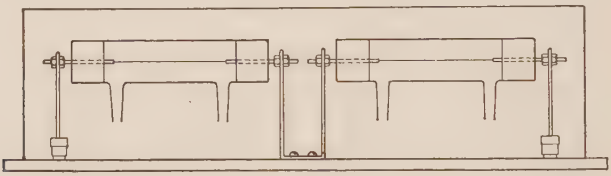
Apparat för demonstration av gasers värmeledningsförmåga.

Av **GÖSTA FUNKE.**

De apparater, som användas för demonstration av gasers värmeledningsförmåga, bestå vanligen av ett antal glasrör, fyllda med olika gaser och med ett papper målat med värmefärg i centrum av röret. De ge endast vaga utslag för de olika gasernas ledningsförmåga, i varje fall för eleverna längre bak i klassen. Den apparat,

som här beskrives, ger skarpa, även på långt håll väl synliga utslag i intresseväckande form och är av synnerligen enkel konstruktion.

Apparatens huvuddelar (se fig.) äro två glasrör (diameter ca 3 cm), i vilkas centrum 0,1 mm platinatrådar äro uppsatta. Vardera tråden är ca 1 dm lång. Trådarna böra klippas ur samma tråd för att säkert få samma diameter. De seriekopplas och uppvärmas medelst en och samma elektriska ström. De komma därvid att glöda olika starkt, beroende på vilken gas, som finnes i rören.



Glasrören äro försedda med gummiproppar med genomförda mässingsbultar, vid vilka trådarna äro fastgjorda medelst skruvar, så att de lätt kunna utbytas mot nya. Rören uppbäras av fyra ståndare, fastgjorda på en bottenplatta. Som bakgrund för de glödande trådarna är anbragt en svart bakelitplatta. De yttre ståndarna äro försedda med stickkontakter.

Jag brukar göra följande försök med apparaten.

1) Ström sändes genom trådarna, då båda rören äro fyllda med luft av atmosfärstryck. Båda trådarna glöda lika starkt.

2) Ena röret fylles med lysgas. (Tänk på att driva ut all luft, så att knallgas ej bildas.) Samma ström som förut släppes på. Tråden i lysgas är nu fullkomligt mörk, tråden i luft lyser som förut.

3) Ena röret evakueras med vattensug. En svag ström släppes på. Denna ökas successivt, tills tråden i vakuum glöder starkt, under det att tråden i luft är alldeles mörk.

Apparaten kan med fördel användas, då glödlampan genomgås. Man kan då åskådliggöra skillnaden mellan gasfyllda lampor och vakuumlampor samt mellan lampor med olika gasfyllning.

Apparaten har utförts som enskilt arbete av en elev i fjärde ringen.

Vidskrivna cirklarna till ett cirkeltrapets.

Av C. BODLUND.

Den i Elementa *20*, sid. 271 av C. E. Blom angivna metoden att härleda formeln för ytan av ett cirkeltrapets kan även användas för härledning av de vidskrivna cirklarnas radier.

Utdragas två motstående sidor, bildas två likformiga trianglar T och t (se fig.). Om F är trapetsets yta, erhålles

$$\frac{T}{a^2} = \frac{t}{c^2} = \frac{F}{a^2 - c^2}$$

och

$$\frac{a}{c} = \frac{y+b}{x} = \frac{x-d}{y} = \frac{x+y+b+d}{x+y};$$

$$\therefore \frac{x+y+b+d}{a} = \frac{x+y}{c} = \frac{b+d}{a-c}.$$

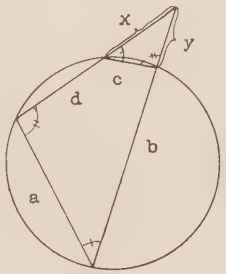


Fig.

Om omkretsarna i T och t äro $2S$ och $2s$, är

$$S - a = \frac{1}{2}(x+y+b+d-a) = \frac{1}{2}\left(a \cdot \frac{b+d}{a-c} - a\right) = \frac{a(p-a)}{a-c}$$

och

$$s = \frac{1}{2}(x+y+c) = \frac{1}{2}\left(c \cdot \frac{b+d}{a-c} + c\right) = \frac{c(p-c)}{a-c},$$

varav:

$$r_a = \frac{T}{S-a} = \frac{a^2F}{a^2-c^2} \cdot \frac{a-c}{a(p-a)} = \frac{a}{a+c} \cdot \frac{F}{p-a},$$

$$r_c = \frac{t}{s} = \frac{c^2F}{a^2-c^2} \cdot \frac{a-c}{c(p-c)} = \frac{c}{a+c} \cdot \frac{F}{p-c}.$$

På motsvarande sätt erhålles

$$r_b = \frac{b}{b-d} \cdot \frac{F}{p-b}, \qquad r_d = \frac{d}{b+d} \cdot \frac{F}{p-d}.$$

För ett omskrivbart cirkeltrapets är $F = \sqrt{abcd}$,

$$r = \frac{F}{p}, \quad r_a = \frac{aF}{p(p-a)} \text{ o. s. v., varav: } r = \sqrt[4]{r_a \cdot r_b \cdot r_c \cdot r_d}.$$

Meddelande från Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning.[1]

Vårsammanträdet den 22 april 1943.

Sedan flera år har på styrelsens önskelista stått ett besök vid Vetenskapsakademiens forskningsinstitut för fysik, men först i år har detta önskemål kunnat förverkligas. Såsom var att vänta blev tillslutningen stor, och inte mindre än ca 90 personer mötte upp vid vårsammanträdet den 22 april i hörsalen till institutet för org.-kem. forskning i Stockholm Professor Manne Siegbahn höll först ett orienterande föredrag om de experimentella metoderna inom kärnfysiken, varvid han redogjorde för den på forskningsinstitutet vid Frescati byggda cyklotronen och övrig apparatutrustning vid institutet samt de arbeten som utföras där.

Därefter höll fil. dr. Per Collinder ett kortare anförande om den s. k. planetupptäckten julen 1942. Talaren erinrade om att planeterna Neptunus och Pluto först spårats genom observerade störningar i banrörelsen hos den närmast innanför den nyupptäckta planeten belägna planeten i solsystemet. Samma metod har tidigare lett till upptäckten av beledsagare till andra stjärnor än solen, t. ex. den ryktbara Sirius-drabanten. Docent E. Holmberg i Lund publicerade år 1938 en undersökning över periodiskt varierande störningar i fixstjärnornas parallaxer, varvid han fann att i ett avsevärt antal av de undersökta fallen störningarna tydde på närvaron av mindre följeslagare, stundom stjärnor, men stundom även planeter. Den notis om en nyupptäckt jätteplanet som förliden vinter gick genom en stor del av den svenska pressen, visade sig sedan avse en beledsagare till fixstjärnan 61 Cygni i Svanens stjärnbild. Existensen av denna drabant hade den danskfödde astronomen Strandh — nu i Amerika — funnit framgå ur nytt material för det nämnda stjärnsystemet, vilket redan tidigare med likartat resultat behandlats av doc. Holmberg enligt samma metod. Upptäckten

[1] Tidigare medd. från föreningen återfinnas i Elementa *16*, 226, 1933; *17*, 46 och 113, 1934; *18*, 42 och 47, 1935; *19*, 36, 1936; *20*, 42 och 133, 1937; *21*, 47, 1938; *22*, 45 och 113, 1939; *23*, 41 och 234, 1940; *24*, 38 och 89, 1941; *25*, 38 och 153, 1942; *26*, 39, 1943.

gällde således icke en planet utan en fixstjärna, inte i vårt solsystem utan i stjärnstystemet 61 Cygni och den var inte ny — men annars var notisen rätt! Att framställa denna amerikanska undersökning som en epokgörande nyhet rörande vårt planetsystem vittnar därför — påpekade talaren — om bristande samband mellan svensk vetenskap, press och allmänhet.

Efter gemensam lunch på Stockholms studenters kårhus restaurang avreste deltagarna med tåg till Frescati, där visning av prof. Siegbahns institution skedde i två omgångar. För dem som måste vänta till andra omgången hade beretts tillfälle att besöka Riksmuseets mineralogiska avdelning, där prof. G. Aminoff visade sin institution och talade om sina röntgenspektrografiska undersökningar och dr. N. Zenzén demonstrerade museets vackra mineralsamlingar.

Vid rundvandringen genom Vetenskapsakademiens forskningsinstitut för fysik voro deltagarna uppdelade i tre grupper, och som ciceroner fungerade medarbetarna vid institutet lic. Eklund, mag. Atterling och kand. Malmfors. Här kan endast lämnas några korta antydningar om de högintressanta demonstrationer, som institutet på ett synnerligen instruktivt sätt hade ordnat och som nu förevisades under det ca 1,5 t. långa besöket.

1. Cyklotronen. Cyklotronmagnetens fält är vid acceleration av deuteroner (atomkärnor till väte med atomvikten 2) något över 15 000 gauss (spänning 63 V, strömstyrka ca 1 100 A). Spänningen mellan de D-formade elektroderna i cyklotrontanken är 40—50 kV. Deutonerna få längst ut en energi av ca 6 MeV. Deras räckvidd i luft skulle vara ca 30 cm. Magneten väger 17 ton. Cyklotronen kan producera en α-strålning (med helium i vakuumtanken), som är likvärdig med strålningen från 10 kg radium (hela världsförrådet radium är 900 g). Cyklotronens kapacitet i fråga om neutronalstring motsvarar 100 kg radium.

Vid demonstrationen visades D-elektroderna och medelst glimlampor effekten av högfrekvensfältet kring de kopparrör, genom vilka högfrekvensoscillatorn står i förbindelse med D-elektroderna. För att få ett begrepp om magentfältets styrka fingo besökarna sticka in ett kopparrör i fältet. Då röret vreds runt, uppkom virvelströmmar i kopparn, som orsakade en kraftig bromsning av rörelsen. Det kändes som om röret vreds runt i en mycket seg vätska.

2. I *neutrongeneratorn* accelererades kärnor av tungt väte (deuteroner) med en spänning om ca 200 kV. Då deuteronerna få träffa ett tunt skikt av tung is (D_2O), erhålles neutroner enligt formeln

$$^{2}_{1}\mathrm{D} + {}^{2}_{1}\mathrm{D} = {}^{1}_{0}\mathrm{n} + {}^{3}_{2}\mathrm{He}.$$

En silverslant bestrålades under ett par minuter med *långsamma* neutroner (slanten var inlagd mellan block av paraffin, som bromsar neutronerna), varvid genom neutroninfångning bildas bl. a. den radioaktiva silverisotopen $^{108}_{47}Ag$. Aktiviteten påvisades med ett Geiger-Müller-rör med tillhörande förstärkare och räkneverk. De enstaka knäppningarna i räkneröret, orsakade av den normalt förekommande kosmiska strålningen, övergick genast till en hastig trumvirvel som av en kulspruta, varefter frekvensen långsamt avtog. Halveringstiden för den nämnda silverisotopen är ett par minuter.

3. I *Wilsonkammaren* demonstrerades spår av β-partiklar från den radioaktiva fosforisotopen $^{32}_{15}P$, framställd i cyklotronen.

4. Jonisationskammare, ansluten till proportionalförstärkare och katodstråleoscillograf. Med jonisationskammaren, vars djup är 3 mm, påvisades, hur den av en viss α-strålning frambragta jonisationen varierade med avståndet från strålningskällan; jonisationen växer först, uppnår ett maximum och sjunker till 0, när avståndet blir större än partiklarnas räckvidd. Vid försöket användes ett poloniumpreparat (räckvidd ca 39 mm).

5. Lic. Siegbahn demonstrerade två spektografer för registrering av β-strålningen från radioaktiva element. Den ena spektrografen är i princip en magnetisk lins; i den andra användes den s. k. semicirkulära fokusseringsmetoden. I första fallet användes Geiger-Müller-rör för registrering av strålningen, i senare fallet alternativt Geiger-Müller-rör och fotografisk plåt. Geiger-Müller-rören äro försedda med fönster av mycket tunna folier, som framställas på följande sätt.

Zaponlack upplöses i amylacetat. En mindre kristallisationsskål fylles med destillerat vatten och en koppartrådsring (ca 5 cm i diameter) sänkes ned i vattnet. Man häller några droppar av lacket på vattenytan i skålen, varvid lacket genast sprider sig. Efter någon minut har ytan stelnat och man kan försiktigt lyfta upp hinnan på kopparringen. Dess tjocklek kan i bästa fall nedbringas till 0,1 μ. Folierna uppvisa vackra interferensfärger.

6. Under *interferometern* placerades en kalkspatkristall. Interferensfenomenet i gränsskiktet mellan kristallens övre yta och den planparallella glasplattan i interferometern iakttogs. Interferensmönstret bestod av flera partier; i varje parti voro interferensbanden parallellförskjutna i förhållande till banden i angränsande partier. Detta berodde på förekomsten av trappstegsliknande avsatser i kristallytan. Vid spaltningen av kristallen har klyvningen ägt rum efter olika nivåer.

7. En av institutets *gittermaskiner* visades under gång. Med denna maskin kan man ritsa 1 440 ritsor per millimeter.

8. I *spektrometern* hade uppställts en glasplatta med två reflexionsgitter (det ena ovanför det andra). I det ena gittret var ritsningen felfri, i det andra funnos periodiskt återkommande fel. Spektrometern var inställd på den gula dubbellinjen i Hg-spektrum. Med det felaktiga gittret erhållas falska linjer, s. k. »spöken». Gittren voro ritsade på institutet.

9. I *elektronmikroskopet* visades en kiselalg vid en linjär, elektronoptisk förstoring av 10 000 gånger (möjlig förstoring 15 000 ggr). Genom fotografisk efterförstoring kan man uppnå 80 000 ggr förstoring. Man kan även taga upp stereoskopiska bilder. För accelerationen av elektronerna användes vid institutets elektronmikroskop en spänning av 60—70 kV.

Styrelsen vill härmed till institutets föreståndare och medarbetare framföra sitt varma tack för den välordnade och synnerligen givande visningen.

Bror Gustaver.

Föreningen i Lund för matematisk-naturvetenskaplig undervisning.

Föreningen i Lund för matematisk-naturvetenskaplig undervisning sammanträdde i Lund den 7 mars 1943, varvid ett 70-tal medlemmar närvoro.

Vid årsmötesförhandlingarna omvaldes till ordf. för föreningen i dess helhet rektor P. G. Persson, Malmö. Till sekr. valdes docent Osvald Lundquist efter docent Börje Svensson, som hade avsagt sig på grund av flyttning från staden. Till kassör omvaldes docent Börje Svensson. Övriga styrelseledamöter utgöras enligt stadgarna av sektionernas styrelseledamöter, vilka valdes vid resp. sektionssammanträden. Till revisorer omvaldes lektor G. Arvidsson, Malmö, och läroverksadjunkt R. Nordenstedt, Malmö.

Inom sektionen för matematik, fysik och kemi omvaldes till ordf. rektor P. G. Persson, Malmö, samt till v. ordf., rektorerna E. Hernqvist, Halmstad, och K. Parck, Eslöv. Till sekr. valdes docent Osvald Lundquist, Lund. Till förutvarande sekr., docent Börje Svensson, framförde ordf. föreningens tack för det arbete denne utfört inom föreningen alltsedan den bildades för snart tio år sedan. Till styrelseledamöter utan särskild funktion omvaldes adjunkt, T. Edqvist, Malmö, rektor H. Holmgren, Skurup, lektor A. Jönsson, Malmö, professor J. Koch, rektor H. Körner, lektor A. Leide, professor K. Lundmark, rektor F. Montén, Malmö, lektor H. Nordström, Växjö, samt rektor S. Sjöberg, lektor Bernh.

Svensson, docent Börje Svensson och fil. lic. Eve Staffansson, alla i Lund.

Inom sektionen för biologi omvaldes till ordf. professor H. Kylin, till v. ordf. professor T. Gislén och till sekr. fil. lic. Y. Löwegren, Lund. Till styrelseledamöter utan särskild funktion omvaldes lektor A. Andersson, Malmö, docent H. Brattström, Lund, lektor O. Gertz, Lund, lektor O. Larsén, Halmstad, adjunkt O. Palmgren, Lund, och adjunkt Å. Uddling, Kristianstad.

I anslutning till de gemensamma årsmötesförhandlingarna föreläste professor A. Lindau över

Modern kemoterapi mot bakteriella infektioner.

AUTOREFERAT.

Sedan gammalt har man genom kemiska medel, såsom klorkalk, karbol, sublimat etc. kunnat oskadliggöra bakterier i yttervärlden. Men när man försökte använda dessa medel för bekämpande av bakterier i kroppen, en s. k. inre desinfektion, fann man, att kroppscellerna förstördes förr än bakterierna. Man sökte sig därför andra vägar, vilket resulterade i den specifika behandlingen med terapeutiska sera, såsom difteriserum. Emellertid visade det sig, att förhoppningarna på detta område endast delvis uppfyllts och att man stod relativt maktlös gentemot en rad bakteriella infektioner.

I denna situation återgick man till kemoterapi och Paul Ehrlich sökte systematiskt efter ämnen, som skulle ha selektiv inverkan på mikroorganismerna men vara relativt ofarliga för kroppens egna celler. Hans forskningar resulterade dels i påvisandet av att vissa färger hade affinitet till trypanosomer och dels i framställningen av ett arsenikpreparat, salvarsan, som blev vårt främsta medel vid kampen mot syfilis. Under åren 1910—1935 kunde forskningen få fram verksamma medel mot en rad protozooinfektioner, såsom tropisk sömnsjuka, amöbadysenteri, malaria etc. Men mot de vanliga, varbildande bakterierna slog kemoterapien alltjämt slint.

Sådan var situationen, när Domagh 1935 lancerade prontosil för bekämpande av streptokockinfektioner. Hos I. G. Farbenindustrie i Elberfeld hade man framställt färgämnen, där dessa voro kopplade till sulfanilamid, och denna substans erhöll namnet prontosil. Franska forskare visade emellertid, att den terapeutiska effekten var bunden till det relativt enkla ämnet sulfanilamid (kemiskt: paraaminobenzolsulfonamid) $H_2N\langle___\rangle SO_2 \cdot NH_2$; alltså en benzolring med kväve- och svavelatomer i paraställning.

Sedermera har man lyckats framställa ännu mera effektiva sulfanilamid-derivat genom att i amidgruppen ersätta den ena eller

båda väteatomerna med heterocykliska ringar. Sulfapyridin och sulfatiazol äro de mest kända exemplen härpå. Med dessa sulfanilamidpreparat ha mycket goda resultat ernåtts vid streptokockinfektioner, såsom barnsängsfeber, halsfluss, scharlakansfeber, rosfeber, m. m. vid pneumokockinfektioner, såsom lunginflammation, vid gonorré, hjärnhinneinflammation, urinvägsinfektioner etc. Däremot har hittills icke nämnvärd effekt erhållits vid tuberkulos, tyfus, dysenteri, kolera m. m. samt ej heller vid virusinfektioner.

Vid lokal applikation i form av pulver å sårskador eller brännsår har effekten även varit god, vilket utnyttjats av de krigförande.

Emellertid finns det även moment, som inskränka användningen av sulfanilamidpreparat. Vissa individer visa mer eller mindre uttalad intolerans mot medlet. Ibland kan störd resorption eller hastig utskiljning medföra, att den åsyftade blodkoncentrationen av sulfanilamid icke uppnås eller bibehålles. Genom acetylering kan ämnet i kroppen överföras i en terapeutiskt overksam form. Vid otillfredsställande immunitetsbildning eller vid »hålrums»-komplikationer kan även den terapeutiska verkan utebli. Slutligen kan, särskilt vid behandling med för små doser, bakterierna bliva resistenta mot sulfanilamidpreparat, varvid verkan upphör och recidiv blir följden. Detta är en fingervisning, att dessa preparat icke böra användas utan klara indikationer och alltid böra tillföras patienten i en adekvat dos. Härigenom kan man inskränka de misslyckade fallens antal. Genom fortsatt forskning torde de ovan antydda svårigheterna låta sig mer eller mindre elimineras.

Vid de gemensamma förhandlingarna på eftermiddagen föreläste professor L. Smith över

Utvecklingen av det kemiska teckenspråket.

AUTOREFERAT.

Det kemiska teckenspråket utvecklades före Lavoisiers tid mycket långsamt. Alkemisternas tecken bibehöllos i stort sett även av läkarekemisterna och fyllde fortfarande sin uppgift att vara hemlighetsfulla symboler för en invigd krets men obegripliga för utomstående. På 1600-talet började man känna behovet av förenkling och systematisering. Geoffroy d. ä. införde för vissa likartade ämnesslag syror, baser, flyktiga ämnen etc. — likartade tecken. Torbern Bergman gick vidare i denna riktning, men han genomförde ej sina reformförslag konsekvent. När den förändrade uppfattningen av förbränningen genom Lavoisier nödvändiggjorde en ny indelning av ämnesslagen, grundades på denna också ett nytt teckensystem av Hassenfratz och Adet. Deras system hade begrän-

sat antal geometriska grundsymboler, som på ett sinnrikt sätt varierades. Deras teckenspråk blev emellertid ganska svårläst och hann för övrigt aldrig slå igenom. Daltons — samtidigt med hans atomhypotes — framlagda förslag var i all sin ofullkomlighet dock mycket enklare. Detta innehöll redan de tvenne ledande principerna för våra dagars teckenspråk: varje atom skall ha sitt tecken och detta tecken skall också betyda en viss mängd av grundämnet ifråga, dess »föreningsvikt».

Daltons atomvikter voro grafiska och hans formler blevo därför obekväma grafiska »strukturformler», stundom ganska komplicerade och vad antalet atomer beträffar för övrigt i regel felaktiga. Berzelius införde — förutom det enkla bokstavstecknet — den tredje för våra tecken utmärkande principen, Avogadros princip, dock i något förändrad form: *en atom* motsvarade enligt B. *en volym* av ett gasformigt element. Härigenom fick B. redan från början riktiga formler för många av våra enklaste och viktigaste ämnen: vatten, klorväte, ammoniak etc. Ett speciellt tecken hos B. var det särskilda tecknet — ett streck — för s. k. dubbelatomer, såsom väte, klor etc. Detta skapade mycken förvirring och bidrog i sin mån att minska tilliten till riktigheten av de av Berzelius föreslagna atomvikterna.

De gemensamma förhandlingarna avslutades med en föreläsning av docent B. Adell, över ämnet

Nyare bidrag till kännedom om karbonsyrors dissociation.

AUTOREFERAT.

Föreläsningen behandlade frågan om neutralsalters inverkan på karbonsyrors dissociation. Det inleddes med en kort historisk översikt, som följdes av en redogörelse för nyare försöksmetoder.

Engelsmannen Dawson och hans medarbetare ha bestämt dissociationskonstanten för några enbasiska karbonsyror i neutralsalthaltiga lösningar genom att mäta hastighetskonstanten för omsättningen mellan jod och aceton i lösningar dels av typen c_1 mol $HCl + C$ mol. neutralsalt, dels i lösningar med sammansättningen c_2 mol. $HA + C$ mol. neutralsalt. (*HA* är den ifrågavarande syran. c_1 och c_2 skola vara små i förhållande till *C*.) Ur hastighetskonstanterna, som i det närmaste äro proportionella mot lösningarnas vätejonkoncentration, beräknas vätejonkoncentrationen i sistnämnda försökslösningar.

Man kan å andra sidan såsom amerikanaren Harned och hans elever på elektrometrisk väg med hjälp av koncentrationselement mäta vätejonkoncentrationen i buffertlösningar av den allmänna

sammansättningen c_1 mol. $HA + c_2$ mol. $NaA + C$ mol. neutralsalt och ur vätejonkoncentrationen samt ur c_1- och c_2-värdena beräkna syrans dissociationskonstant i ifrågavarande medium.

Då kaliumklorid i stigande mängd sättes till en vattenlösning av ättiksyra, ökas dissociationskonstanten till en början, når ett maximum vid kaliumkloridkoncentrationen 0,5 mol./lit. och avtar sedan åter. Dissociationskonstantens maximalvärde är 73 % större än värdet i jonfri vattenlösning.

Salteffekten är densamma hos alla normala fettsyror med två t. o. m. sju kolatomer. En grening av kolkedjan vid α-kolatomen eller en substitution av en oxigrupp resp. en halogenatom i α-ställning medför en stegring av salteffekten.

Hos di- och trikarbonsyror är saltverkan betydligt större än hos de enbasiska syrorna. Som exempel anfördes, att citronsyrans primära, sekundära och tertiära dissociationskonstanter genom koksalttillsats maximalt kunna bringas att bli resp. två, fem och 21 gånger så stora som i jonfri vattenlösning.

Härefter föreläste inom sektionen för biologi docent R. Ander över »Bärnstenens fauna och dess betydelse för djurgeografien» och inom sektionen för matematik, fysik och kemi överingenjören vid Sydsvenska Kraftaktiebolaget Th. Björgerd över »Sveriges försörjning med elektrisk energi».

Sammanträdet avslutades med middag på Akademiska Föreningens restaurang.

Börje Svensson.

Bokanmälningar.

Marcel Riesz, *En åskådlig bild av den icke-euklidiska geometrien.* Geometriska strövtåg inom relativitetsteorien. C. W. K. Gleerup, Lund 1943. 72 s. Pris kr. 3:50.

Avhandlingen omfattar dels ett föredrag (11 s.), som förf. höll den 7 april 1942 inför Föreningen i Lund för matematisk-naturvetenskaplig undervisning, dels en utförligare behandling av vissa detaljer därav. Dessa förklaringar äro sammanförda i 26 »noter», utgörande bokens huvuddel. Det bör kanske påpekas, att dessa noter snarast äro att betrakta som avsnitt i en sammanhängande framställning.

Den art av icke-euklidisk plangeometri, som härstammar från Riemann, (den elliptiska) kan konkretiseras såsom geometri på ytan av en sfär (om diametralt motsatta punkter på denna anses som en och samma punkt). Sfären ifråga är därvid placerad i den vanliga tredimensionella rymden. Nu ger förf. en analog bild av det andra slaget icke-euklidisk plangeometri, Bolyai-Lobatschefskijs (hyperboliska) geometri, genom att betrakta den ena manteln av en tvåmantlad (liksidig) hyperboloid. Det konstgrepp, som möjliggör ett konsekvent genomförande av denna modell, är härvid, att hyperboloiden inlägges i en s. k. tredimensionell lorentzrymd. Härmed menas en rymd, i vilken kvadraten på avståndet från origo till punkten (x_1, x_2, x_3) definieras som $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$.

Ett stort avsnitt av boken (not 3—18; 40 s.) avser att göra läsaren förtrogen med lorentzrymden och de rörelser, som där äro möjliga (med fixt origo), — av stort värde för den som önskar sätta sig in i relativitetsteoriens »världs»-åskådning —. Härifrån kan förf. sedan (not 19—20) övergå till geometrien på ytan av den i denna rymd placerade hyperboloidmanteln.

Förf. älskar ej långa uträkningar utan föredrar en logisk bevisföring med minsta möjliga formelapparat. Denna metod är av stort värde för läsaren, dels genom den träning den innebär, dels genom de geometriska associationer den uppväcker. Särskilt må i detta sammanhang framhållas noterna 12—16, som behandla rotationer och vissa andra transformationer i lorentzrymden. Härledningen av geodetiska avståndet mellan två punkter på hyperboloidytan (i lorentzmetrik) bör också nämnas.

Framställningen belyses av 14 synnerligen instruktiva figurer, ritade av fil. dr K.-G. Hagstroem.

Tryckfelen äro få och störa ej — med undantag av ett: På s. 31, rad 24—25 borde i_2, i_3, j_2 och j_3 varit i_1, i_2, j_1, j_2 resp.

Denna korta resumé hoppas jag vara tillräcklig för att visa, att avhandlingen bör vara ett välkommet tillskott bl. a. till läroverkens referensbibliotek och att den bör läsas av varje för matematikens metoder intresserad lärare och studerande.

Stig Comét.

L. Wethe, *Feilregning.* Regning med tilnærmet riktige tall. H. Aschehoug & Co. (W. Nygaard). Oslo 1941, 59 s.

De metodiska anvisningarna för ämnet matematik framhåller att eleverna böra lära sig bedöma noggrannheten hos ett erhållet siffervärde samt ej ange resultatet med flera siffror än vad uppgiftens natur i varje särskilt fall kan kräva. Tyvärr brister det nog mycket i den bedömningsfrågan bland läroverkens elever, inte bara i realskolan utan ända upp i studentklasserna. Endels beror nog detta på våra dagars jäktiga skolarbete, som inte lämnar mycken tid över att låta eleverna begrunda erhållna resultats noggrannhet. Men en bidragande orsak är säkerligen att de flesta lärare inte torde fått stifta någon mera ingående bekantskap med felteorierna. Och vad de lärt ligger mestadels så högt över de flesta läroverkselevers horisont, att det inte låter sig tillämpas vid undervisningen. Och det gäller särskilt för eleverna i 2^5 och 1^4, som börja sina matematiska laborationer. Men det är just på detta stadium, som den första grunden måste läggas till förmågan att kunna kritiskt värdera noggrannheten i erhållna mätningar.

Ett utmärkt försök att bemästra problemet från nybörjarens synpunkt förefaller Wethes arbete vara. Författaren går inte ut från några abstrakta felteorier utan från praktiska mätningar av det slag, som förekommer just vid de matematiska laborationerna. Han försöker uppskatta »felgränsen», d. v. s. den största osäkerheten hos de givna eller uppmätta storheterna, ett slags maximalt fel alltså. Författaren visar sedan genom sifferräkningar, hos vilken siffra i ur primärmaterialet härledda resultat, t. ex. ytor och volymer, denna felgräns först uppenbarar sig. Ur dessa praktiska exempel härledas sedan regler för det antal gällande siffror, som bör medtagas i resultatet, om man vill att endast dess sista siffra skall vara osäker. Någon generell metod är detta givetvis inte, men den torde helt tillfredsställa elever på realskolans stadium. För elever på högre stadier finns även mera generella härledningar, som också bygga på felgränsens begrepp.

Boken ger alltså inte några metoder för beräkning av medelfel eller sannolika fel utan inskränker sig till att lämna anvisning på hur många tillförlitliga siffror man kan få ur gjorda mätningar och givna siffervärden. Den kan därför livligt rekommenderas till alla lärare i matematik och fysik. Några stickprov jag tagit visar, att arbetet tyvärr innehåller åtskilliga tryckfel och även ett par räknefel. De är dock inte av den art, att de nämnvärt störa läsningen. Wethes arbete innehåller även ett avsnitt om metoder för avkortad räkning. Detta synes mig dock vara av mindre intresse för svenska lärare. På realskolans stadium torde det minskade räknearbetet knappast uppväga den tid, som åtgår för metodernas inlärande, och på gymnasiet ha eleverna logaritmtabeller och räknestickor för de besvärligare räkningarna.

Sture Holm.

Kosmos, Fysiska uppsatser, utgivna av Svenska Fysikersamfundet, bd 20, 1942, 192 s. I bokhandeln kr. 10:—. Medlemskap, årsavg. kr. 10:—, medför rätt till bundet exemplar. Anmälan till fil. dr Anna Beckman, Lilljeborgsvägen 3, Uppsala.

Med föreliggande samling uppsatser har det 20:de bandet av Kosmos fullbordats. Tydligen är det detta lilla jubileum, som givit anledning till en sammanställning av ett författarregister och ett systematiskt register för alla nu utkomna band, vilka båda inrymmas i det föreliggande bandet, därmed underlättande verkets användning.

I den inledande uppsatsen tecknar prof. Siegbahn en minnesruna över den i fjol bortgångne engelske forskaren Sir William Bragg och skildrar i korthet de arbeten, som ställer denne i främsta raden bland de forskarpersonligheter, som dominerat de senaste årtiondenas fysik.

Den i år infallande trehundraårsdagen av Newtons födelse har givit anledning till en uppsats av prof. O. Klein. I denna framställes en helt annan bild av denne naturvetenskapernas store titan än den, som prof. C. W. Oseen tecknat i en tidigare årg. av Kosmos (bd 16). Lyckligtvis synas skiljaktigheterna mindre röra Newtons vetenskapliga insatser än hans personliga egenskaper, beträffande vilka Klein hävdar den traditionella helgonuppfattningen, medan Oseen anser denna vara i hög grad förskönad.

Av de övriga uppsatserna behandlar endast en ett rent fysikaliskt ämne, nämligen elektronmikroskopet, som tidigare avhandlats i Kosmos (bd 12) av doc. S. von Friesen. Den snabba utvecklingen av detta forskningsområde under de senaste åren motiverar, att detta ånyo upptages till behandling. I den nya, välskrivna upp-

satsen ger fil. lic. Å. Nilsson en detaljerad skildring främst av nyare konstruktioner, av deras teori och av de praktiska resultat, vartill de fört. Ett geofysiskt ämne, norrskenet och de magnetiska stormarna, har i en större artikel behandlats av prof. H. Alfvén, som däri lämnar en redogörelse för en av honom själv utarbetad teori för dessa intressanta fenomen, grundad på elementära beräkningar av banrörelsen hos från solen utslungade partiklar, varvid i motsats till den Birkeland-Störmerska teorien hänsyn tagits till solens magnetfält. Den stellära energialstringens problem avhandlas i en översiktlig och klarläggande framställning av doc. Å. Wallenquist. Man beklagar endast, att detta fascinerande ämne ej blivit mera utförligt behandlat. Den nyligen färdigställda, staten tillhöriga skeppsprovningsanstalten i Göteborg är föremål för en uppsats av civilingenjör R. Rödström, vari skildras anstaltens tillkomst och inrättning samt grunderna för dess verksamhet för utexperimentering av ändamålsenliga fartygsformer. *Nils Ryde.*

Schaefer-Bergmann-Kliefoth, *Grundaufgaben des physikalischen Praktikums.* B. G. Teubner, Leipzig 1942, 218 s., RM 4:20 (i utlandet).

Denna laborationshandledning är mycket omsorgsfullt utarbetad. Varje försök inledes med en avdelning A, där eleven teoretiskt orienteras angående försöket, varför en särskild lärobok ej behöver rådfrågas. I en avd. B meddelas mycket noggranna föreskrifter angående apparater och försökets utförande. I en avd. C sammanfattas huvudpunkterna under rubriken »Mätningens förlopp».

De detaljerade anvisningarna, vilka tydligen bygga på en rik erfarenhet, göra det möjligt för eleven att på egen hand sätta sig in i uppgiften. Ur anvisningarna har även den erfarne läraren mycket att hämta. Utförligheten i framställningen motiveras av att boken är avsedd för de många som för närvarande komma till de tyska högskolorna med — på grund av tidsförhållandena — mycket små kunskaper i fysik. Den vill ge eleverna — närmast dem för vilka fyisk är en hjälpvetenskap — en fast grund att bygga på och inskränker sig därför till väsentliga, mestadels välkända försök.

C. E. Blom.

W. Heuser, *Physik des Steuermanns.* Verlag Mittler und Sohn, Berlin 1943, 112 s., kr. 7:20.

Författaren, studierektor vid Gotenhafens styrmansskola, framlägger här på uppdrag av inspektionen för den tyska marinens bildningsdetalj en för marinen avpassad, koncis och koncentrerad lärobok i nautisk fysik.

Kapitlen äro mekanik (37 s.), magnetism (22 s.), väderlekslära (9 s.), akustik (6 s.), optik (13 s.) och elektricitet (21 s), förtydligade av 169 illustrationer. Utförligt behandlas bl. a. gyroskop- och magnetkompasser, skeppsmagnetism, fartmätare och ekolodning. Räkneproblem förekomma ej.

För lärare i fysik vid navigationsskolor och inom marinen torde boken trots sin knapphet vara av intresse.

E. Nordefeldt.

H. J. Flechtner—Bror Gustaver, *Materiens omvandlingar.* Natur och Kultur, Stockholm 1943. 149 sid. Pris häft. 3 kr.

Flechtners *Atomzertrümmerung* är en skildring av fysikens utveckling med utgångspunkt från »den klara världsbild», som rådde, då våra atomer ännu voro odelbara. Arbetet är översatt av lektor Gustaver, som tillfogat ett par välskrivna avsnitt om de senaste årens rön. I förordet uttalas, att den fängslande verklighetssagan inte bara kan intressera skolpojkar av i dag utan också deras föräldrar och andra. »Många genomgripande förändringar ha skett i fysikens världsbild, sådan den framställdes i skolan för endast ett par decennier sedan.» Som ett tillskott till vad läroböcker innehålla och vad läraren möjligen behandlar — se de metodiska anvisningarnas *pia desideria* — är en bok som denna värdefull. Av innehållet nämner jag redogörelserna för solens energiproduktion, atomklyvningar, mesotronen, neutrinon och Yukawas partikel samt kvantmekanikens tillämpning på biologiska frågor. Framställningen är i den meningen populär, att matematiska deduktioner ej alls användas; ofta åskådliggöras atomfysikens symboler med väl funna liknelser, t. ex. de kvantmässigt fastlagda skatteklasserna för en stackars löntagare. Ett trettiotal illustrationer öka bokens värde, bland dem fotografier av modern apparatur för atomkrossning, såsom cyklotronen vid forskningsinstitutet för fysik i Frescati.

Ett par detaljer har jag som kemilärare hängt upp mig på. Förstavelsen *eka* anger inte släktskap med ämnen just i perioden P av systemet (sid. 125). Utredningen av natriums reaktion med vatten (sid. 61), vilken skall belysa frågan om joniseringens betydelse för atomens egenskaper, är misslyckad: att natriumhydroxid skulle bildas för att sedan lösa sig i vattnet är väl en nu övervunnen tanke och att hälften av vätet i vattnet därvid förenat sig med metallen (!) var nog inte sant ens på 1800-talet.

Bertil Englund.

HELMER BÄCKSTRÖM, *Fotografisk handbok*, Natur och Kultur, Stockholm 1942, två klotband om tillsammans 1216 s., kr. 98: —, bibl.-b. kr. 110: —.

Docent H. Bäckström, speciallärare i fotografi vid Tekniska högskolan i Stockholm har här tillsammans med ett 30-tal av landets främsta experter på fotografiens område åstadkommit ett synnerligen förnämligt verk. Det är avsett som en handbok för alla, som syssla med praktiskt fotografiskt arbete, yrkesmän såväl som amatörer. Det vänder sig alltså till en mycket bred publik och är, som utgivaren betonar, ingen handbok i vetenskaplig fotografi. Detta bör ej uppfattas så, att teoretiska synpunkter åsidosättas. Tvärtom; man finner med tillfredsställelse, att författarna städse ge teoretiskt underlag till förståelse av det praktiska arbetet. De teoretiska utredningarna äro elementärt och lättfattligt avfattade men därför ej ytliga. Partier, där framställningen krävt matematisk eller kemisk formelapparat, ha placerats i finstilta stycken eller särskilda kapitel, en anordning, som gör handboken läsbar och läsvärd för alla.

I sin egenskap av handbok inrymmer den allt vad som har med fotografi att göra, häri inbegripet alla de olika områden, som tagit fotografien i sin tjänst. Innehållet är indelat i 139 kapitel, fördelade på 18 avdelningar, vilkas rubriker må ge en föreställning om det rikhaltiga och mångsidiga innehållet: Ur fotografiens historia; Fotografisk optik, kameran; Det ljuskänsliga materialet, speciellt negativmaterialet; Motivets tonomfång. Filter och exponeringsfrågor; Mörkrummet och laboratoriet; Negativets framkallning och fixering; Negativets efterbehandling; Den positiva bildens framställning; Pappersbildens färdigställande; Bildprojektion, förstoringsteknik; Speciella positivförfaranden; Färgfotografi; Fotografering vid konstljus; Fotografering med osynlig strålning; Mikrofotografi; Kinematografien; Stereofotografi och flygfotografi; Reproduktionsteknik.

Uppställningen är mycket överskådlig. Ett sak- och personregister omfattande över 3 000 uppslagsord gör det möjligt att lätt finna, vad man önskar.

För läraren i fysik och kemi är handboken mycket givande. Icke sällan dyka fotografiska spörsmål upp vid undervisningen, och den är då en utmärkt kunskapskälla. Då innehållet i regel är lättillgängligt, kan även eleven hänvisas till den. Vad som i detta sammanhang särskilt förtjänar att påpekas — studiet av boken har riktat anmälarens uppmärksamhet härpå — är hur många utmärkta uppgifter för enskilt arbete i fysik och kemi, som äro

att hämta från det fotografiska området. För skolornas referensbibliotek är därför handboken en mycket värdefull tillgång.

C. E. Blom.

Kurs i röntgenteknik. Teknisk Tidskrifts förlag 1943, 60 s., kr. 3: 60.

I föreliggande häfte återgivas föredragen vid en kurs hösten 1942 i Stockholm, anordnad av Tekniska Fysikers Förening. Som inledning ger prof. A. Lindh en översikt över röntgenstrålarnas fysik. Efter en kort historisk orientering och beskrivning av jon- och elektronrör följa här grunderna för röntgenspektroskopiska metoder och resultat, emissions- och absorptionsspektra. Prof. I. Waller redogör därefter för röntgenstrålars spridning och interferens, varvid särskild diffraktionen i kristallgitter är föremål för uppmärksamhet. Följande uppsats av prof. G. Hägg inledes med definitioner av olika punktgitter och deras symmetriförhållanden, varefter följa principerna för de röntgenkristallografiska metoderna. Prof. Hägg ger även huvuddragen av de så vunna forskningsresultaten (den kemiska bindningens natur, olika typer av kristallstrukturer, fasta lösningar, metallers och silikaters byggnad, amorfa kroppar m. m.). Civiling. S. H. Ledin skriver om tillverkningen av röntgenrör och därvid förekommande materialsvårigheter och andra problem. Prof. G. Borelius behandlar röntgenmetoder för studiet av legeringsomvandlingar (löslighetsgränser, utskiljningsförlopp, metastabila tillstånd, överstrukturer). Civiling. C. Schaub redogör för huru metallers hållfasthet och mekaniska egenskaper studeras med röntgenkristallografiska metoder. Slutligen ger dir. H. Swedenborg en översikt över grovstrukturundersökningar med röntgen, varvid särskilt provning av gjutgods och nit- och svetsfogar behandlas.

På det strängt begränsade utrymme, som stått till buds, kan man givetvis ej vänta sig någon ingående eller fullständig behandling av de många och stora forskningsområden som beröras. Men som en kortfattad och klar översikt över grunddrag och aktuella problem kan häftet väl rekommenderas åt alla härför intresserade.

Sven Benner.

P. M. Röwde, *Nya råmaterial.* Bonniers 1943, 135 s., häftad kr. 12: 50, inb. kr. 16: —.

Översatt från norskan samt bearbetad för svenska förhållanden av civilingenjör E. Lindström och docent P. Nylén, vill denna bok i förstklassig utstyrsel ge en översikt av de olika råmaterialens

utveckling, framställning och aktuella användningar inom nutida industrier, varvid de syntetiska produkternas alltmer framträdande roll även i statistiskt avseende speciellt uppmärksammas.

Boken ger sammanfattande redogörelser för jordens kraftförsörjning, kolets förädling, material ur luften och havet, gamla och nya metaller, nya vägar för livsmedelsförsörjningen, konsthartser, konstläder, sojabönan, skogsprodukter, ull, bomull, konstfibrer och textilier, naturgummi och konstgummi, kampen om oljan, syntetiska bränslen. Ett 50-tal förstklassiga bilder, kartor och diagram belysa framställningen, som särskilt framhåller Tysklands andel i världskampen om råämnena och deras ersättare.

För en någorlunda tekniskt bildad läsare torde mycket av arbetets innehåll vara på förhand bekant, och några överblickande synpunkter av betydelse erhåller man knappast. I ett skolbibliotek kan dock boken troligen påräkna intresse från tekniskt intresserad ungdom, liksom även från lärare i varukännedom och i ekonomisk geografi.

E. Nordefeldt.

Arthur Binz, *Edelmetalle, ihr Fluch und Segen.* Limpert-Verlag, Berlin 1941, 302 s., RM 5: 80.

Ädelmetallernas konungar, guld, silver, platina samt kvicksilver äro här föremål för en spännande historisk framställning, visande hur de bringat olycka eller välstånd över folk och riken, hur guldhungern drivit till erövringståg och kolonisering av fjärran länder, hur guldmakeriet blomstrade under alkemisttiden, hur silvret och kvicksilvret i mångahanda måtto kommit att tjäna mänskligheten i både fredliga och krigiska värv, hur platinan upphöjdes från ett slags oansenligt sekunda silver till ett viktigt verktyg i den kemiska storindustriens tjänst, där den gjort världshistoria, och hur slutligen dessa metaller numera inom allt flera områden ställas i kulturens och vetenskapens tjänst. Att i denna intressanta utveckling även svenska vetenskapsmän spelat en framstående roll framgår av de ofta citerade namnen Scheele och Berzelius, ävensom Torbern Bergman, Celsius, Benedicks, Härdén. Även den så sent som år 1936 allvarligt ifrågasatta guldframställningen ur kvicksilver, för vilken den tyske professorn Miethe då redogjorde vid en uppseendeväckande föreläsning i Stockholm, finnes omnämnd och förklarad.

För en kulturhistoriskt intresserad kemist och fysiker är denna välskrivna bok av en framstående kemist och kännare av den kemiska industriens historia en njutning att läsa.

E. Nordefeldt.

GEORGE R. STEWART, *Oväder*. Roman. Övers. från engelskan av Elsa Thulin. Kommentarer av förste statsmeteorologen docent Tor Bergeron. 316 s., översiktskarta över Nordamerika, tre synoptiska kartor. Ljus förlag, Stockholm 1942. kr. 12:50, inb. kr. 16:50.

Meteorologien är en av de vetenskaper, vars popularisering alltid berett stora svårigheter. Man kan knappast säga att fackmännen lyckats lösa denna uppgift tillfredsställande, men å andra sidan hysa meteorologerna ett djupt inrotat och i regel berättigat misstroende mot lekmannens förmåga att inträngа i väderlekslärans mysterier och att kunna inviga andra däri. I tidningarna ser man så gott som dagligen exempel på hur de enklaste uttryck och begrepp förvanskas och misstolkas. Detta är mycket beklagligt särskilt då det gäller den yngre generationen, vars kännedom om företeelserna i atmosfären om möjligt bör bli större och mera adekvat än föregående generationers. Den meteorologiska allmänbildningen befinner sig tyvärr på en alltför låg nivå här i landet, och inte blir den större genom den verksamhet som bedrives av »vädergubbar» och andra meteorologiens kvacksalvare.

Vi meteorologer hälsa därför med tillfredsställelse varje lyckat försök att utbjuda vederhäftig meteorologi i njutbar och populär form. Den amerikanske författaren George R. Stewart har på ett överraskande fyndigt och högst originellt sätt löst denna uppgift, vilket veterligen i sådan form ingen före honom lyckats med. Hans väderleksroman *Storm* utkom 1941 och har nyligen översatts till svenska med titeln *Oväder*. Författaren skildrar här på ett utomordentligt medryckande sätt meteorologiens betydelse för det mänskliga livet. Man får en inblick i amerikanskt vardagsliv och olika yrkesgruppers kamp mot naturens väldiga energimängder. Sjömän och meteorologer, flygare och arbetare, jordbrukare och direktörer och många andra deltaga i denna kamp, och deras reaktion inför naturkrafternas vilda spel analyseras på ett fängslande sätt.

Som roman betraktad är boken unik, men romanformen är på sätt och vis blott ett medel för att i lättsmält form bibringa läsaren de elementäraste grunderna av den moderna väderleksläran.

Bokens egentliga huvudperson är ett oväderscentrum, som upptäcks av en ung meteorolog på Väderlekstjänsten i San Francisco i Kalifornien. Han är van att kartlägga och analysera lågtrycken och följa dem från deras födelse till dess att de upplösas. Sedan ett par månader har Kalifornien lidit av ihållande torka, och de regngivande lågtryckens kurs har varit alltför nordlig för att Förenta staterna skulle få del av den välbehövliga vätan. Ett mäk-

tigt högtryck har spärrat vägen. För »juniormeteorologen» börjar det bli enformigt att se lågtrycken födas och dö utan att få någon nytta av dem. Han börjar förse dem med flicknamn. På så sätt blir det strax mera intressant!

Från en båt långt borta på andra sidan Stilla havet i närheten av Kinas kust kommer så en dag ett väderlekstelegram, som ser något underligt ut. Uppgifterna stämma inte riktigt överens med övriga »obsar». Båten brukar emellertid sända tillförlitliga telegram, så det är kanske bäst att taga hänsyn härtill. Det skulle i så fall betyda en obetydlig utbuktning av isobarerna och möjligen början till ett nytt lågtryck. För säkerhets skull får även det ett namn, »Maria». De följande väderlekskartorna visa, att »Maria» verkligen existerar. Det lilla lågtrycket växer snabbt i styrka och omfång och sätter kurs mot öster. Högtrycket i dess väg faller samman och spärren är bruten. Efter fyra dagar är »Maria» framme vid Förenta staternas västkust, och Kaliforniens snustorra jord får den rotblöta som så väl behövs. Med lågtrycket följer emellertid också en hel del annat, som ej är lika kärkommet, nämligen köld och snö, storm och åska m. m. Trafiken till sjöss, till lands och i luften lamslås helt eller delvis, telegraf-, telefon- och belysningsledningarna sättas ur funktion, kanaler och dammar svämma över: »Maria» kräver en stor tribut. Under tolv dagar far ovädret fram utan förbarmande, i lika många kapitel skildras dess verkningar genom ett antal parallellt löpande handlingstrådar, som varje dag dyka upp på nytt i korta avsnitt. En av birollerna i boken innehas av »Gamle Mäster», 90 år gammal, Väderlekstjänstens pensionerade chef, som då och då kommer upp för att se på väderlekskartorna. Han litar dessutom mera på sin barometer än på de nya påfund, som de skandinaviska meteorologerna fört till torgs. Det är just dessa påfund som utgöra grundvalarna för den moderna väderlekskläran. Den gamles konservatism blir hans olycka. Han överraskas av regnet, blir genomvåt och förkyld: »Maria» ändar hans liv. Man drar sig ofrivilligt till minnes historien om den gamle halsstarrige meteorologen, »som inte använder paraply i annat regnväder än det han själv förutsagt».

Det har tagit författaren två år att samla de vetenskapliga fakta, på vilka han byggt upp sin roman. Han tackar också femton amerikanska institutioner för hjälpen med det rikhaltiga stoffet. Översättningen till svenska är perfekt. Att den inte varit så lätt framgår av att översättarinnan anlitat sju svenska institutioner för kontroll av en hel del tekniska och vetenskapliga detaljer. För översättningens meteorologiska riktighet svarar T. Bergeron, som skrivit sexton sidor kommentarer och som även med hjälp av de i boken

lämnade uppgifterna delvis rekonstruerat några väderlekskartor.

Den som vill berika sitt meteorologiska vetande och göra sig hemmastadd i meteorologernas arbetsvärld bör ej försumma att läsa denna bok. Det som där skildras kan direkt överföras på skandinaviska förhållanden. Boken bör läsas med eftertanke och ej blott en utan flera gånger, ty då får man största behållningen av den. Den kan läsas både som roman och som lärobok i meteorologi. Boken är ett mästerverk, som bör räddas åt eftervärlden bl. a. genom bibliotekens försorg. Och varför skulle den ej kunna utdelas som premie i någon av de högsta ringarna? Att den på titelbladet kallas roman bör därvidlag ej avskräcka.

H. Henrikson.

Günther Bugge, *Der Alchimist.* Limpert-Verlag 1939, 304 s., RM 6: 50.

Författaren, som ej blott behärskar kemiens historia utan även är verksam som industrikemist, ger här i romanens form en framställning av den berömde alkemisten, läkaren, bergsmannen och uppfinnaren Leonhard Thurneyssers skiftesrika och verksamma liv. Genom sina underbara hälsokurer blev han för en tid Berlins rikaste man, för att år 1596 avlida i armod.

För den som vill inträngа i alkemiens sällsamma blandning av bedräglig bluff och allvarlig forskning äro bokens livfulla och målande skildringar en givande lektyr, som även kan rekommenderas som premiebok till mogen ungdom.

E. Nordefeldt.

Tidskrifter.

Populär astronomisk tidskrift, 1943: 1—2.

Ur innehållet: E. Holmberg, Om dubbla och multipla stjärnsystem; A. Grabe, Något om amatörmässig framställning av speglar för spegelteleskop; C. Schalén, Reflexionsnebulosor; P. Högberg, Copernicusminnen i Uppsala; B. Lindblad, Spiralnebulosornas problem; Å. Wallenquist, Åkesta observatorium; Y. Öhman, En fotoelektrisk noll-indikator för mätning av ljusets polarisation och färg.

Svensk kemisk tidskrift, 1943: 2—4.

Ur innehållet: E. Larsson, Om β-tionyldipropionsyra; K. Myrbäck och B. Lundberg, Über die enzymatischen Dextrinierung der Stärke; R. Nilsson m. fl., Mikrobielle Fettsynthese unter Verwendung der Rhodotorula glutinis nach dem Lufthefeverfahren; H. Arnfelt, S. Bodfors m. fl., Om benämning av oorganiska föreningar; Stina and S. Stenhagen, A new Type of Thermal Expansion in Monolayers; Elsa Grabe, Några synpunkter på metoder att bestämma vattenhalten i alkoholblandade motorbränslen; A. Wetterholm, Bestimmung des Verkohlungsgrades von Holzkohle. Meddelanden från Sveriges Kemiska Industrikontor.

Teknik för alla, 1943: 9—23.
Ur innehållet: Alessandro Volta; Ljud och oljud; Ankarkättingen smides; Skovelrotorn; Århundradets tåg; Från låssmed till urmakare; Elektronmultiplikatorn; Dykpumpar; Världens silverproduktion; Snabba båtar; Morgondagens flygplan; Skeppet utan roder; Från stridsvagnarnas barndom; Flygande livräddare; Bortom planeterna; Skruvplanet; Sveriges första gengasflygplan; Hur man själv spelar in grammofonskivor; Osymmetriska flygplan; Puckelrygg opereras bort; Amatörtillverkade teleskop. För övrigt ett stort antal smärre notiser, intressanta och lärorika. Mycket av värde under rubriken »Händigt folk».

ERA, 1942: 11—12, 1943: 1—5.
Ur innehållet: Eldrift vid cementtillverkning; Stockholms Elverk 50 år; Värmepumpen spar bränsle; Elcykeln; Elektriska storkök; Elektrokemi och svensk elektrokemisk industri; Energiförbrukning för vattenvärmning; Aluminium — elektrisk tillverkning — elektrisk användning. Ett stort antal notiser om elnyheter.

Nordisk Astronomisk Tidsskrift, København 1943: 2.
Ur innehållet: B. Strömgren, Atomer, Ioner og Molekyler i det interstellare Rum; E. Strömgren, Fra gamle Dage; J. P. Møller, Kometerne; E. Strömgren, Om Observationer af foranderlige Stjerner. — Stjernetid i Midnat Verdenstid Juni—November 1943.

Fysisk Tidsskrift, København 1942: 6, 1943: 1—2.
Ur innehållet: M. Pihl, Kirstine Meyer; V. Jørgensen, Tonegenerator uden Anodebatteri; V. Jørgensen, Rørgenerator med 220 Volt Vekselspænding paa Anoden; Th. Rosenberg, Om Formulering af Varmeteoriens Grundlag; J. Smed, Fysikkens Stilling i den højere Skole fra Middelalderen til vore Dage; H. Hansen, Elektronens Hastighed og Masse; K. W. Norrbøll, Katodestraaleoscillograf til Skolebrug.

Naturens Verden, København 1942: 7—10, 1943: 1—3.
Ur innehållet: S. L. Tuxen, Om Hørelse; P. L. Kramp, Om Generationskiftet i Dyreriget; C. Møller, Galileo Galilei; M. Vahl, Tunisien; Th. Sorgenfri, Tertiærtidens Havafleijringer i Sønderjylland; R. Ege, Vitamin-Alfabetet; H. Petersen, Er vort Klima blevet forandret?

Norsk Matematisk Tidsskrift, Oslo 1942: 4, 1943: 1.
Ur innehållet: I. Johansson, Sophus Lie; E. S. Selmer, Om sannsynligheten for at et tal er primtall; K. Piene, Magnus Alfsen; E. Hoff-Hansen, En matematisk tolkning av den klassiske utsagnsregning; W. Ljunggren, Noen setninger om ubestemte likninger av formen $\frac{x^n - 1}{x - 1} = y^q$. Eksamensopgaver; opgaver til løsning og løste opgaver.

Norsk populær-astronomisk tidsskrift, årg. 1, Oslo 1943: 1—2.
Norsk Astronomisk Selskap, som bildades år 1938, började samma år att utge en tidskrift »Himmel og jord». Händelserna år 1940 avbröto utgivandet. Sällskapet utgav sedan en stencilerad tidskrift »Astronomen» men har nu kunnat återupptaga utgivandet av en tryckt tidskrift. Den utkommer med fyra häften per år; abonnemangspriset är 11: — kr.

(Forts. s. 127)

Problemavdelning.[1]

Matematiska uppgifter.

1274) *Visa, att summan av cotangenterna för en triangels vinklar alltid är positiv och beräkna det minsta värde summan kan ha i någon triangel.* *X.*

1275) *En regelbunden polyeder har N kantlinjer med längden a. Samtliga kantlinjer projicieras ortogonalt i ett plan. Beräkna summan av projektionernas kvadrater.* *X.*

1276) *Vilka kurvor beskriver skuggan av spetsen på en vertikal stång (gnomon) vid olika latituder och soldeklinationer?*

Erik Nilsson.

Enklare matematiska uppgifter.[2]

Obs! Svaret till uppg. 1267 i årets marsh. bör lyda: $\frac{r}{a}(a^2 + 2Rr \pm \pm r\sqrt{4R^2 - a^2})$. En enkel diskussion utvisar, när två, ett eller intet svar erhålles.

1277) Bestäm sambandet mellan a, b och c så, att ekvationerna $ax^2 + bx + c = 0$, $bx^2 + cx + a = 0$, $cx^2 + ax + b = 0$ få en gemensam rot.

Svar: $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$ eller $(a + b + c)^3 - 3(a + b + c)(ab + ac + bc) = 0$, varav $a + b + c = 0$ och $(a + b + c)^2 = 3(ab + ac + bc)$ eller $(a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2 = 0$ d. v. s. $a = b = c$, om storheterna äro reella.

1278) Lös ekvationssystemet

$$\left.\begin{aligned} xy &= 3z^2 - 1 \\ x^2 - y^2 - z^2 &= 2z \\ x + y &= 3z \end{aligned}\right\}.$$

Svar:

x	1	-1	2	$-\frac{11}{7}$
y	-1	1	1	$-\frac{13}{7}$
z	0	0	1	$-\frac{8}{7}$

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. BÅGMAN, till vilken uppgifter och lösningar kunna insändas under adress: Högre allm. läroverket å Östermalm, Stockholm.

[2] Uppg. 1277, 1279 äro insända av *P.*; 1278, 1285, 1287 av *S. B.*; 1280—1281, 1283—1284, 1286 av *X.*; 1282 av *T. Edqvist.*

1279) Lös ekvationen $2 \sin 2x - \operatorname{tg} 2x = \sin 3x - 2 \sin x$.

Svar: $n \cdot 180°$; $\pm 30° + n \cdot 180°$; $\pm 111°{,}47 + n \cdot 360°$.

1280) Ett cirkelsegments korda delas i tre lika delar. Normalerna mot kordan i delningspunkterna dela bågen i tre delar, vilkas gradtal betecknas med $2x$, $2y$, $2x$. Visa, att $\operatorname{tg} \frac{x-y}{2} = \operatorname{tg}^3 \frac{x+y}{2}$.

1281) Punkten A delar diametern i en cirkel i två delar, vilkas skillnad är s. Tangenterna i diameterns ändpunkter råka en godtycklig tangent i B och C. Visa, att ytan av triangeln ABC är $\frac{s^2}{8} \cdot \operatorname{tg} \angle BAC$.

1282) De positiva heltalsvärden på a, som göra $\sqrt{2a+2}$ till en jämn kvadrat tänkas uppskrivna i en stigande serie. Beräkna a_{100}.

Svar: 19999.

1283) Diagonalerna i en parallellogram ligga på var sin av linjerna $3x - y = 2$ och $3x + 2y = 14$; en sida ligger på linjen $6x + y = 25$. På vilka linjer ligga de övriga sidorna?

Svar: $6x + y = 7$; $y = 7$; $y = 1$.

1284) Från en punkt P på diagonalen AC i romben $ABCD$ fällas normalerna PM och PN mot BA och BC resp. Visa, att normalen från P mot MN går genom D.

1285) På en sträcka AB som sida äro två regelbundna sexhörningar uppritade, en på vardera sidan om AB. Bestäm excentriciteten i den ellips, som går genom alla hörnen utom A och B.

Svar: $\sqrt{6} : 3$.

1286) En tangent till kurvan $2y = x^2 - 1$ är vinkelrät mot en tangent till $2y = 1 - x^2$. Visa, att tangenterna råkas på x-axeln.

1287) I en ellips är O centrum, A ena ändpunkten av storaxeln och PP_1 parametern i den motsatta ellipshalvan. Tangenterna i A och P råkas i Q. Hur stor är ellipsens excentricitet, om a) punkterna Q, O och P_1 ligga i rät linje; b) Q, lillaxelns ändpunkt och P_1 ligga i rät linje?

Svar: a) 0,5, b) 0,8.

Lösn. till uppg. 1245—1247.

1245) *Det finnes trianglar, i vilka* $\operatorname{tg} C = \operatorname{tg}^2 B \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2}$. *Visa, att i en sådan triangel är även* $\sin A = \operatorname{tg} B \cdot \cos C$. *X.*

Av $\operatorname{tg} C = \operatorname{tg}^2 B \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \operatorname{tg} B \cdot \frac{2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}}{\cos B} \cdot \frac{\sin \frac{B}{2}}{\cos \frac{B}{2}} = \operatorname{tg} B \cdot \frac{1 - \cos B}{\cos B}$

erhålles $\sin B \cos C + \cos B \sin C = \frac{\sin B \cos C}{\cos B}$ eller $\sin (B + C) =$ $= \sin A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \cos C$. Löst av *S. L., E. Smn. F. E., R. Ingre, Olga Dahlgren, B—r.*

1246) *En rät linje genom tyngdpunkten E i en triangel skär sidorna eller deras förlängningar i F, G och H. Tag E som origo och inför en positiv riktning på linjen. Om koordinaterna för F, G och H äro x_1, x_2 och x_3, så gäller* $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = 0$. *F. E.*

I triangeln ABC drages $AF_1 \parallel BC$. Punkten F_1 ligger på linjen genom E. Då dela AE och AF_1 sidan BC och följaktligen även HG harmoniskt. Alltså är $\frac{1}{\overrightarrow{EG}} + \frac{1}{\overrightarrow{EH}} = \frac{2}{\overrightarrow{EF_1}} = -\frac{1}{\overrightarrow{EF}}$. *X.*

Även löst av *S. L., E. Smn., S. A.* och *B—r.*

1247) *Från en punkt P fällas normalerna PQ_1, PQ_2 ... mot samtliga sidoytor i en regelbunden polyeder. Var ligger tyngdpunkten till punktsystemet Q_1, Q_2 ...?* *X*

Den n-sidiga polyederns tyngdpunkt förlägges till origo O, och sidornas mittpunkter äro (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), ... Om koordinaterna för P äro (a, b, c), blir normalen genom P mot en sidoyta

$$\frac{X - a}{x_p} = \frac{Y - b}{y_p} = \frac{Z - c}{z_p} \qquad (p = 1, 2, \ldots, n)$$

och sidoytans ekvation $(X - x_p)x_p + (Y - y_p)y_p + (Z - z_p)z_p = 0$.

Koordinaterna (X_p, Y_p, Z_p) för punkten Q_p satisfiera dessa ekvationer, varav (om $x_p^2 + y_p^2 + z_p^2 = h^2$) erhålles $X_p = a + x_p - \frac{x_p}{h^2}(ax_p + by_p + cz_p)$ och motsvarande uttryck för Y_p och Z_p. För polyedern gäller nu $\Sigma x_p = \Sigma y_p = \Sigma z_p = 0$. Tröghetsellipsoiden är en sfär, varav $\Sigma x_p^2 = \Sigma y_p^2 = \Sigma z_p^2 = \frac{nh^2}{3}$,

$\Sigma x_p y_p = \Sigma y_p z_p = \Sigma x_p z_p = 0$, $\because \Sigma X_p = na - \frac{a}{h^2}\Sigma x_p^2 = \frac{2na}{3}$; $\Sigma Y_p = \frac{2nb}{3}$; $\Sigma Z_p = \frac{2nc}{3}$. Tyngdpunkten till punktsystemet Q_1, Q_2, ... får koordinaterna $\left(\frac{2a}{3}, \frac{2b}{3}, \frac{2c}{3}\right)$. Tyngdpunkten delar alltså OP i förhållandet 2 : 1. Även löst av *N. J. S. L.*

Studentexamen och fyllnadsprövning efter studentexamen.

Mars 1943.

Matematiska uppgifter för latinlinjen.

1. En cirkel går genom hörnen A och B i en liksidig triangel ABC och tangerar sidorna AC och BC. Bevisa, att denna cirkel även går genom höjdernas skärningspunkt i triangeln.
2. En skuld på 10 000 kr skall avbetalas under 10 år på så sätt, att vid slutet av vart och ett av de 5 första åren betalas ett visst belopp och vid slutet av vart och ett av de 5 sista åren ett dubbelt så stort belopp. Bestäm storleken av dessa belopp, om räntefoten är 3 %.
3. I en romb dragas höjderna från ett par motstående hörn mot två parallella sidor. Därigenom delas romben i en rektangel och två trianglar. Rombens yta förhåller sig till rektangelns som 5 : 2. Beräkna rombens vinklar.
4. Lös ekvationen

$$\frac{4x}{a-b} - \frac{2(x-a-b)}{x-a} = \frac{3ab}{ax-a^2-bx+ab},$$

där a och b äro givna storheter.

5. I en rätvinklig triangel, vars kateter äro 8 cm och 15 cm, uppritas den inskrivna cirkeln och de vid kateterna vidskrivna cirklarna. Beräkna ytan av den triangel, som har sina hörn i de nämnda cirklarnas medelpunkter.
6. I triangeln ABC är AB en längdenhet, vinkeln B 45° och vinkeln C 30°. Bestäm det exakta värdet av sin A.
7. En diameter AB och en korda CD i en cirkel med 5 cm radie skära varandra i E, så att $AE : BE = 1 : 4$ och $CE : DE = 1 : 2$. Beräkna längden av kordorna AC och BD respektive.

8. För vilka x-värden gäller, att funktionerna $x^2 - x - 6$ och $2x - 2$ ha samma tecken och att den förra funktionen dessutom antar mindre värden än den senare? Grafisk metod bör användas.

Resultat: **2.** 801,2 kr och 1602,4 kr. **3.** 53°,13 och 126°,87. **4.** Rötterna äro $\frac{1}{2}(2a + b)$ och $\frac{1}{2}(a - 2b)$. **5.** 51 cm². **6.** $\frac{1}{4}(\sqrt{2} + \sqrt{6})$. **7.** $AC = \frac{\sqrt{60}}{3} = 2{,}582$ cm; $BD = \frac{\sqrt{480}}{3} = 7{,}303$ cm. **8.** Båda funktionerna äro positiva för $x > 3$, och inom detta område är $x^2 - x - -6 < 2x - 2$ för $3 < x < 4$. Båda funktionerna äro negativa för $-2 < x < +1$, och inom detta område är $x^2 - x - 6 < 2x - 2$ för $-1 < x < +1$.

Matematiska uppgifter för realgymnasiet.

Allmän kurs.

1. Två räta linjer med ekvationerna $2x + y + 1 = 0$ och $x + 2y - -1 = 0$ äro givna. Sök ekvationerna för de räta linjer genom punkten (4; −4), som med de givna linjerna bilda rätvinkliga trianglar, samt beräkna ytorna av dessa trianglar.
2. I en aritmetisk serie med olika termer och första termen 1 betecknas summan av de n första termerna med S_n. Summorna S_{27}, S_{36} och S_{48} bilda i nämnd ordning en geometrisk serie. Angiv det enklaste uttrycket för S_n.
3. Två trianglar ha lika stora ytor. Sidorna i den ena äro 40 cm, 60 cm och 80 cm. Vinklarna i den andra äro 40°, 60° och 80°. Beräkna den minsta sidan i den senare triangeln.
4. Konstruera kurvan $y = x^3 - 4x^2 + 4x$. Origo O sammanbindes med en punkt P på kurvan, och från P fälles normalen PQ mot x-axeln. Undersök och åskådliggör i samma koordinatsystem, hur ytan av triangeln OPQ varierar, då P genomlöper kurvan.
5. Lös ekvationen $\sqrt{2 + 2\cos x} = \operatorname{tg} x$.
6. En parallellt stympad rät cirkulär kon är omskriven kring en sfär och inskriven i en annan sfär. Förhållandet mellan den stympade konens mantelyta och den mindre sfärens yta är 25 : 16. Bestäm förhållandet mellan den stympade konens mantelyta och den större sfärens yta.
7. Summan av kvadraterna på avstånden från en punkt på en diagonal i en kub till hörnen i en sidoyta är en funktion av punktens avstånd till diagonalens ena ändpunkt. Bestäm denna funktions största och minsta värde.
8. Ett obegränsat antal punkter i ett koordinatsystem, $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, $(x_3; y_3)$, $(x_4; y_4)$, ... $(x_n; y_n)$, ..., äro så belägna, att stor-

heterna $(y_2 - y_1), (y_3 - y_2), (y_4 - y_3), \ldots$ bilda en geometrisk serie med kvoten $\frac{1}{2}$ och första termen -1. Storheterna x_1, $(x_2 - x_1)$, $(x_3 - x_2)$, $(x_4 - x_3)$, ... bilda en geometrisk serie med kvoten 2 och första termen 1. Vidare är $\lim_{n \to \infty} y_n = 0$. Bestäm y_1 och härled ett av n oberoende samband mellan x_n och y_n. Utpricka i koordinatsystemet läget av några punkter i den ovan angivna punktföljden.

Resultat: **1.** Linjernas ekv. äro $x - 2y - 12 = 0$ och $2x - y - -12 = 0$; ytan $= 16\frac{7}{8}$ ytenh. (Då uppg. ej är entydigt formulerad, äro även andra lösningar möjliga.) **2.** n^2. **3.** 41,85 cm. **4.** Kurvan går genom origo, har max. $= \frac{32}{27}$ för $x = \frac{2}{3}$ och min. $= 0$ för $x = 2$. Ytan av $\angle OPQ = \frac{1}{2} x^2 \cdot x = 2^2$, denna funktion, som alltid är positiv, har två minima $= 0$ för $x = 0$ och $x = 2$ samt ett max. $= \frac{1}{2}$ för $x = 1$. **5.** $180^\circ + n \cdot 360^\circ$; $60^\circ + n \cdot 360^\circ$. **6.** 16 : 41. **7.** Om en sidoyta är $ABCD$, kubens diagonal DE, M mittpunkten av AC samt P en punkt på DE, så blir enligt medianssatsen funktionen $y = \overline{PA}^2 + \overline{PC}^2 = 2\overline{PD}^2 + 2\overline{PB}^2 = 4PM^2 + 4\overline{MD}^2$. Här är DM konstant, varför y har max. och min. samtidigt som PM. Minimum inträffar, då $PM = DE$: $y_{min.} = 4\overline{DM}^2 \sin^2 \angle BDE = 4DM^2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{8a^2}{3}$. Om P ligger i E, erhalles $y_{max} = 8a^2$, där a är kubens kantlinje. **8.** Man erhåller $y_n - y_{n-1} = \frac{1}{2^{n-2}}$ och genom summering av den geometriska serien $y_n - y_1 = -2 + \frac{1}{2^{n-2}}$. Villkoret $\lim_{n \to \infty} y_n = 0$ ger $y_1 = 2$ och $y_n = \frac{1}{2^{n-2}}$. På motsvarande sätt erhålles $x_n = 2^n - 1$. Elimineras n, blir det sökta sambandet $(x_n + 1) y_n = 4$. För de lägsta värdena på n bli punkterna: $(1; 2)$, $(3; 1)$, $(7; \frac{1}{2})$, $(15; \frac{1}{4})$ o. s. v.

Matematiska uppgifter för realgymnasiet.

Specialkurs.

1. Den ena parametern i en hyperbel är parameter även i en parabel, som tangerar hyperbelns andra gren. Beräkna vinkeln mellan hyperbelns asymptoter.

2. Bestäm excentriciteten för hyperbeln $x^2 - \frac{y^2}{a^2} = 1$ och för ellipsen $\frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1$, då förhållandet mellan dessa excentriciteter är så litet som möjligt. $a > 1$.

3. En sträcka med längden 1 längdenhet glider med sin ena ändpunkt på linjen $y = kx$ och med den andra på linjen $y = -kx$. Sök orten för sträckans mittpunkt och visa, att den yta, som ortkurvan omsluter, är oberoende av k.
4. Kurvan $y = f(x)$, där $f(x)$ är ett polynom av fjärde graden, har ett maximum för $x = 3$ och inflexionspunkter i origo och i punkten (2; 4). Bestäm $f(x)$ och konstruera kurvan.
5. Visa, att om M är maximivärdet och m minimivärdet av funktionen $\sin x \sin(x + \alpha)$, där α är en konstant, så är

$$M - m = 1.$$

6. Konstruera kurvan $y = x + \frac{1}{x}$. I en punkt P på kurvan drages tangenten. Denna skär kurvans asymptoter i punkterna A och B, vilka sammanbindas med kurvans maximipunkt M. Undersök, hur ytan av triangeln ABM varierar, då P genomlöper kurvan.
7. I en parabel dragas två parallella kordor, så att den ena blir normal till parabeln och den andra går genom parabelns brännpunkt. Visa, att den senare kordan är lika stor som den förras projektion på parabelns axel.

Resultat: **1.** 141°,06. **2.** Excentriciteterna äro $\sqrt{2+\sqrt{2}} = 1{,}848$ och $\sqrt{2-\sqrt{2}} = 0{,}765$. **3.** Ortkurvan är ellipsen $4k^4x^2 + 4y^2 = k^2$ med ytan $\frac{\pi}{4}$ ytenh. **4.** Kurvans ekv. är $4y = 4x^3 - x^4$. **5.** Anm. $\sin x \sin(x + \alpha) = \frac{\cos\alpha - \cos(2x + \alpha)}{2}$ o. s. v. **6.** Kurvan (en hyperbel) har asymptoterna $x = 0$ och $y = x$, en max.-punkt (M) $(-1; -2)$ och en min.-punkt $(1; 2)$. Om tangeringspunktens abskissa är $= x$, blir ytfunktionen $= \pm\left(x + \frac{1}{x} + 2\right)$, där det övre tecknet gäller för $x > 0$ och det undre för $x < 0$. Parallellförflyttar man den givna hyperbeln 2 enheter i positiva y-axelns riktning och sedan speglar den i 3:e kvadranten liggande grenen i x-axeln, erhålles den grafiska bilden av $\triangle AMB$. **7.** AB är normalkordan i A, CFD den parallella fokalkordan, E och G mittpunkterna av resp. AB och CD, AA_1, CC_1, GG_1, DD_1 normaler mot styrlinjen. Enligt en känd sats går DFC ($\parallel BA$ och $\perp$ tangenten i A) genom A_1. Alltså är $GG_1 =$ halva projektionen av normalkordan AB på diametern eller axeln. Vidare är $GG_1 = \frac{1}{2}(CC_1 + DD_1) = \frac{1}{2}CD$, varav följer påståendets riktighet (Enl. Sv. Dagbladet 19. 3. 1943).

Uppgifter i fysik.

Obs. Lösningarna till uppgifterna 1—3 och 6—8 böra åtföljas av enkla figurer. — Erforderliga konstanter, vilka ej äro uppgivna i problemens text, hämtas ur formelsamlingen.

1. En pojke åker utför en skidbacke med ett lodrätt stup. Omedelbart ovanför stupet har backen sådan lutning, att pojken efter satsen hoppar ut från stupet i det närmaste i horisontell riktning på en höjd av 2 m över underbackens översta del. Backens lutning nedanför stupet är konstant och lika med 28°. Hopplängden, mätt från underbackens översta punkt nedåt längs backen, befinnes vara 21 m. Vilken hastighet har pojken, då han hoppar ut från stupet? Luftmotståndet försummas.
2. En jämntjock skiva av ett homogent material har formen av ett parallelltrapets, där de båda parallella sidorna äro resp. a och $3\,a$ och de båda övriga $2\,a$ vardera. Sök läget av skivans tyngdpunkt.
3. För att undersöka luftmotståndet mot en tunn, cirkulär skiva med omkring 1 dm² yta fastgjorde man den vid ena ändan av en smal, vågrät stång, som i sin tur var fästad vid en lodrät axeltapp, vilken kunde rotera utan nämnvärd friktion. Förlängningen av skivans plan gick genom rotationsaxeln; skivans centrum befann sig 100 cm från axeln. Axeln drevs runt genom ett kring densamma lindat snöre, vilket löpte över en lätt trissa med horisontell axel och uppbar en 120 g tung vågskål. Denna sänkte sig 7,8 cm för varje varv axeln gjorde. Man ville mäta luftmotståndet, då skivan — eller närmare bestämt dess centrum — rörde sig med en hastighet av 4 m/sek. Vågskålen belastades med vikter, tillsammans 780 g. Sedan skivan fått rotera något varv, blev dess hastighet konstant, varvid den beskrev ett varv på 1,61 sek. Om vågskålen i stället belastades med 850 g, blev skivans omloppstid 1,55 sek. I intetdera fallet var hastigheten i skivans centrum exakt 4 m/sek, men skillnaden var icke större, än att man genom vanlig interpolation kunde få ett tillfredsställande värde på luftmotståndet vid nämnda hastighet. Sök detta värde. Luftmotståndet mot andra rörliga delar än skivan lämnas ur räkningen.
4. I ett provrör har man 42 g naftalin, en liten termometer och en trådspiral för elektrisk ström. Trådspiralen belastas med en konstant effekt av 40 watt, och på termometern observeras temperaturens stegring från rumstemperatur till c:a 100° C. Temperaturen stiger först jämnt, står sedan praktiskt taget stilla vid 80° under 180 sek och stiger därefter åter. Hur många cal förlorar provröret per minut till omgivningen vid naftalinets smälttemperatur? Smältvärmet för naftalin är 35 cal/g.

5. Ett glasrör, som var 79,0 cm långt och tillsmält i båda ändarna, innehöll helium och dessutom en liten mängd av ett lätt stoft. Glasröret fastklämdes vid mitten och försattes genom gnidning i longitudinella svängningar. På stoftet kunde man se, att gasen inte kom i resonans. Uppvärmdes hela försöksanordningen till 62° C, framträdde däremot de kundtska stoftfigurerna med största tydlighet, och avståndet mellan två närbelägna noder befanns vara 15,8 cm. Beräkna ljudets hastighet i helium vid 0° C. Man vet, att ljudets hastighet i en gas är proportionell mot kvadratroten ur gasens absoluta temperatur. Ljudets hastighet i glas vid olika temperaturer hade förut bestämts för samma glasrör och befunnits vara 5 400 m/sek vid 62° C. Den absoluta nollpunkten ligger vid —273° C.
6. En bekväm apparat för bestämning av glasögonlinsers styrka grundar sig på följande försöksanordning. På en optisk bänk uppställes i ordning en kollimator, den lins som skall undersökas, en tunn positiv hjälplins och en avläsningskikare. Kollimatorns spalt är belyst och det ur kollimatorlinsen utträdande strålknippet parallellt. Avståndet mellan glasögonlinsen och hjälplinsen är lika med den senares brännvidd. Kikaren är från början inställd så, att man ser en skarp bild av spalten, då glasögonlinsen är borta. Insättes denna på sin plats, blir spaltbilden oskarp, men man kan åter få den skarp genom att förskjuta kikaren ett stycke utan att ändra avståndet mellan dess okular och objektiv. Visa, att förskjutningen är proportionell mot glasögonlinsens dioptrital. Av beviset bör tydligt framgå metodens användbarhet såväl för positiva som för negativa glasögonlinser.
7. Mellan klämskruvarna till en galvanometer, vars motstånd är R_g, inkopplas ett motstånd R, uppbyggt av ett antal seriekopplade motståndsstycken, i ordning $AB = 0{,}9\ R$, $BC = 0{,}09\ R$, $CD = 0{,}009\ R$, $DE = 0{,}001\ R$. Ändpunkten E förbindes med ena polen av en konstant strömkälla. Den andra polen är förbunden med en flyttbar kontakt, som i tur och ordning anslutes till var och en av kopplingspunkterna A, B, C och D. Motståndet i den del av ledningen, som innehåller strömkällan, är mycket stort i förhållande till R och R_g. Visa, att de strömstyrkor, som uppträda i galvanometern vid de nämnda kontaktlägena, förhålla sig som $1 : 0{,}1 : 0{,}01 : 0{,}001$ — oberoende av storleken av R och R_g.
8. En tvåpolig, shuntlindad likströmsmotor är avsedd för anslutning till 240 volt nätspänning och tar 23 ampère vid full belastning. Shuntlindningens motstånd är 240 ohm, ankarlindningens 0,5 ohm. Av den tillförda energien förloras inalles 12,5 %, dels i form av strömvärme i rotor och magnetlindning, dels på grund

av friktion m. m. Vid lägre belastning minskas motorns strömförbrukning; friktionsförlusterna däremot kunna anses oberoende av belastningen. Hur stor är verkningsgraden hos motorn för det fall, att den totala strömförbrukningen är 7 ampère?

Resultat: **1.** 11,9 m/sek. **2.** På mittpunktsnormalen till de parallella sidorna, $\frac{5a\sqrt{3}}{12}$ från den större av dessa. **3.** 11,7 gf. **4.** 86 cal/min. **5.** 975 m sek. **6.** Om hjälplinsens fokaldistans $= F$ och glasögonlinsens (med rätt tecken) $= f$, så blir kikarens förskjutning $= \frac{F^2}{f}$, där positivt tecken betyder förflyttning mot hjälplinsen, neg. tecken från hjälplinsen. **8.** 72,3 %.

Realexamen V. T. 1943.

Provräkning.

1. En skola erhöll som gåva en summa av 20 000 kr. Av den årliga ränteinkomsten skulle $^9/_{10}$ utdelas som stipendium. Det skänkta kapitalet placerades på följande sätt: 6 000 kr utlånades mot 4,5 % ränta; tolv 4 % obligationer, var och en å nominellt 1 000 kr, inköptes till 105 % kurs; återstoden insattes mot 3 % ränta i bank. Hur stort stipendium kunde utdelas efter ett år?
2. En person erhöll utom årslönen även ett visst dyrtidstillägg på denna. Ett år, då dyrtidstillägget utgick med 16 % av årslönen, erhöll han sammanlagt 5 568 kr. Följande år höjdes hans årslön med ett ålderstillägg på 500 kr, och han erhöll då sammanlagt 6 095 kr. Efter vilken procent utgick dyrtidstillägget detta år?
3. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} \frac{2}{x}\left(2+\frac{6}{y}\right)-\frac{3}{y}\left(3-\frac{1}{x}\right)=\\ \frac{1}{3}(x+6)-\frac{6}{5}(8-y)+3=0. \end{cases}$$

4. En viss mängd mjölk med en fetthalt av 3,6 % levererades till ett mejeri, där den standardiserades, d. v. s. blandades med fettfri skummjölk, så att fetthalten nedgick till 3 %. Hur många procent av blandningen utgjorde den tillsatta skummjölken?
5. Hur många järnrör kunna medtagas på en lastbil, vars last kan utgöra högst 3 ton, om rörens längd är 5 m, deras yttre diameter 3,8 cm och godsets tjocklek 3 mm? Järnets specifika vikt $= 7{,}7$. $\pi = 3\frac{1}{7}$.

6. År 1938 kostade bensinen i England 1 shilling 9 pence per gallon och i Sverige 28 öre per liter. Vid en bilfärd på 1 000 km förbrukades i England 1 liter på 8 km. Då en lika lång sträcka kördes i Sverige, åtgick på grund av sämre vägar 1 liter på 7 km. Hur stor blir skillnaden i bensinkostnad för de båda bilförderna? 1 gallon = 4,55 liter. 1 shilling = 12 pence = 0,91 kr.
7. I ett parallelltrapets äro sidorna *AB*, *BC* och *CD* vardera 6 cm och den fjärde sidan *AD* 12 cm. Diagonalerna *AC* och *BD* skära varandra i *O*. Beräkna ytan av triangeln *AOD*.
8. *AB* är diameter i en cirkel, och *C* är en punkt på periferien, så belägen att kordan *AC* är 16 cm. Genom *B* drages en rät linje parallellt med *AC*. Den skär tangenten genom *A* i punkten *D*. *BD* är 25 cm. Beräkna kordan *CB*.

Resultat: **1.** 712,8 kr. **2.** 15 %. **3.** $x = 3$; $y = 3$. **4.** $16\frac{2}{3}$ %. **5.** 236 st. **6.** I England 43,75 kr och i Sverige 40,00 kr; alltså 3,75 kr billigare i Sverige. **7.** $12\sqrt{3} = 20{,}78$ cm². **8.** 12 cm.

Uppgifter i fysik för tekniska linjen.

1. En flaggstång väger 160 kg och är 15 m lång. Dess tyngdpunkt ligger 5,5 m från den grövre ändan. Den är fästad mellan två i marken nedsatta järnskenor och vridbar kring en i skenorna fastsatt bult, som är vinkelrät mot stången och belägen 1,5 m från stångens nedre ända. Stången fälles, så att den kommer i vågrätt läge, varvid den vilar mot ett stöd, som placerats 1,0 m från toppändan. Med huru stor kraft påverkas stödet av stången?
2. Specifika vikten av glaset i en flaska bestämdes på följande sätt. Flaskan vägdes först tom. Man höll den sedan i vatten med mynningen över vattenytan och hällde i den så mycket vatten, att den nätt och jämnt flöt. Flaskan intog då lodrätt läge med mynningen i själva vattenytan. Sedan man torkat av flaskan, vägde man den jämte det vatten, som man hällt i den. Ytterligare en gång vägde man flaskan, denna gång helt fylld med vatten. De tre vägningarna gåvo resultaten 365 g, 480 g och 705 g. Vilket värde på glasets specifika vikt erhåller man härav?
3. En pojke kör sparkstötting på en isbelagd sjö. Sammanlagda vikten av pojken och sparkstöttingen är 50 kg. Han kör med praktiskt taget jämn hastighet en uppmätt sträcka av 40 m på en tid av 10 sek. Så snart han passerat sträckans slutmärke, upphör han att sparka. Sparkstöttingen stannar då 24 m från märket. Beräkna friktionskoefficienten mellan medarna och isen. Accelerationen vid fritt fall sättes till 9,8 m/sek².

4. En pojke ville mäta det övertryck hans lungor kunde åstadkomma. Då han inte hade tillräckligt med kvicksilver för en öppen manometer, använde han ett rakt, jämntjockt, i ena ändan slutet glasrör, vari han införde en mindre mängd kvicksilver, så att detta i form av en liten pelare avspärrade en luftvolym i den slutna ändan av röret. Denna luftvolym hade en längd av 285 mm, då röret hölls vågrätt och barometerståndet var 750 mm. Genom en gummislang, som trädde över rörets mynning, blåste han sedan kraftigt, medan röret fortfarande hölls vågrätt. Kvicksilverpelaren flyttade sig då 35 mm mot rörets slutna ända. Hur stort övertryck hade han uppnått?
5. Genom att inleda vattenånga av 100° C i ett kärl, som innehåller 20 kg vatten av 20° C, vill man höja temperaturen hos vattnet och kärlet till 100° C. Hur många kg ånga behöver man för den skull inleda i vattnet? Kärlets egen vikt är 4,5 kg, dess specifika värme 0,2 och vid 100° C är vattnets ångbildningsvärme 540. Värmeutbytet med omgivningen försummas.
6. En lärare vill sända en stark ström genom en grov ledning för att visa, huru järnfilspån på ett papper ordna sig utefter kraftlinjerna i strömmens magnetiska fält. Han förfogar över tre 2-volts bilackumulatorer, som under en kort tid tåla en urladdningsström av 75 ampère och ha ett inre motstånd av 0,021 ohm vardera. Motståndet i ledningen är 0,036 ohm. Skall han koppla ackumulatorerna parallellt eller i serie för att få så stor strömstyrka som möjligt, då han under några ögonblick sluter batteriet genom ledningen?
7. En montör har en elektrisk lödkolv stämplad 60 W, 120 V men vill använda den vid nätspänningen 220 V. Därför måste han tydligen kombinera den med ett förkopplingsmotstånd. Hur stort skall detta väljas, om kolven skall få den spänning, för vilken den är konstruerad?
8. En trådbuss (lastvagn) väger med last 14 t. Hur mycket större strömstyrka tar den i en uppförsbacke med stigningen 8 : 1000 än på horisontell väg, om den i båda fallen rör sig med hastigheten 40 km/tim? Spänningen är 600 V. Friktionsmotståndet är lika i båda fallen, och ökningen av kopparförlusterna kan lämnas utan avseende. 1 W = 0,102 kgm/sek.

Resultat: **1.** 51,2 kgf. **2.** 2,61. **3.** 0,034. **4.** 105 mm Hg. **5.** 3,10 kg. **6.** Vid seriekoppling 60,6 A, vid parallellkoppling 46,5 A. **7.** 200 ohm. **8.** 20,3 A.

Uppgifter i beskrivande maskin- och byggnadslära för tekniska linjen.

1. Skruven i ett parallellskruvstycke har 10 mm stigning, och handtagets längd är 300 mm. Om handkraften antages vara 20 kgf och skruvens verkningsgrad 30 %, hur stort blir då trycket mot det inspända arbetsstycket?
2. Beräkna ungefärliga storleken på den kraft, som erfordras i skänklarna på en avbitartång vid avklippning av en 2 mm järntråd med skjuvhållfastheten 3 000 kgf/cm². Avståndet från käftarnas eggar till centrum av tångens ledbult är 20 mm. Kraften i skänklarna kan anses vara anbragt 190 mm från samma centrum.
3. En centrifugalpump, som drives av en direktkopplad elektrisk motor, uppfordrar 100 liter vatten per sekund vid 5 meters sughöjd och trycker sedan vattnet till en höjd av 13 meter. Förlusterna i ledningarna beräknas motsvara 2 m tryckhöjd. Huru många kilowatt förbrukar den elektriska motorn, om dess verkningsgrad är 90 % och centrifugalpumpens 70 %?
4. En enhjulig blockvagn, avsedd för godstransport på en verkstad, löper på en I-balk NP 22 med 8 meters fri spännvidd. Hur stor last kan vagnen högst transportera, om böjspänningen i balken får uppgå till 850 kgf/cm²? Vagnen väger 55 kg. Vid beräkningen tages hänsyn till balkens egenvikt.
5. En pelarborrmaskin drives från transmissionsaxeln på följande sätt: Transmissionsaxelns remskiva ($n = 400$ varv/min, diametern = 260 mm) driver en vid foten av borrmaskinen monterad remskiva (diametern = 260 mm). På samma axel som den senare remskivan sitter en trappremskiva med 4 steg (diametrarna = 240, 200, 160 och 120 mm). Denna driver en likadan trappremskiva vid övre delen av borrmaskinen. Borrspindeln drives av sistnämnda skiva över en konisk kuggväxel, vars största hjul sitter på borrspindeln. Kuggantalen äro 20 och 40. Beräkna borrspindelns varvtal vid de fyra remlägena. Rita skiss!
6. Huru stor godstjocklek erfordras i en rörledning av koppar, om dess invändiga diameter är 300 mm, trycket i ledningen 10 kgf/cm² och tillåten dragspänning i koppar 200 kgf/cm²?
7. En ångturbingenerator avgav under ett dygn en medeleffekt av 4 500 kW. Under samma tid var kolförbrukningen 76 ton. Beräkna anläggnigens totala verkningsgrad. Kolets förbränningsvärme är 6 000 kcal/kg.
8. Huru stor belastning per m² inklusive egen vikt tål ett golvbjälklag med 8 · 23 cm bjälkar, om centrumavståndet mellan bjäl-

karna är 50 cm, deras spännvidd 5 m och tillåten påkänning för böjning = 80 kgf/cm²?

9. Ur en rund stock uthugges en pelare med största möjliga kvadratiska tvärsnitt. Hur många procent försvagas därvid stockens hållfasthet mot avknäckning?

Resultat: **1.** 1 130 kgf. **2.** ca 10 kgf. **3.** 31,1 kW. **4.** 1 ton. **5.** 400, 250, 160, 100 varv/min. **6.** 7,5 mm vid 10 kgf/cm² övertryck. **7.** 20,4 %. **8.** 360 kgf/m². **9.** 57,6 %.

Forts. fr. s. 113.

Ur innehållet: H. S. JELSTRUP, Camille Flammarion; S. ROSSELAND, Kosmologi; E. JENSEN, Mørke skyer i melkeveien; J. V. GARWICK, Optikk for amatører; L. OWREN, Norsk Astronomisk Selskab 5 år; C. SOLBERG, Stjernehimmelen jan.—juni; J. WASIUTYNSKI, Om månekraternes opprinnelse og planetenes diastrofisme.

Fra Fysikkens Verden, Oslo årg. 4. 1942—43: 3.

Ur innehållet: E. A. HYLLERAAS börjar en artikelserie om nobelpristagarna i fysik och kemi med en kort uppsats om den förste pristagaren i fysik, W. K. Röntgen. Några inledande ord om Alfred Nobel inleder serien. — O. LINDSTAD, Svevninger; L. OWREN, Nebuliumlinjene og deres tydning; O. NETTELAND, Om elektronmikroskoper med elektrostatiske linser; AA. ORE, Nummerisk bestemmelse av egenverdier som røtter i determinantligninger.

Naturen, Bergen 1943: 2—4.

Ur innehållet: T. BRATH, Ild og vann på Island; B. TRUMPY, Atomspaltning ved høyvoltrøntgenstråling; E. RUSTUNG, De kjemiske kampstoffers virkning på organismen; S. EVJEN, Om værtyper; K. F. WASSERFALL, Magnetisk forskningsarbeide i Norge. Et vitenskapelig 100-årsjubileum.

Föredrag under våren 1943 inom svenska matematiska, fysiska och kemiska föreningar.

Lund:

Matematiska Sällskapet, ordf. prof. M. RIESZ, sekr. fil. mag. B. HOLMBERG.

Föredrag: I samband med sällskapets 20-års jubileum ($^{27}/_{2}$) föreläste prof. M. RIESZ om En åskådlig bild av den icke-euklidiska geometrien. — I en påbörjad föredragsserie över ämnen från »Matematikens historia» ha föredrag hållits av fil. mag. F. LANNÉR, Några geometriska problem under antiken, och av fil. mag. B. PERSSON, Pierre de Fermat.

Kemiska Föreningen, ord. prof. L. SMITH, sekr. fil. dr IDO LEDEN.

Föredrag: civiling. P. STREIJFFERT, Om krut och sprängämnen ($^{26}/_{1}$). — Föreningens 75-års jubileum firades den 15 febr. med föredrag av: docent B. ADELL, Kort översikt över Kemiska Föreningens verksamhet under de senaste tjugufem åren; prof. L. SMITH, Kemister och kemisk

forskning i Lund; prof. B. HOLMBERG, Lundakemien i Stockholm. — Fil. lic. F. BOBECK, Kontroll av smör (2/4). — Sir LAWRENCE BRAGG, Cambridge, föreläste (4/5) Om metaller och (5/5) över The Structure of a Protein. — Prof. L. SMITH, Reaktionen mellan aminer och etylenoxider (14/5); fil. lic. H. OLERUP, Extinktiometrisk bestämning av järn(III)-rodanidens komplexitet (14/5); Diskussion: Brönsteds syra-bas begrepp — en nomenklaturfråga (14/5).

Föreningen i Lund för matem.-naturv. underv. se s. 97.

Stockholm:

Matematiska Sällskapet, ordf. prof. F. CARLSON, sekr. fil. lic. H. RUDBERG.

Föreningen för matem.-naturv. undervisning se s. 94.

Svenska Fysikersamfundet, ordf. prof. A. E. LINDH, sekr. fil. dr fru ANNA BECKMAN.

Årsmöte (22/1) å Stockholms Högskola med föredrag av civiling. R. RÖDSTRÖM, Statens skeppsprovningsanstalt i Göteborg.

Fysiska Sällskapet, ordf. prof. E. HOLM, sekr. fil. dr E. LINDHOLM.

Föredrag: prof. H. ALFVÉN, En teori för norrsken och magnetiska stormar (2/2); fil. stud. R. WESTÖÖ, Upplösning och ljusstyrka hos prismaspektrografer (8/2); fil. dr H. HELLSTRÖM, Färgmetrik, med demonstrationer (22/2); prof. M. v. LAUE, Berlin, Eine Ausgestaltung der Londonschen Theorie der Supraleitung (5/3); fil. lic. P. A. LAGERQUIST, Tyngdkraftens periodiska variation och metoder för dess uppmätning (12/3); prof. H. ALFVÉN, En ny typ av vågrörelse och dess betydelse för solens fysik (22/3); prof. C. BENEDICKS, Om bildning av bottenis i vattendrag och Några nybestämningar av invarens dilatationshysteres (12/4); docent C. H. JOHANSSON, Fuktighetsinträngning genom fina hål och tunna spalter (10/5).

Kemiska Sällskapet, ordf. prof. H. v. EULER, sekr. docent L.-G. SILLÉN.

Föredrag: docent H. ERDTMAN, Några drag ur barrträdens biokemi (19/3); prof. A. I. VIRTANEN Helsingfors, Några problem angående mjölkens vitaminer (30/3); Sir LAWRENCE BRAGG, Cambrigde, The Structure of a Protein, Haemoglobin (29/4).

Uppsala:

Matematiska Föreningen, ordf. docent S. TÄCKLIND, sekr. fil. lic. B. KJELLBERG.

Fysiska Sällskapet, ordf. docent B. EDLÉN, v. ordf. docent S. v. FRIESEN. Föredrag: prof. H. ALFVÉN, Planetsystemets uppkomst (24/2).

Kemiska Sällskapet, ordf. prof. A. FREDGA, sekr. fil. lic. I. JULLANDER.

Föredrag: fil. lic. B. STEENBERG, Jonadsorption och jonutbyte på aktivt kol (12/2); Dr phil. H. MOSIMANN, Om hemicellulosa (2/4); fil. lic. N. GRALÉN, Om polydispersitet (11/5). — Ett sammanträde planeras den 10 juni med demonstration av fysikalisk-kemiska och kemiska institutionerna och föredrag av: Mag. scient. K. PEDERSEN, Ultracentifuger; prof. A. TISELIUS, Adsorptionsanalys; docent S. BROHULT, Tillverkning av syntetiskt gummi.

Om influenselektricitetsmaskiner och deras arbetsprincip.

Av docent **HILDING SLÄTIS**, Åbo.

För att accelerera elementarpartiklar — proton-, deuterium- och heliumkärnor — i och för kärnsprängning kan man låta dem upprepade gånger passera ett och samma spänningsfall av några tiotal tusen volt (cyklotronen, LAWRENCE 1930) eller också låta partiklarna passera ett och samma spänningsfall av några millioner volt. För erhållandet av en dylik elektrostatisk högspänning kan man antingen använda en av GREINACHER angiven metod att medelst s. k. kaskadkoppling av $2n$ kondensatorer och lika många likriktare förvandla en växelspänning av amplituden V till en likspänning av storleken $2nV$ (COCKROFT och WALTON 1932) eller också betjäna sig av stora friktions- eller influenselektricitetsmaskiner (VAN DE GRAAFF 1933). Härigenom hava de gamla »elektricitetsmaskinerna» blivit föremål för ett nytt intresse. De hade redan presenterats i en allt mera blygsam form i läroböcker och betraktades nästan som leksaker eller kuriosa. VAN DE GRAAFF visade emellertid, att influenselektricitetsmaskinen i utomordentlig grad kunde förbättras.

Det har konstruerats många olika typer av influensmaskiner. Över maskinernas arbetssätt finner man vanligen invecklade beskrivningar. I E. GRIMSEHLS Lehrbuch der Physik, Bd II, S. 91, 1916 förklaras rent ut, att en tillfredsställande förklaring över den lavinartat *hastiga* elektricitetsutvecklingen i Wimshursts maskin ännu saknas (nya synpunkter ha ej heller framträtt i senare upplagor av samma bok). Den bästa framställningen, synes det mig, giver R. W. POHL (13), s. 49.[1] Vid föreläsningar över olika maskiner har undertecknad sökt ett enkelt schema, varur de olika typerna kunde härledas genom små förändringar och omkopplingar. Ett sådant schema vanns genom en (i tanken utförd) halvering av den Wimshurstska maskinen. Det är min avsikt att här dels visa, huru detta schema i viss mån kan bliva en röd tråd i framställningen av influensmaskiner, dels presentera en ny modell, som kommit till vid försöken att förena fördelar hos Van de Graaffs maskin med fördelar hos andra influensmaskiner.

[1] Se litteraturförteckningen s. 140.

1. Den elektrostatiska generatorns princip.

Principen för en elektrisk generator anges av fig. 1. Mellan tvenne konduktorer *A* och *B* (elektroder) uppstår en elektrisk spänning genom att positiva laddningar *p* föras till *B* eller negativa laddningar *n* till *A*. Så snart potentialskillnad råder mellan *A* och *B*, erfordras för dessa transporter arbete. Detta arbete kan utföras av mekaniska krafter. Laddningarna alstras genom tvenne olika ämnens beröring eller genom influens. I förra fallet ha vi en »friktionselektricitetsmaskin», i det senare en »influenselektricitetsmaskin».

Om *A* förenas med *B* genom en ledning, flyter i denna en elektrisk ström. Om däremot *A* och *B* äro isolerade, ökas potentialskillnaden mellan elektroderna till dess den av bristfällig isolation förorsakade läckageströmmen är lika stor som den, vilken motsvarar transporten av laddningarna *p* och *n*.

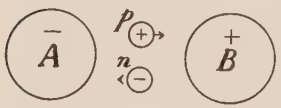


Fig. 1. Den elektriska generatorns princip.

Vid konstruktionen av kraftiga elektricitetsmaskiner har man därför att iakttaga följande grundvillkor:

1) Laddningarna *p* och *n* böra vara möjligast stora.

2) Hastigheten, varmed laddningarna transporteras, bör vara stor.

3) Laddningarna böra restlöst avlevereras till elektroderna.

4) Alla konduktorer böra vara väl isolerade.

Villkoret 1) tillgodoses, om konduktorerna *p* och *n* äro stora eller hava en stor kapacitet. I praktiken uppbäras konduktorerna vanligen av roterande skivor eller böjliga transportremmar. Dessa böra vara av stora dimensioner. Konduktorernas kapacitet kan ökas genom användande av tvenne (eller flere) bredvid varandra, åt motsatt håll roterande skivor, vars konduktorer (metallbeläggningar eller lameller) hava motsatta laddningar (Holtz' maskin av andra slaget, Wimshurst) eller användande av en transportrem, där de åt motsatt håll vandrande laddningarna hava motsatta tecken (Van de Graaff).

Villkoret 2) uppfylles genom användande av större mekanisk effekt men erfordrar mekaniskt hållbara isolationsmaterial.

Villkoret 3) uppfylles fullständigt genom användande av Faradays burprincip: en laddad konduktor, vilken bringas i beröring med insidan av en större, ihålig konduktor avger fullständigt sin laddning till denna.

Villkoret 4) tillgodoses självfallet vid användande av förstklas-

sigt isolationsmaterial. Dessa kommo dock, i synnerhet tidigare, i kollision med villkoret 2), som fordrade mekaniskt hållbara material. Ett ypperligt, fast isolationsmaterial är konstprodukten mipolam,[1] vilken äger ebonitens goda isolationsförmåga men därtill en mycket stor, seg hållfasthet. Använder man en böjlig transportrem, kan denna göras av gummi, siden eller isolationspapper.

2. Influensmaskinernas indelning i tvenne grupper beroende på laddningstransportens art.

Influensmaskinerna kunna indelas i två lika stora grupper beroende på det sätt, varpå laddningarna transporteras. Transporten sker antingen medelst metallbeläggningar fästade vid de roterande isolatorskivorna (eller transportremmarna), varvid laddningarna till- och bortföras medelst släpkontakter (metallpenslar) eller också med användande av isolatorskivor (eller transportremmar), varvid laddningarna »sprutas» på och »bortsugas» medelst metallspetsar (»sugkammar») eller klena trådar. Denna dualism i konstruktionen illustreras av figurerna 2 *a* och 2 *b*, vilka därjämte framställa Faradays burprincip tillämpad vid laddningarnas avgivande till en konduktor *K*. Fig. 2 *a* visar, huru metallbeläggningarna (de svarta rektanglarna) på den isolerande skivan *D*:s övre sida genom influens från den negativt laddade konduktorn *A* laddas positivt genom att den positiva elektriciteten attraheras mot *A*, medan den negativa elektriciteten vid beröring med metallpenseln *F* avgår till jorden *J*. Alla förbi *A* passerande metallbeläggningar få en lika stor laddning, vilken fullständigt avgives vid metallpenseln *G*, varigenom konduktorn *K* oupphörligt uppladdas och lamellerna oladdade lämna *K*. I fallet *b* polariseras den dielektriska skivan *D* i fältet mellan spetsen *F* och konduktorn *A*, varigenom den från spetsen *F* utströmmande positiva elektriciteten attraheras

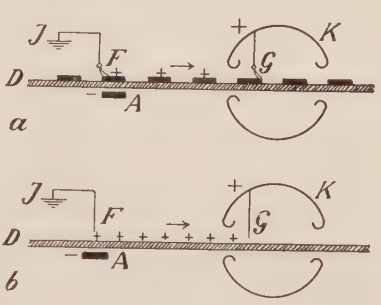


Fig. 2. *a* Elektricitetstransport medelst metallbeläggningar (de svarta rektanglarna på *D*) och -borstar (*F* och *G*), *b* Elektricitetstransport medelst dielektrikum (*D*) och sugkammar (*F* och *G*).

[1] Mipolam, kvalitet H, typ PCU levereras av Venditor Kunststoff-Verkaufsgesellschaft m. b. H., Troisdorf, Bez. Köln.
(Skånska ättikfabrikerna torde ha lika goda produkter. Red. anm.)

av de negativa bundna laddningarna på skivans övre sida. Skivan uppladdas härigenom med positiv elektricitet, som avgives vid sugkammen G (i båda fallen stiger K:s potential ända till dess rörelsen hos skivan avbrytes eller isolationen brister).

I det följande behöva vi sålunda icke förlänga framställningen genom att särskilt beskriva maskiner av typen *b*.

3. Några influensmaskiners arbetsprincip.

Den enklaste influensmaskinen är som känt den av svensken Wilcke år 1762 uppfunna, av Volta förbättrade *elektroforen*. Elektroforens princip ingår som detalj av fig. 2 *a* och innebär ett fortsatt uppladdande av en (eller flere) konduktorer genom influens från en och samma laddning A.

Holtz (6) uppladdade år 1864 en konduktor medelst *en med stanniolsektorer försedd roterande glasskiva* enligt principen i fig. 2 *a* (burprincipen användes dock icke). Holtz använde även principen *b* och erhöll 9 tums gnistor, då glasskivans diameter var 30 tum. Vid experiment med olika förhållande mellan bredd hos och avstånd mellan stanniolsektorerna fann han, att gnistlängden avtog, då bredden hos sektorerna ökades, vilket sannolikt utgjorde orsaken till hans bittra ogillande av den s. k. Wimshurst-maskinen (jämf. nedan).

Toepler (14) (15) och Holtz (6) (7) uppfunno ungefär samtidigt (1865) *den självladdande influensmaskinen* (fig. 3), i vilken tvenne motsatt laddade konduktorer A och B alstra var sin serie av motsatta laddningar i stanniolbeläggningarna s_1, s_2, ... s_5, s_6, ..., varvid de av G_1 och G_2 uppsamlade positiva och negativa elektricitetsmängderna ledas till de influerande konduktorerna B resp. A, härvid oupphörligt ökande deras influensverkan (för att förenkla den schematiska bilden tänka vi metallbeläggningarna fästade på insidan av en roterande, isolerande cylinder). Vi fästa oss särskilt vid den s. k. *polarisatorn*, d. ä. den ledare som förenar borstarna F_1 och F_2 och vilken möjliggör ett åtskiljande av positiv och negativ elektricitet i beläggningarna s_1 och s_5. Man uppsamlar dock icke elektriciteten från konduktorerna A och B (emedan en kortslutning då skulle bringa maskinen ur funktion) utan begagnar särskilda uppsamlingsborstar (kollektorer), vilka leda elektriciteten till de egentliga elektroderna N och P, vilka vanligen utgöras av i förbindelse med leydnerflaskor (icke avbildade) stående urladdningsklot.[1]

[1] Enligt Toepler skall Goodman i Birmingham redan år 1841 ha konstruerat en liknande apparat.

Förutom den nyssnämnda s. k. Holtz'ska *maskinen av första slaget* konstruerade Holtz år 1869 en annan typ (Holtz' *maskin av andra slaget*) med tvenne åt motsatt håll rörliga koncentriska skivor och tvenne polarisatorer F_1F_2 och G_1G_2 (fig. 4. Här ersättas åter skivorna med cylindrar).[1]

Maskinens arbetsprincip blir enkel, om man observerar att maskinen kan anses sammansatt av tvenne parallellkopplade influensmaskiner av enklare typ, symmetriskt belägna med avseende

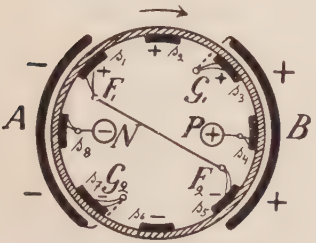


Fig. 3. Holtz-Toepler-maskinens arbetsprincip.

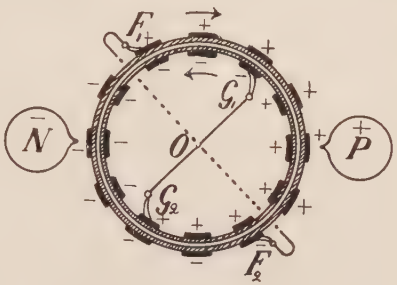


Fig. 4. Arbetsprincipen hos Holtz' influensmaskin av andra slaget (Wimshurst).

å en rät linje genom konduktorerna N och P. Vi föreställa oss då, att de i fig. 4 på den yttre cylinderns övre sida belägna stanniolbeläggningarna efter ankomsten till konduktorn P forsätta längs den inre cylinderns insida förbi borsten G_1 samt efter ankomsten till linjen NP åter fortsätta medsols längs den yttre cylinderns översida. De båda cylindrarna måste sålunda ersättas av en transportrem. Då denna uträtas, få vi en influensmaskin, som schematiskt avbildas i fig. 5. R_1 och R_5 äro valsar, över vilka transportremmen med metallbeläggningarna (de svarta rektanglarna) löper.

Fig. 6 visar schematiskt, huru snabbt systemet uppladdas av en tillfällig positiv laddning på en enda lamell, den på övre sidan om G. Den översta bilden utgör utgångsläge, och var och en av de följande bilderna fås, då transportremmen föres ett lamellav-

[1] Maskinen (med lameller) benämnes ofta efter Wimshurst; Holtz konstruerade sin maskin enligt principen *b* (se ovan). Han förde en häftig polemik mot Wimshurst, vars maskin med stanniolbeläggningar Holtz ansåg vara underlägsen hans egen modell (jämf. försöken av år 1864). »Wimshursts» maskin har likväl undanträngt den Holtz'ska, och maskinens benämning är måhända just en följd av Holtz' eget avståndstagande från modellen.

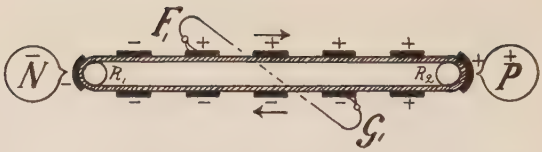


Fig. 5. Den »halverade» Holtz-Wimshurst-maskinen.

stånd framåt. Från en med + betecknad laddning tänkes för enkelhetens skull en enda kraftlinje utgå. Den sista bilden visar, huru lavinartad uppladdningen är redan efter ett halvt omlopp av transportremmen (en liknande förklaring för modellen i fig. 4 se (13)).

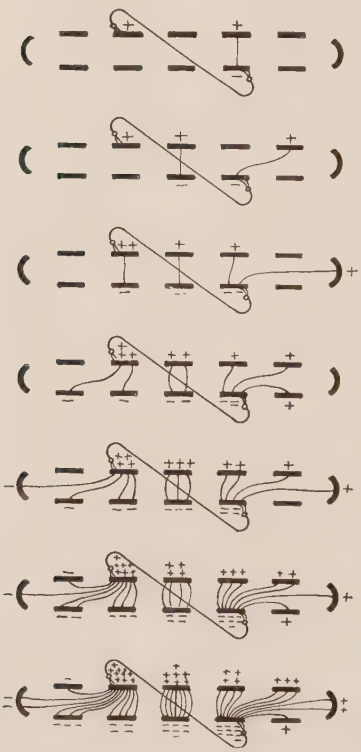


Fig. 6. Den av en tillfällig laddning förorsakade successiva ökningen av lamellernas laddningar i föregående influensmaskin (starkt schematiskt).

Ett schema liknande det i fig. 6 visar oss lätt, att uppladdningen icke blir lika intensiv, om elektricitet avgår till konduktorerna *N* och *P*. Metallbeläggningarnas laddningar bli m. a. o. beroende av huru mycket ström man uttager ur maskinen (jämför nedan).

För åstadkommande av stor strömstyrka fordras stora metallbeläggningar, för åstadkommande av stora spänningar åter fordras god isolation. I allmänhet stiger potentialskillnaden hos konduktorerna *N* och *P* till dess en urladdning äger rum mellan ett par i ledande förbindelse med konduktorerna *A* och *B* stående kulor på lämpligt avstånd från varandra eller också slå gnistor över mellan *N* och F_1, G_1 och *P* samtidigt. Gnistlängden förkortas härvid ofta av de mellan nämnda punkter belägna lamellerna. För att kunna åstadkomma möjligast stora strömstyrkor och spänningar har Wommelsdorf (21) (22) därför inbäddat lamellerna i de rote-

rande (bakelit-)skivorna. Beröring med metallborstarna nås genom små kontakter i rännor längs skivornas periferier. Större spänning fås, om vinkeln F_1OG_1 (fig. 4) är liten (dock ej mindre än två lamellavstånd; lamellernas antal är i verkligheten större än i fig. 4, t. ex. 32 på vardera skivan). För att få största möjliga effekt bör man enligt WOMMELSDORF iakttaga, att det finnes en gynnsammaste storlek hos lameller, skivavstånd, skivtjocklek och polarisatormotstånd. För maskiner med skivor, i vilka sektorerna inbäddats (s. k. *kondensatormaskiner*), är dock detta beroende betydligt mindre. Även för Holtz' influensmaskin av det första slaget införde WOMMELSDORF de nya skivorna med framgång. Genom att konduktorerna N och P (fig. 3) på *båda* sidor (ej avbildat) omslöto de roterande metallsektorerna i ögonblicket för upptagandet av laddningarna (vid borstarna G_1 och G_2) infördes även den av villkoret 3) motiverade Faradays burprincip.

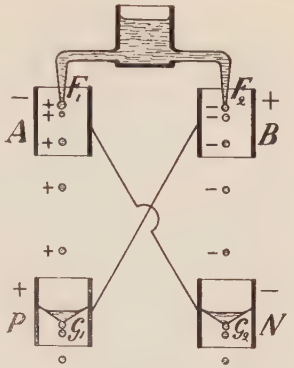


Fig. 7. Lord KELVINS vatteninfluensmaskin.

Vi önska ej här ingå på alla mer eller mindre lyckade influensmaskiner, vilka vid slutet av 1800-talet sågo dagens ljus. Anmärkningsvärd i sin egenart och av betydelse för influensmaskinernas utveckling är likväl den av lord KELVIN år 1867 konstruerade *vatteninfluensmaskinen* (fig. 7). Från ett tvågrenat vattenledningsrör F_1F_2 (motsvarande polarisatorn i fig. 3) droppar vatten (motsvarande beläggningarna s_1, ..., s_5 ...) genom de isolerade metallcylindrarna A och P resp. B och N, elektriskt förenade på sätt som angives av den schematiska figuren. Cylindrarna P och N äro försedda med trattar, varigenom laddningarna komma att avgivas i det inre av cylindrarna och Faradays burprincip sålunda blir beaktad.

4. VAN DE GRAAFFS influensmaskin.

För uppnåendet av största möjliga potentialdifferens mellan konduktorerna N och P (fig. 5) är det tydligt, att avståndet F_1G_1 ävensom lamellbredden bör minskas. I stället för att minska avståndet F_1G_1 kan man emellertid bryta förbindelsen mellan de lika benämnda borstarna och i stället för att som hittills neutralisera de genom influens uppkomna icke önskvärda laddningarna avleda dem

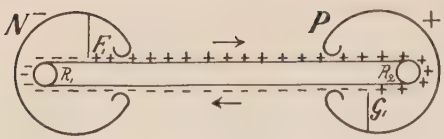


Fig. 8. Schema till förklaringen av Van de Graaffs elektricitetsmaskin.

med hjälp av Faradays burprincip — en anordning som låter sig förena med önskemålet att ombilda konduktorerna *N* och *P* efter nämnda princip. Vi få då en influensmaskin, som schematiskt framställes i fig. 8. De influensladdningar, vilka tidigare neutraliserades, bidraga här direkt till uppladdandet av konduktorerna, varigenom maskinen blir utomordentligt effektiv.

Denna snillrika influensmaskin härrör av Van de Graaff (1933). Hans maskin avvek visserligen något från schemat i fig. 8, vilket förf. ritat för att få en didaktisk anslutning till sin syn på arbetsprincipen hos Holtz' maskin av andra slaget. Fig. 9 visar Van de Graaffs anordning (19). Denna kan uppfattas som tvenne seriekopplade maskiner av typen fig. 8. Genom att sugkammarna G_1 och F_2 förenats ha deras laddningar neutraliserats, vilket gör att sfäriska konduktorer icke behöva byggas omkring transportremmarnas nedre partier. Det är för övrigt icke nödvändigt att hava två system såsom i fig. 9. Enbart t. ex. den vänstra halvan arbetar lika bra för sig själv. Såsom konduktor P_1 kan man i detta fall tänka sig arbetsrummets väggar. Konduktorn P_1 omsluter sålunda hela maskinen.

Elektricitetsutvecklingen i Van de Graaffs maskin är i motsats till de tidigare behandlade influensmaskinerna oberoende av om konduktorerna *N* och *P* äro isolerade och hava maximal spänning eller om de äro förenade med en elektrisk ledning som gör deras potentialskillnad minimal.

Van de Graaffs maskin har utförts i stor skala (18) vid Massachusetts tekniska institut i luftskeppshallen på Round Hill (fig. 10). De sfäriska aluminiumkonduktorerna, 4,5 m i diameter, vila på 6,7 m höga textolitcylindrar av 1,8 m diameter och $^5/_8$ tums tjocklek. Cylindrarna åter stå på stål-

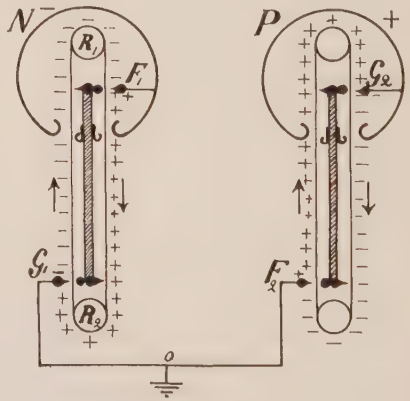


Fig. 9. Van de Graaffs elektricitetsmaskin (schematiskt).

vagnar, vilka kunna skjutas längs järnvägsskenor. Mellan konduktorerna, vilka innehålla laboratorier med arbetsbord, bänkar, instrument o. s. v. löper den långa vakuumtuben, i vilken elementarpartiklarna accelereras av den höga potentialskillnaden mellan kloten. Maximalt utgör den 5 100 000 volt, varvid protonströmmens styrka uppgår till 1,1 mA. Spetsarna G_1 och F_1 laddas för övrigt icke av influenselektricitet utan av ett högspänningsaggregat, bestående av generator, transformator och likriktare. Den tillförda spänningen är 20 000 volt. I vardera cylindern finnas tvenne transportband. Dessa bestå av elektriskt isolationspapper, 0,425 mm tjockt och 1,2 m brett. Valsarna äro av stål och 15 cm i diameter. Papperet framdrives med en hastighet av 30 m i sekunden.

Fig. 10. Van de Graaffs elektrostatiska högspänningsgenerator i luftskeppshallen på Round Hill (1).

Den max. laddning, som en i luft av normalt tryck befintlig yta (ledare eller oledare) kan upptaga utgör $2{,}65 \cdot 10^{-9}$ coulomb/cm² (en större laddning övervinner luftens isoleringsförmåga och leder till bildning av en urladdande korona). Man kan sålunda med kännedom om transportremmens hastighet och bredd lätt beräkna den högsta möjliga strömstyrkan. Med beaktande av att laddningen »sprutas» endast på remmens ena yta finner man att den uppnådda strömstyrkan hos Van de Graaffs stora maskin är 60 % av den teoretiskt möjliga.

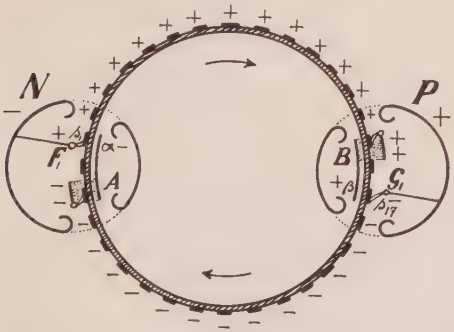


Fig. 11. Författarens influensmaskin (schematiskt).

En generator enligt Van de Graaffs princip med *en* konduktor (diam. 10,2 m, spänning 3,5—4 MV) har utförts i Charkow (11). Mindre modeller av dessa s. k. »bandmaskiner» ha studerats flerstädes i Europa, bl. a. i Berlin (3) och Danzig (5) (9) (10).

Fig. 12. Av författaren tillverkad influensmaskin. Den mot åskådaren vända, halvsfäriska, av metallnät gjorda delen av den vänstra konduktorn (*N* i fig. 11) har avlyfts, varigenom man kan se en del av konduktorn *A* (i fig. 11 ligger denna del till vänster om lamellerna) jämte stödet (det ljusa, lodräta strecket) för borsten F_1.

För att öka de elektrostatiska maskinernas effekt kan man innesluta dem i komprimerad luft (10) (16) (20). Sålunda har Van de Graaff (16) inbyggt en bandgenerator (bandbredd 35 cm) jämte vakuumtub för acceleration av elementarpartiklar uti en stålcylinder av 2,5 m höjd och 85 cm diameter. Trycket är 11 atmosfärer och den erhållna spänningen 1,25 MV vid en strömstyrka av 1 mA. Apparaten är avsedd för vetenskapligt och medicinskt bruk.

I stället för transportremmar har man även använt Holtz' ursprungliga anordning med en roterande skiva (se ovan) och genom seriekoppling av dylika högspänningsgeneratorer nått höga spänningar (2) (3).

5. En av författaren byggd influensmaskin.

Mindre modeller av infl.-maskiner äro enkla att tillverka (12). Som bandmaterial är gummi lämpligt. Då gummi likväl har en begränsad livslängd, störande vibrationer lätt uppstå och en självuppladdande influensmaskin utan metallbeläggningar företer en viss opålitlighet — i synnerhet vid demonstration inför ett stort auditorium (då luftens relativa fuktighet är stor) — har författaren sökt konstruera en influensmaskin som skulle förena effektiviteten

hos Van de Graaffs maskin med pålitligheten hos Wimshursts maskin och med det ur konstruktionssynpunkt fördelaktiga användandet av en enda roterande skiva. Jag kom härvid till en modell, vars arbetsprincip återges i fig. 11.

Beteckningarna ansluta sig till vår tidigare framställning. Medan den positiva och negativa influensladdningen i spetsarna F_1 resp. G_1 i fig. 8 uppkommer av de på transportremmen mittemot belägna negativa resp. positiva laddningarna, motsvaras dessa laddningar här av de vid delarna α och β av de fasta uppsamlingskonduktorerna A och B (burprincipen användes även på dessa inre konduktorer) koncentrerade laddningarna.

Fig. 12 visar en apparat, som jag byggt efter denna princip. Den roterande glasskivan[1] har 41 cm diameter och har därigenom samma storlek som skivorna hos en här befintlig Wimshurstmaskin ävensom en Holtz'-maskin av första slaget. Resultatet av en kvantitativ jämförelse mellan dessa tre maskiner framgår av följande tabell:

Maskinens typ	Skivornas laddningstäthet i coul./cm²	Maximal gnistlängd i cm
Holtz' första	$0{,}64 \cdot 10^{-9}$	13
Wimshurst	$2{,}0 \cdot 10^{-9}$	7,3
Författaren	$1{,}3 \cdot 10^{-9}$	17

Tabellen visar att författarens apparat ger den största potentialskillnaden. Detta beror på användandet av Faradays burprincip. Med de två andra maskinerna fås ej större spänningsskillnad mellan konduktorerna än den, som råder mellan olika delar av glasskivorna. Potentialskillnaden mellan tvenne konduktorer, till vilkas inre positiva resp. negativa laddningar föras, stiger däremot ända tills isolationen brister.

Det må slutligen påpekas, att tillverkningen av någon av de beskrivna apparaterna är en lämplig arbetsuppgift för händiga skolpojkar. Härvid kunna ofta ytterst billiga material komma till användning. Så t. ex. kan man göra skivorna i Wimshursts maskin av papp och likväl få en betydande elektricitetsutveckling. Lord Kelvins apparat kan sammanställas av tomma konservburkar, några glasrör eller paraffinerade silkestrådar o. s. v.

[1] Samtliga isolatorer ha senare med fördel (mekanisk hållfasthet, okänslighet mot fukt, mindre vikt, bättre isolation) utbytts mot mipolam, som av *Venditor Kunststoff-Verkaufsgesellschaft* (se ovan) gratis ställts till författarens förfogande — ett tillmötesgående, vilket här omnämnes med tacksamhet.

Litteratur.

1) W. L. Bragg, Elektriciteten, Helsingfors 1937.
2) O. Dahl, Rev. of Scient. Instr. 7, 254, 1936.
3) L. Fauldraht, Zschr. f. Phys. 116, 701, 1940.
4) H. Greinacher, » 4, 195, 1921.
5) F. Heise, » 116, 317, 1940.
6) W. Holtz, Pogg. Ann. 126, 157, 1865.
7) » » 127, 320, 1866.
8) G. Ising, Kosmos 11, 141, 1933.
9) W. Kossel, Zschr. f. Phys. 111, 264, 1938.
10) U. Neubert, Zschr. f. Phys. 110, 334, 1938.
11) » , Elektrostatische Generatoren, München 1942.
12) A. Nilsson, Elementa 22, 176, 1939.
13) R. W. Pohl, Elektrizitätslehre, Berlin 1935.
14) M. Toepler, Pogg. Ann. 125, 469, 1865.
15) » , Ann. d. Phys. 10, 730, 1903.
16) J. G. Trump and R. J. Van de Graaff, Phys. Rev. 55, 1160, 1939.
17) M. A. Tuve, L. R. Hafstad und O. Dahl, Naturwissensch. 24, 625, 1936.
18) L. C. Van Atta, D. L. Northrup, C. M. Van Atta and R. J. Van de Graaff, Phys. Rev. 49, 761, 1936.
19) R. J. Van de Graaff, K. T. Compton and L. C. Van Atta, Phys. Rev. 43, 149, 1933.
20) H. Watzlawek, Elektrot. Zschr. 62, 958, 1941.
21) H. Wommelsdorf, Ann. d. Phys. flere artiklar under åren 1902—12.
22) » , Elektrot. Zschr. 62, 958, 1941.

En hemmagjord potentiometer.

Av HERMAN RINDE.

De läroböcker, som vanligen användas vid våra läroverk, hava numera infört pH-begreppet. Tidigare har jag vid min undervisning sökt demonstrera detta med tillhjälp av indikatorer, men det har visat sig, att många elever ej tillfredsställande uppfattat, vad saken gällt. För den elektrometriska bestämningen av pH fordras en potentiometer. I handeln finnas goda rörpotentiometrar, som i kombination med glaselektrod gör pH-bestämningar enkla, men dels äro dylika apparater så dyrbara, att endast ett fåtal läroverk ha råd att anskaffa dem, dels är deras konstruktion invecklad och tarvar kännedom om elektronrörets verkningssätt. Bättre äro för undervisningsändamål de potentiometrar, där emk för ett uppbyggt element bestämmes enligt kompensationsmetoden, och pH därur beräknas. Såsom enskilt arbete har jag tidigare givit elever i uppdrag att bestämma pH med tillhjälp av den vid våra läroverk vanliga typen av Wheatstones brygga. Dessa försök ha ej utfallit tillfredsställande. De potentiometrar, som sannolikt äro de mest instruktiva, äro de, som utförts enligt samma princip som Leeds och Northrups potentiometer, typ K. Men dessa instrument betinga ett högt pris och kunna under kriget ej anskaffas. Jag har därför låtit vaktmästaren vid läroverket i Bromma förfärdiga en enkel potentiometer, för vilken materialkostnaderna belöpa sig till ungefär 75 kr. Här nedan lämnas några uppgifter om dess konstruktion.

Av ett bakelitrör med drygt 10 cm diameter avskars ett 6,5 cm långt stycke, som försågs med en axel, vars ändar voro isolerade från varandra. Denna bakelittrumma nedsvarvades, så att dess diameter blev 10 cm, och på densamma upplindades 10 varv av en 0,5 mm konstantantråd med 5 mm mellan varven. För att åstadkomma bättre kontakt med en längs tråden löpande trissa och för att hindra att tråden angreps i luften överdrogs den med en mycket tunn förgyllning. Trådens motstånd minskade genom denna förgyllning med ungefär 1 ohm. Genom glidkontakter, som pressades mot de från varandra isolerade ändarna av axeln, kunde en ström ledas genom tråden. Bakelitcylindern, som upp-

monterades på en bakelitskiva, försågs med en förnicklad mässingsring, graderad i 100 skaldelar (fig. 1). Vid sidan av denna placerades en nonie, varigenom vridningen kunde avläsas på 0,001 varv när. Trådens ändar voro förbundna med punkterna B (fig. 1), och mot tråden trycktes en glidkontakt, som utgjordes av en förnicklad trissa med 12 mm diameter. Från denna glidkontakt gick en ledning till kontakthylsan T, i vilken telefonen inkopplas, då bryggan användes för mätning av ledningsmotstånd med växelström och telefon. En annan ledning går från glidkontakten genom strömbrytarna 1, 2 eller 3 till punkt G, där galvanometern inkopplas, då bryggan användes för pH-mätningar. Före strömbrytaren 1 var ett motstånd på 1000 ohm och före strömbrytaren 2 ett motstånd på 50 ohm inkopplat. Då strömbrytaren 3 slöts, var glidkontakten direkt förenad med galvanometern. På bakelitskivan fastlimmades vita bakelitstänger, som visa hur ledningarna under bakelitskivan äro dragna. Över bryggan placerades ett skydd av cellofan.

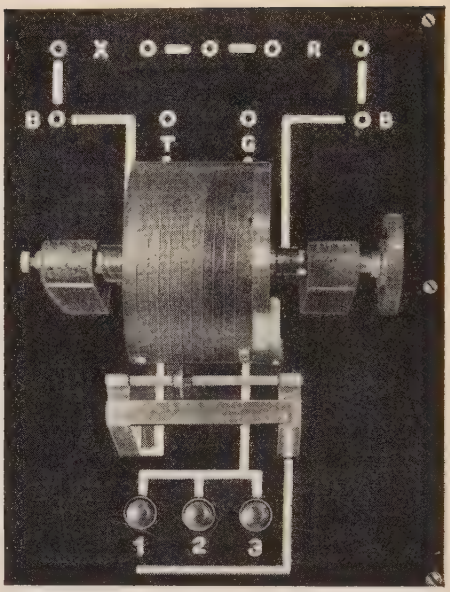


Fig. 1.

Till denna brygga iordningställdes ett förkopplingsmotstånd bestående av 15 seriekopplade motstånd, vart och ett exakt lika med bryggtrådens motstånd. Dessa förfärdigades av 0,3 mm konstantantråd, som upplindades på rullar av isolerande material. Ändpunkterna av dessa motstånd förenades med kontaktplattor, varöver en glidkontakt kunde förskjutas, så att dessa motstånd successivt

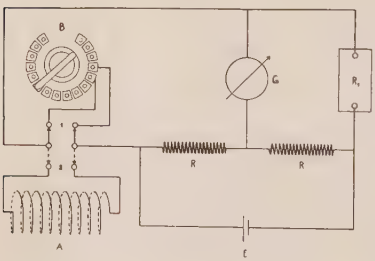


Fig. 2.

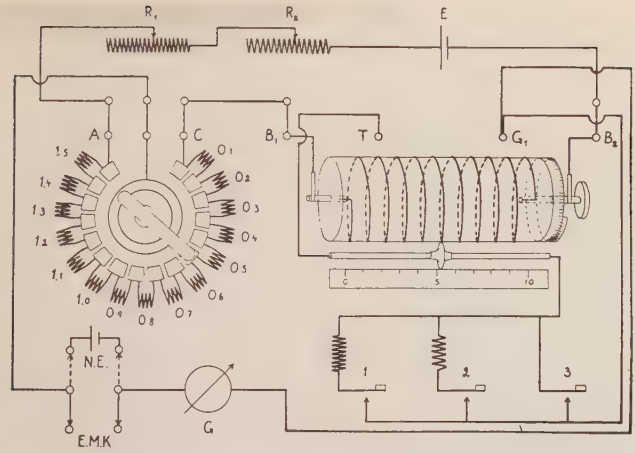


Fig. 3.

kunde inkopplas i en strömkrets. För att göra dessa motstånd exakt lika med bryggtrådens motstånd användes den koppling, som åskådliggöres av fig. 2. En blyackumulator slöts genom tvenne seriekopplade och lika stora motstånd (R). Parallellt med det ena motståndet kopplades ett motstånd R_1, som kunde varieras kontinuerligt, och parallellt med det andra kunde medelst en omkastare antingen valsbryggan (A) eller ett av motstånden i förkopplingsmotståndet B inkopplas. Som nollinstrument användes samma känsliga galvanometer (G), som sedan användes vid pH-mätningarna. Först inkopplades valsbryggan A, och motståndet R_1 varierades, tills galvanometern blev strömlös. Därefter inkopplades ett av motstånden i B. Ett dylikt utgjordes av en bifilärt upplindad motståndstråd, vars ena ände var fäst vid en kontaktplatta. Den andra ändan av motståndstråden fästes medelst en specialgjord kontaktskruv vid nästa kontaktplatta, så att motståndstrådens längd kunde varieras något och dess motstånd bekvämt ändras, tills det blev exakt lika med bryggtrådens motstånd. De olika motstånden justerades upprepade gånger och kontrollerades efter ett halvår.

Valsbryggan och förkopplingsmotstånden inkopplades såsom fig. 3 anger i serie med ett element och motstånden R_1 och R_2. Normalelementet och galvanometern shuntkopplades såsom kopplingsschemat utvisar. Den vridbara armen på förkopplingsmotståndet inställes sedan på den kontakt, som är märkt med de två första siffrorna och kontakttrissan på valsbryggan på den punkt

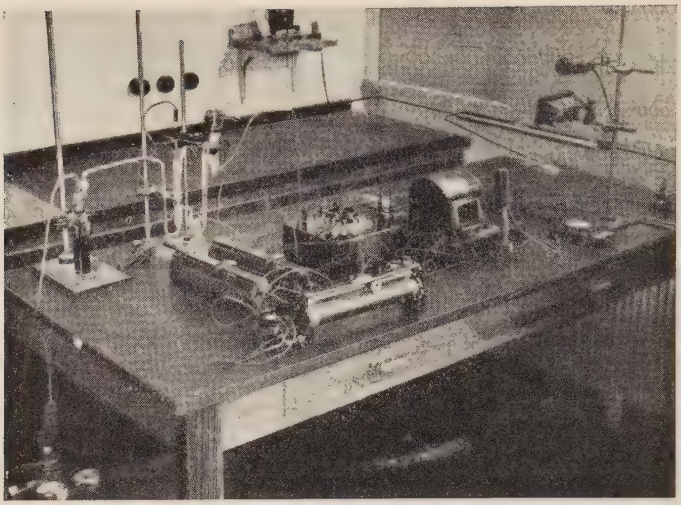


Fig. 4.

motsvarande de följande siffrorna i normalelementets emk. Motstånden R_1 och R_2 varieras, tills galvanometern blir strömlös. Medelst omkastaren inkopplas sedan det element, vars emk skall bestämmas, och förkopplingsmotståndet och glidkontakten på valsbryggan ändras, tills galvanometern ånyo blir strömlös. De två första siffrorna i det uppbyggda elementets emk avläsas på förkopplingsmotståndet, och de följande siffrorna erhållas ur glidkontaktens läge på valsbryggan. — Såsom nollinstrument användes en galvanometer, som för en ström av en mikroamp. gör ett utslag på 47 mm för ett skalavstånd av 1 m.

Apparatuppställningen vid en pH-bestämning, där potentiometern kommit till användning, framgår av fig. 4.

Bestämning av överföringstal.

Av HARALD OLERUP.

I Elementa för 1942 (s. 143) redogör H. Rinde för bestämning av joners vandringshastighet med Nernsts apparat. Eftersom Rinde i artikeln förmodar, att samma metod användes vid kemilaborationerna vid Lunds universitet, är en redogörelse för detta försöks utförande här möjligen av ett visst intresse.

Nernsts apparat användes huvudsakligen för demonstration och för bestämning av kolloiders vandringshastighet, eftersom dessa inte kunna undersökas i elektrolytfria lösningar. Den är däremot mindre lämplig för mätning på elektrolyter, ty dels bli gränsytorna snart suddiga på grund av den snabba diffusionen, dels är det svårt att välja lösningar med samma ledningsförmåga, dels ha temperatur- och koncentrationsvariationer stort inflytande på värdena. Rindes formel (s. 145) förutsätter, att de båda lösningarnas ledningsförmåga är lika. Av nedanstående framgår dessutom, att man inte kan avpassa ledningsförmågan med hjälp av koncentrationerna. Det här beskrivna försöket avser enligt rubriken en bestämning av överföringstalet i stället för vandringshastigheten. Metoden är en kopia av den, som numera användes för precisionsbestämningar, med de förenklingar man kan tillåta sig på ett övningslaboratorium. Intresserade kunna finna en utförlig redogörelse av Mac Innes och Longsworth i Chem. Rev. *11*, 171, 1932 samt i ett flertal arbeten av Mac Innes och medarbetare i J. Am. Chem. Soc. (t. ex. *60*, 3 070, 1938).

Överföringstalet erbjuder vissa fördelar som mätobjekt framför vandringshastigheten, i det att temperatur- och koncentrationsvariationer ha avsevärt mindre inverkan på överföringstalet än på vandringshastigheten, vilket gäller desto exaktare, ju närmare 0,5 talet ligger. Detta gör, att man erhåller för laboranternas självförtroende ofarliga resultat även med enkla och överskådliga anordningar. Andra fördelar finna vi i de under lämpliga betingelser knivskarpa gränsytorna och icke att förglömma i den otvungna definitionen av begreppet överföringstal. Hittorfs bekanta försök erbjuder laboranterna diverse svårigheter att överblicka på grund av de inblandade, växlande sekundärreaktionerna och den speciella

beräkningen av analysen. Ur överföringstalet kunna övriga med jonvandringen sammanhängande storheter beräknas, sedan t. ex. molekylära ledningsförmågan uppgivits. Med denna få laboranterna bekanta sig i ett annat försök. För övrigt kan nämnas, att Nernsts apparat användes i andra försök för att bestämma partiklarnas laddning i positiv och negativ AgJ-sol (Lottermoser) och i Fe_2O_3-sol, dels i ursprunglig och dels i med citrat omladdad sol.

Teori. I ett rör med kaliumpermanganatlösning tänkes en viss genomskärningsyta fastlagd i förhållande till rörets väggar. Då en elektrisk ström passerar genom röret (i amp. under t sek $= i \cdot t$ coulomb), vandra lösningens joner genom nämnda yta. Överföringstalet för en av jonerna definieras som förhållandet mellan den av jonslaget genom ytan transporterade och den totala, genomgångna elektricitetsmängden. Kaliumjonerna transportera $n_{K(MnO_4)} \cdot i \cdot t$ och permanganatjonerna $n_{(K)MnO_4} \cdot i \cdot t$ coulomb; ($n_{A(B)}$ är överföringstalet för jonslaget A i en AB-lösning). Härav får man

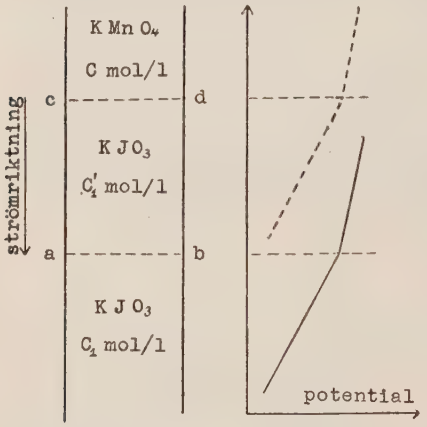


Fig. 1.

$$n_{K(MnO_4)} + n_{(K)MnO_4} = 1. \qquad (1)$$

Vi ha vidare sambandet med övriga ledningsförmågestorheter (u = jonernas absoluta vandringshastighet i cm per (sek och volt/cm), l = elektrolytiska vandringshastigheten i ohm^{-1} per (cm och mol/ml) samt λ = molekylära ledningsförmågan i samma mått).

$$n_{(K)MnO_4} = \frac{u_-}{u_+ + u_-} = \frac{l_-}{l_+ + l_-} = l_{-/\lambda} \qquad (2)$$

Vid försöket ha vi ett rör med kaliumpermanganat- och -jodatlösningar. De antagas vid försökets början ha sin skiljeyta vid a—b (fig. 1) med koncentrationerna C resp. C_1 över och under ytan. Efter t sek har ytan flyttat sig till c—d. Volymen mellan a—b och c—d anta vi vara V liter. Genom ytan c—d har $i \cdot t$ coulomb passerat, varav $n_{(K)MnO_4} \cdot i \cdot t$ transporterats av permanganatjonerna ($C \cdot V$ mol) och resten av kaliumjonerna, dvs.

$$n_{(K)MnO_4} \cdot i \cdot t = C \cdot V \cdot 96500 \text{ coulomb} \quad (3)$$

I denna formel känna vi i, t, C och V och kunna beräkna överföringstalet. På samma sätt få vi för ytan a—b

$$n_{(K)JO_3} \cdot i \cdot t = V_1 \cdot C \cdot 96500 \text{ coulomb} \quad (4)$$

Division av (3) och (4) ger

$$n_{(K)MnO_4}/n_{(K)JO_3} = C/C_1 \quad (5)$$

(Formel (5) kan också härledas ur formel (1) s. 5 i Tiselius doktorsavhandling, som citerats av Rinde.) Den efterföljande jodatlösningens (»indikatorlösningens») koncentration inställer sig automatiskt efter sambandet (5), varvid C_1 dock inte får skilja sig alltför mycket från C'_1. Tillåtna differenser äro för en stigande yta ungefär 30—40 % och för en fallande mindre än 10 %. Använder man stigande ytor, kan man saklöst välja $C_1 = C$.

Det nödvändiga och tillräckliga villkoret för att en skarp gränsyta skall bildas är att indikatorlösningens ledningsförmåga är mindre än permanganatlösningens, dvs. $l_{MnO_4} > l_{JO_3}$ eller $n_{(K)MnO_4} > n_{(K)JO_3}$ (l_K lika för båda). Formel (5) visar, att indikatorlösningens ledningsförmåga dessutom blir mindre på grund av den lägre koncentrationen. Med denna förutsättning får potentialens variation i röret det förlopp, som ritats i fig. 1 till höger (heldragen linje vid tiden 0, streckad vid tiden t). Man ser, att om en permanganatjon skulle befinna sig i jodatlösningen, skulle den dels gå förbi jodatjonerna på grund av sin större vandringshastighet, dels hinna fatt övriga permanganatjoner, eftersom den påverkas av en större kraft. På samma sätt kommer en jodatjon i permanganatlösningen att upphinnas av gränsytan. Gränsytan blir desto skarpare, ju större skillnaden i ledningsförmåga är. (Ovanstående bruka laboranterna begripa, sedan begreppen potential och fältstyrka definierats och exemplifierats; en välbehövlig repetition). Förutom nu behandlat villkor måste indikatorlösningen vara specifikt tyngre än permanganatlösningen för en stigande yta och specifikt lättare för en fallande (acetat kan användas).

Vid noggranna mätningar skall man korrigera för volymförändringarna i lösningen och vid den elektrod, som bestämmer lösningens läge (se nedan). Desutom skall man sörja för konstant temperatur.

Av ovanstående framgår, att bestämningar endast kunna göras för den snabbare av de två olika jonerna. Överföringstalen för indikatorlösningens joner kunna beräknas, först sedan koncentrationen C'_1 bestämts, vilket är besvärligt och föga noggrant. Permanganatlösningen är sålunda användbar för bestämning av per-

manganatjonernas överföringstal, varvid indikatorlösningens negativa jon måste vandra långsammare. Den är vidare användbar som indikatorlösning för snabbare joner, t. ex. NO_3^-, Cl^-, Br^- och OH^- (specifikt lättare). Man blir därvid oberoende av permanganatets bristande beständighet och kan dessutom variera försöket genom att till laboranterna utlämna olika substanser eller olika koncentrerade lösningar av t. ex. KCl. Försök kunna även göras med

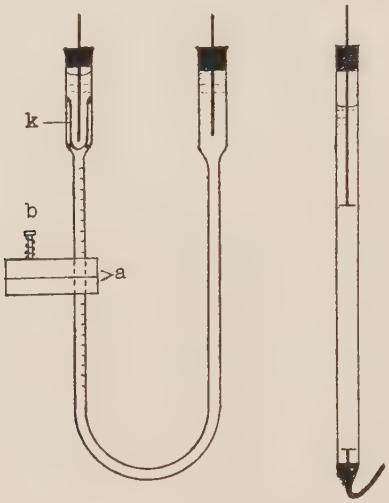


Fig. 2.

ofärgade joner. Skiljeytan synliggöres med hjälp av lösningarnas skillnad i brytningsindex, vilket dock kräver en del extra utrustning.

Apparatur. Apparaten består av ett U-rör enligt fig. 2. Ena skänkeln är graderad i ml och delad mitt itu (tillverkad av en 1 ml mätpipett). Delarna äro med schellack fastlimmade i var sin metallbit (a), som kunna vridas omkring axeln (b) (fastskruvad i den undre). Rörens ändar böra ligga i plan med metallytorna, eventuella brister kan man avhjälpa med schellack. Rörets dimensioner väljas efter det koncentrationsområde, man vill undersöka, och efter den tillgängliga spänningen och amperemetern. För värmeutvecklingens skull är det inte lämpligt att gå högre än någon milliamp. Lägre spänning kan användas, om den graderade skänkeln göres något vidare. Den här använda apparaten har ett rör med ca 2 mm diameter och användes med 0,03-m lösningar, 240 volt och 1,5 milliamp. Elektroderna äro kopparstavar, som fastgjorts i tätslutande gummiproppar. Lösningens läge fixeras genom att den ena skänkeln fylles ända upp. Vid elektroderna

får ingen gasutveckling äga rum (här: bildning av kopparsalt vid anoden, reduktion vid katoden). Kärlet (k) hindrar den ur elektroden utlösta kopparn att sjunka ned i den graderade skänkeln. Det är enkelt att anordna fullt reversibla elektroder, t. ex. de av Rinde s. 145 nämnda. Strömkretsen skall också innehålla ett variabelt motstånd på några tiotusentals ohm. Ett vätskemotstånd av enkel men tillfredsställande konstruktion synes i fig. 2 till höger. Det består av ett glasrör och två kopparelektroder, den undre fastsmält i picein, den övre förskjutbar. Röret fylles med utspädd kopparsulfatlösning. U-rör och motstånd fästas i en dubbel byretthållare. Till apparaten hör desutom ett stoppur och såsom nämnts en milliamperemeter.

Utförande. U-rörets graderade skänkel vrides isär. Den ograderade skänkeln fylles med jodatlösning, varvid man håller fingret över öppningen vid (a) och fyller till randen. Gummiproppen med elektroden sättes i, så att inga luftblåsor stanna kvar, varigenom lösningens läge fixeras. Den andra skänkeln fylles på samma sätt med permanganatlösning. En luftblåsa om några tiondels ml får stanna kvar överst. U-röret placeras i hållaren. Man trycker och vrider på gummipropparna, så att vätskedroppar bildas utanför rörens mynningar vid (a). Strömkretsen kopplas men strömbrytaren slås ej till. Metallstyckena (a) vridas försiktigt ihop, varvid en så vitt möjligt jämn skiljeyta erhålles mellan de båda lösningarna (metallytorna, som glida mot varandra, böra vara väl oljade). Man ser till, att metallstyckenas sidor ligga väl i plan med varandra. Strömmen slutes omedelbart. När skiljeytan blir synlig, inställes amperemetern på ett lämpligt skalstreck, under det att det variabla motståndet är till hälften inkopplat (strömstyrkan stiger genom uppvärmningen, minskar genom att jodatlösningen upptar en allt större del av strömkretsen). Strömstyrkan skall därefter hållas konstant under hela försöket. Tiderna för gränsytans passage förbi skalstrecken antecknas.

När avläsningarna äro färdiga, brytes strömmen. Gränsytan blir snart suddig på grund av diffusionen. Efter 10 minuter slutes strömmen ånyo, varvid gränsytan återtar sin skarpa form inom ett par minuter. Vid omkastning av strömriktningen (urkoppla samtidigt amperemetern) blir gränsytan snabbt förstörd.

Ett medelvärde av tiden för gränsytans passage från ett skalstreck till nästa beräknas med metoden »återkommande intervall». Av t. ex. 24 avläsningar beräknar man differensen mellan första och trettonde, andra och fjortonde etc. och dividerar dessa differensers medelvärde med tolv. $n_{(K)MnO_4}$ beräknas ur (3) och $n_{K(MnO_4)}$ ur (1). Följande exempel må anföras:

0,0292-m $KMnO_4$, KJO_3 som indikator. 1,70 milliamp.

ml	sek	diff.
0,42	0	
0,41	36	
0,40	73	
0,39	113	
0,38	149	
0,37	186	
0,36	223	
0,35	260	
0,34	297	
0,33	332	332
0,32	369	333
0,31	406	333
0,30	444	331
0,29	481	332
0,28	518	332
0,27	554	331
0,26	591	331
medelvärde för 0,09 ml		332 sek

$n_{(K)MnO_4} = 0{,}449$

0,0274-m KCl, $KMnO_4$ som indikator. 1,60 milliamp.

ml	sek	diff.
0,42	0	
0,41	33	
0,40	66	
0,39	99	
0,38	133	
0,37	166	
0,36	199	
0,35	232	
0,34	264	264
0,33	297	264
0,32	330	264
0,31	363	264
0,30	395	262
0,29	428	262
0,28	461	262
0,27	494	262
medelvärde för 0,08 ml		263 sek

$n_{(K)Cl} = 0{,}502$

Eggerts Lehrbuch d. physikalischen Chemie uppger 0,453 resp. 0,503. Mac Innes har bestämt $n_{(KCl)}$ till 0,510.

Några olikheter.

Av **NILS JURINGIUS.**

Fil. lic. A. Pleijel har i Elementa *24*, 31 framställt vissa olikheter mellan cosinerna för en triangels vinklar men ej bevisat dem för en trubbvinklig triangel. Att de även gälla för en sådan, kan visas på följande sätt.

Äro vinklarna v_1, v_2 och v_3, är

$$\cos v_1 \cos v_2 \cos v_3 < 0 < \frac{1}{8}. \tag{1}$$

Vidare är

$$\cos v_1 + \cos v_2 + \cos v_3 = 1 - 2\sin^2\frac{v_1}{2} + 2\cos\frac{v_2+v_3}{2}\cos\frac{v_2-v_3}{2} =$$

$$= 1 - 2\sin\frac{v_1}{2}\cos\frac{v_2+v_3}{2} + 2\sin\frac{v_1}{2}\cos\frac{v_2-v_3}{2} =$$

$$= 1 + 4\sin\frac{v_1}{2}\sin\frac{v_2}{2}\sin\frac{v_3}{2}. \tag{2}$$

Eftersom vinklarna $\frac{1}{2}v_i$ äro spetsiga, kan Pleijels resultat tillämpas, och man får

$$\cos v_1 + \cos v_2 + \cos v_3 \leq 1 + 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{2}. \tag{3}$$

Slutligen är

$$(\Sigma \cos v_i)^2 = \frac{1}{2}\Sigma(\cos v_i - \cos v_j)^2 + 3\,\Sigma \cos v_i \cos v_j; \qquad (i \neq j)$$

$$\therefore\ \Sigma \cos v_i \cos v_j \leq \frac{1}{3}(\Sigma \cos v_i)^2 \leq \frac{3}{4}. \tag{4}$$

I det följande skall visas dels generaliseringar av dessa formler, dels nagra med dem analoga. De stödja sig på följande lemmata.

Lemma 1. Om a_i är medelvärdet av alla i-lediga produkter av de reella talen $x_1, x_2 \ldots x_n$, är

$$a_{i+1}^2 \geq a_i a_{i+2}. \tag{5}$$

Formeln gäller även för $i = 0$, om man sätter $a_0 = 1$.

Bevis: Emedan antalet i-lediga produkter är $\binom{n}{i}$, kan man skriva:

$$f(x, y) = \Pi(x - x_j y) = x^n - \binom{n}{1}a_1 x^{n-1}y + \binom{n}{2}a_2 x^{n-2}y^2 - \ldots + (-1)^n a_n y^n.$$

Införes beteckningen

$$f_p(x, y) = \sum_{i=0}^{n-p} (-1)^i \binom{n-p}{i} a_i x^{n-p-i} y^i,$$

erhålles

$$\frac{\partial^p f}{\partial x^p} = \frac{n!}{(n-p)!} \cdot f_p.$$

Om x_j är en r-faldig rot till $f=0$, är x_j en $(r-1)$-faldig rot till $f_1=0$, och eftersom alla rötter till $f=0$ äro reella, ligger mellan två på varandra följande olika rötter till $f=0$ alltid en, men endast en, enkel rot till $f_1=0$. Genom bevis från $p-1$ till p finner man lätt, att alla rötter till $f_p=0$ äro reella och att inga multipelrötter finnas, som ej även äro multipelrötter till $f=0$.

Om $a_{i+2}=0$, inses giltigheten av (5) omedelbart. Vi antaga därför $a_{i+2} \neq 0$ och välja $p=n-2-i$. Om rötterna till $f_p=0$ äro $z_k y$, erhålles

$$f_p(x, y) = \Pi(x - z_k y).$$

Betraktas y som obekant i ekvationen $f_p=0$, bliva alla dess rötter $\frac{x}{z_k}$ reella, och man finner som förut, att ekvationen

$$\frac{\partial^{n-2} f}{\partial x^p \partial y^i} = (-1)^i \cdot \frac{n!}{1 \cdot 2} (a_i x^2 - 2a_{i+1} xy + a_{i+2} y^2) = 0$$

måste ha två reella rötter och att således diskriminanten är positiv eller 0.

$$\therefore\ a_{i+1}^2 - a_i a_{i+2} \geq 0.$$

Likhetstecknet gäller endast, då alla x_j äro lika eller då $a_{i+1} = a_{i+2} = 0$. Det senare innebär, att $x=0$ är multipelrot till $f_{n-i-2}=0$ och således $a_k=0$ för alla $k>i$.

Lemma 2. Om alla $x_j \geq 0$, bilda talen $\sqrt[i]{a_i}$ en icke-växande talföljd. Speciellt är

$$a_i \leq a_1^{\,i}. \tag{6}$$

Bevis: Låt m vara antalet x_j, som äro >0. Om $m<n$, bliva alla $a_i=0$ för $i>m$. För dessa a_i är satsen självklar. Övriga a_i äro positiva, och för dem erhålles enligt lemma 1:

$$\tfrac{1}{2}(\log a_{i-2} + \log a_i) \leq \log a_{i-1}.$$

Detta innebär, att punkterna $P_i = (i, \log a_i)$ — inberäknat P_0, som motsvarar $a_0=1$ — bilda hörn i en nedåt konkav polygon. Då måste vinkelkoefficienterna för linjerna $P_0 P_i$ bilda en icke-växande talföljd:

$$\frac{\log a_i}{i} \leq \frac{\log a_{i-1}}{i-1} \leq \ldots \leq \log a_1;$$

$$\because \sqrt[i]{a_i} \leq \sqrt[i-1]{a_{i-1}}; \qquad a_i \leq {a_1}^i.$$

Endast om alla x_j äro lika, gäller sista likhetstecknet.

Lemma 3. Om $x_n < 0$ men alla övriga $x_j > 0$ och $a_1 \geq 0$, gäller fortfarande formeln (6).

Bevis: Låt p_i och p_i' vara summan av de i-lediga produkterna av alla x_j, resp. av alla x_j utom x_n, och låt a_i' vara medelvärdet av de senare produkterna.

$$\because p_i' = \binom{n-1}{i} a_i'; \qquad p_i = p_i' + x_n \cdot p'_{i-1}.$$

Då följer av lemma 1, att $a_i' : a'_{i-1}$ bildar en icke-växande talföljd. Och eftersom kvoten

$$\frac{\binom{n-1}{i}}{\binom{n-1}{i-1}} = \frac{n-i}{i}$$

avtar för växande i, bildar då även $p'_i : p'_{i-1}$ en icke-växande talföljd. Det kan tänkas, att denna talföljd når under $|x_n|$. Om r är det minsta index, för vilket

$$\frac{p'_r}{p'_{r-1}} \leq |x_n|, \text{ d. v. s. } p_r = p'_r + x_n \cdot p'_{r-1} \leq 0,$$

så blir $p_i \leq 0$ och således även $a_i \leq 0$ för alla $i \geq r$. I varje fall är $a_n < 0$. För dessa negativa a_i är formeln (6) självklar. För positiva a_i bevisas satsen på samma sätt som lemma 2. Om man i lemma 3 utbyter $x_j > 0$ mot $x_j \geq 0$, gäller fortfarande formeln (6). Om man nämligen till de x_j, n till antalet, som äro $\neq 0$, fogar $m - n$ försvinnande x_j, bliva p_i oförändrade för $i \leq n$, och för $i > n$ bliva alla $p_i = 0$. Betecknas de nya a_i-värdena med a'_i, får man

$$a_i' = \frac{\binom{n}{i}}{\binom{m}{i}} \cdot a_i \leq \frac{\binom{n}{i}}{\binom{m}{i}} \cdot {a_1}^i.$$

Tillämpas lemma 2 på m tal, av vilka n stycken äro $= 1$ och de övriga $= 0$, får man

$$\frac{\binom{n}{i}}{\binom{m}{i}} < \left(\frac{n}{m}\right)^i,$$

och användes detta på föregående olikhet, erhålles

$$a_i' < \left(\frac{m}{n} \cdot a_1\right)^i = (a_1')^i.$$

Lemma 4. Om kurvan $y = f(x)$ är konvex nedåt inom intervallet $a < x < b$ och samtliga x_j falla inom eller på gränsen av detta intervall, är [1]

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) \leq \frac{1}{n}[f(x_1) + \ldots + f(x_n)]. \tag{7}$$

Likhet inträffar endast, om kurvan $y = f(x)$ är en rät linje inom det intervall, som begränsas av minsta och största x-värdet.

Bevis: Tänkas enhetsmassor placerade i punkterna $P_i = [x_i; f(x_i)]$, bliva tyngdpunktens koordinater $\frac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n)$ och $\frac{1}{n}[f(x_1) + + \ldots + f(x_n)]$. Och eftersom tyngdpunkten måste ligga ovanför den nedåt konvexa polygon, som punkterna P_i bilda, inses omedelbart riktigheten av (7).

Det är ej nödvändigt, att alla x_j falla inom intervallet. Indiceras talen x_j efter växande storlek, kunna x_1 och x_n falla utanför intervallet under följande villkor.

Lemma 5. Sätt $z_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, $z_2 = \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_n)$, $u_1 = \frac{1}{2}[f(x_1) + + f(x_2)]$, $u_2 = \frac{1}{2}[f(x_{n-1}) + f(x_n)]$. Under förutsättning att z_1 och z_2 falla inom eller på gränsen av det intervall, för vilket kurvan $y = f(x)$ är konvex nedåt och att

$$u_1 \geq f(z_1), \quad u_2 \geq f(z_2),$$

gäller fortfarande formeln (7).

Eftersom $\frac{1}{2}(x_1 + x_2) \leq \frac{1}{n}\Sigma x_j \leq \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_n)$, blir bevisföringen som förut.

Med stöd av dessa lemmata erhållas nu följande formler.

a. Av lemma 2 följer, att om alla vinklarna v_i ligga i första eller fjärde kvadranten, är

$$\Sigma \cos v_i \cos v_j \ldots \cos v_k \leq \binom{n}{r} \cdot \left(\frac{\cos v_1 + \ldots + \cos v_n}{n}\right)^r, \tag{8}$$

[1] Formeln kan skrivas allmännare:

$$f\left(\frac{c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n}{c_1 + \ldots + c_n}\right) \leq \frac{c_1 f(x_1) + \ldots + c_n f(x_n)}{c_1 + \ldots + c_n},$$

där c_i äro positiva tal. Men för det följande behöves endast ovanstående specialfall.

där $i, j \ldots k$ vid summeringen genomlöper samtliga r-lediga kombinationer av talen $1, 2 \ldots n$. Enligt lemma 3 gäller formeln, även om en vinkel ligger i andra eller tredje kvadranten, förutsatt att $\Sigma \cos v_i \geq 0$.

b. Tillämpas lemma 4 på funktionen $-\cos v$, erhålles

$$\cos \frac{v_1 + \ldots + v_n}{n} \geq \frac{1}{n}(\cos v_1 + \ldots + \cos v_n), \tag{9}$$

om samtliga vinklar uppfylla villkoret

$$-\frac{\pi}{2} \leq v_i \leq \frac{\pi}{2}.$$

Enligt lemma 5 gäller (9) även om en eller två vinklar falla utanför detta intervall, under förutsättning att

$$v_1 > -\pi, \; v_1 + v_2 \geq -\pi, \; v_n < \pi, \; v_{n-1} + v_n \leq \pi.$$

Härvid förutsättes, att vinklarna indicerats efter växande storlek.

c. Utbytas vinklarna v_i mot $v_i + \frac{\pi}{2}$, övergår cosinus till sinus i formlerna (8) och (9), varvid naturligtvis intervallen för vinklarna undergå motsvarande förskjutning.

d. Lemmata 2 och 3 ge även

$$\Sigma \cot v_i \cot v_j \ldots \cot v_k \leq \binom{n}{r} \cdot \left(\frac{\cot v_1 + \ldots + \cot v_n}{n}\right)^r, \tag{10}$$

där $i, j \ldots k$ vid summeringen genomlöper alla r-lediga kombinationer av talen $1, 2 \ldots n$, under förutsättning att alla vinklar v_i, eller alla utom en, ligga i första eller tredje kvadranten och att $\Sigma \cot v_i \geq 0$.

e. Lemmata 4 och 5 ge

$$\cot \frac{v_1 + \ldots + v_n}{n} \leq \frac{1}{n}[\cot v_1 + \ldots + \cot v_n], \tag{11}$$

dels om alla vinklar v_i uppfylla villkoret $0 < v_i \leq \frac{\pi}{2}$, dels om villkoret är uppfyllt för alla utom den största v_n. I senare fallet fordras dock, att

$$v_n < \pi, \; v_{n-1} + v_n \leq \pi,$$

där v_{n-1} är den näst största vinkeln.

För en fyrhörnings vinklar erhålles, om man observerar att $v_3 + v_4$ kan utbytas mot $2\pi - v_1 + v_2$ o. s. v.:

$$\cos v_1+\cos v_2+\cos v_3+\cos v_4=2\cos\frac{v_1+v_2}{2}\left(\cos\frac{v_1-v_2}{2}-\cos\frac{v_3-v_4}{2}\right)=$$

$$=4\cos\frac{v_1+v_2}{2}\cdot\sin\frac{v_1+v_3-v_2-v_4}{4}\cdot\sin\frac{v_2+v_3-v_1-v_4}{4}=$$

$$=4\cos\frac{v_1+v_2}{2}\cos\frac{v_1+v_3}{2}\cos\frac{v_2+v_3}{2}. \qquad (12)$$

Sättes $v_4=\pi$, övergår fyrhörningen till en triangel, och vi återkomma till formeln (2). Om vinklarna äro indicerade efter växande storlek, äro vinklarna $\frac{1}{2}(v_1+v_2)$ och $\frac{1}{2}(v_1+v_3)$ spetsiga, emedan de äro mindre än eller lika med både $\frac{1}{2}(v_2+v_3)$ och $\frac{1}{2}(v_1+v_4)$, vilka äro supplementvinklar. Då visar formeln (12), att summan i vänstra membrum har samma tecken som $v_1+v_4-\pi$. Speciellt blir summan $=0$ för $v_1+v_4=\pi$.

Antag en fyrsiding vara omskriven kring en enhetscirkel. Beteckna sidorna i ordning med a, b, c, d och halva vinklarna i ordning med u_1, u_2, u_3, u_4, så att man får

$$a=\cot u_4+\cot u_1=\frac{\sin(u_1+u_4)}{\sin u_1\sin u_4}$$

och liknande för övriga sidor. Jämföras nu följande två formler för fyrsidingens yta (Elementa *25*, 131):

$$T=\frac{1}{2}(a+b+c+d) \quad \text{och} \quad T=\sqrt{abcd}\cdot\sin(u_1+u_3),$$

varvid $\sin(u_3+u_4)$ och $\sin(u_1+u_4)$ utbytas mot $\sin(u_1+u_2)$ och $\sin(u_2+u_3)$, erhålles

$$\cot u_1+\cot u_2+\cot u_3+\cot u_4=\frac{\sin(u_1+u_2)\sin(u_1+u_3)\sin(u_2+u_3)}{\sin u_1\sin u_2\sin u_3\sin u_4}. \qquad (13)$$

Tillämpas formeln (9) på en triangel, återkommer man till formeln (3). Tillämpas sedan (8), får man formlerna (1) och (4). Tillämpas formeln (11) på en triangel, får man

$$\cot v_1+\cot v_2+\cot v_3\geq\sqrt{3}. \qquad (14)$$

Vidare ser man, att framställningen i Elementa *25*, 135 underlättas genom den formel, som man erhåller ur (13) genom att utbyta u_i mot $\frac{\pi}{2}-u_i$:

$$\operatorname{tg}u_1+\operatorname{tg}u_2+\operatorname{tg}u_3+\operatorname{tg}u_4=\frac{\sin(u_1+u_2)\sin(u_1+u_3)\sin(u_2+u_3)}{\cos u_1\cos u_2\cos u_3\cos u_4}.$$

Numerisk beräkning av oändliga serier.[1]

Av B. SVEDBERG.

1. Vid beräkning i praktiken av oändliga seriers summa gäller det vanligen serier med positiva, monotont avtagande termer eller alternerande serier med termernas absoluta belopp monotont avtagande. I båda dessa fall utgöra delsummorna s_n närmevärden för summan $s = \sum_1^\infty a_n$. Vid en alternerande serie får man dessutom en övre och en undre gräns för s, i det att $s_n > s > s_{n+1}$, om $a_n > 0$, $a_{n+1} < 0$. Vid en serie med positiva termer är delsumman s_n alltid en undre gräns för s. Vid en alternerande serie är resten $R_n = s - s_n$ alltid mindre än den första icke medtagna termen och har samma tecken som denna, medan vid en serie med positiva termer R_n säkert är större än den första icke medtagna termen. Detta innebär alltså, att man för att beräkna summan av den ej särdeles långsamt konvergerande serien $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$ med en noggrannhet av 0,0001 måste medtaga minst 100 termer. För att öka konvergensens snabbhet använder man olika serietransformationer, vilka dock vanligen kunna tillämpas endast om man vidtager vissa konstgrepp. Här skall visas en annan metod för numerisk beräkning av summan, nämligen genom användning av Cauchys integralkriterium.

2. Cauchys integralkriterium lyder:

Är $\sum_1^\infty a_n$ en serie med positiva, monotont avtagande termer och är $f(x)$ en för $x > 1$ positiv och likaså monotont fallande funktion, för vilken $f(n) = a_n$ för varje n, är det nödvändiga och tillräckliga villkoret för att Σa_n skall vara konvergent, att integralvärdena $J_n = \int_1^n f(t)\,dt$ bilda en begränsad talföljd, alltså att integralen $J = \int_1^\infty f(t)\,dt$ konvergerar.

[1] Sammandrag ur B. SCHILLING, »Methoden zur numerischen Auswertung unendlicher Reihen», Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 181, 1939/40, 177—192.

Kriteriet är en omedelbar konsekvens av olikheten

$$\int_k^{k+1} f(p)\,dp > a_{k+1} > \int_{k+1}^{k+2} f(p)\,dp. \tag{1}$$

3. Nu har man

$$s_n = \sum_1^n a_p \quad \text{och} \quad R_n = \sum_{n+1}^{\infty} a_p. \tag{2) (3}$$

Man söker en övre gräns G_1 och en undre gräns g_1 för R_n, alltså

$$G_1 > R_n > g_1. \tag{4}$$

Summeras olikheten (1) från n till ∞, fås

$$G_1 = \int_n^{\infty} f(p)\,dp \qquad g_1 = \int_{n+1}^{\infty} f(p)\,dp. \tag{5 a) (5 b}$$

För R_n erhålles då ett närmevärde

$$A_1 = \frac{1}{2}(G_1 + g_1) = \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\int_{k-1}^{k+1} f(p)\,dp \right) \tag{6}$$

med ett största möjliga fel

$$B_1 = \frac{1}{2}(G_1 - g_1) = \frac{1}{2} \int_n^{n+1} f(p)\,dp < \frac{1}{2} a_n. \tag{7}$$

Men ett bättre närmevärde för R_n kan omedelbart erhållas, om man har gjort antagandet att $f''(x) > 0$. Nu gäller också för en helt monoton funktion, att

$$f'(x) < 0,\ f''(x) > 0,\ f'''(x) < 0,\ \ldots \tag{8 a}$$

liksom att

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f'(x) = \lim_{x\to\infty} f''(x) = \ldots = 0. \tag{8 b}$$

Under denna förutsättning att $f''(x) > 0$ fås av fig. 1

$$a_k < \frac{1}{2} \int_{k-1}^{k+1} f(p)\,dp, \tag{9}$$

eftersom ytan $ABCD >$ ytan $AEFD = 2a_k$. Summeras då olikheten (9) från $n+1$ till ∞, fås

$$R_n = \sum_{n+1}^{\infty} a_k < \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{\infty} \int_{k-1}^{k+1} f(p)\,dp = A_1, \tag{10}$$

varför redan A_1 utgör en övre gräns för R_n. Med g_1 som undre gräns fås då ett bättre närmevärde för R_n,

$$A_1' = \frac{A_1 + g_1}{2} = \frac{1}{4}(G_1 + 3g_1) \tag{11}$$

med ett största möjliga fel

$$B_1' = \frac{1}{4}(G_1 - g_1). \tag{12}$$

Men under denna förutsättning att $f(x)$ är en helt monoton funktion, är även funktionen

$$f_1(k) = \frac{1}{2}\int_{k-1}^{k+1} f(p)\,dp - a_k \tag{13}$$

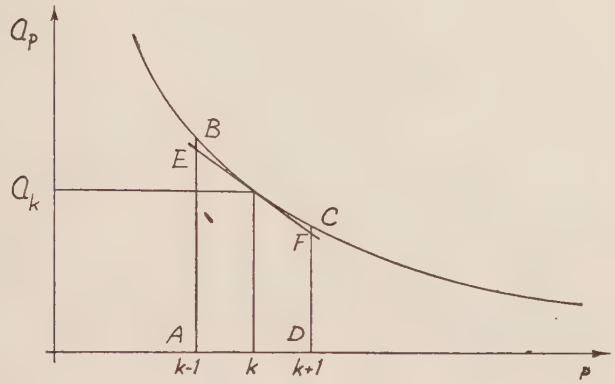


Fig. 1.

en monotont avtagande positiv funktion. Man kan nu alltså sätta de små skillnaderna $f_1(k)$, där $k = 1, 2, 3 \ldots$, lika med termer b_k i en ny serie med monotont avtagande positiva termer. Skillnaden mellan den nya serien $\sum_1^\infty b_k$ och den ursprungliga serien $\sum_1^\infty a_k$ består i att termerna b_k äro så mycket mindre än termerna a_k. I fig. 1 åskådliggöres termen a_k av trapetset *AEFD*, medan termen b_k motsvaras av den smala ytstrimlan *BCFE*. Det är då tydligt, att resten R_n' till serien $\sum_1^\infty b_k$ bör kunna ingränsas inom ett mycket trängre intervall än det som erhållits för resten R_n. Med helt analoga operationer på serien $\sum_1^\infty b_k$ som på $\sum_1^\infty a_k$ erhålles då

$$A_2 = \frac{1}{2}(G_2 + g_2) \quad \text{och} \quad R_n' \approx A_2' = \frac{1}{4}(G_2 + 3g_2). \tag{14) (15}$$

Men enligt (13) och (15) erhålles

$$R_n' = A_1 - R_n; \quad \because R_n = A_1 - \frac{1}{4}(G_2 + 3g_2). \tag{16}$$

Under fortfarande samma förutsättning, att villkoret (8 a) gäller för $f(x)$, kan man sedan på analogt sätt införa en funktion $f_2(x)$ definierad genom

$$c_k = f_2(k) = \frac{1}{2}\int_{k-1}^{k+1} f_1(p)\,dp - b_k, \tag{17}$$

och nästa närmevärde blir

$$R_n = A_1 - A_2 + \frac{1}{4}(G_3 + 3g_3). \tag{18}$$

Upprepas operationen och bildas de positiva funktionerna $f_3(x)$, $f_4(x)$, $\ldots f_i(x)$, $\ldots$ och motsvarande serier med allt mindre termer och allt trängre gränser för resterna, fås till sist ett närmevärde, som kan skrivas

$$R_n = A_1 - A_2 + \ldots + (-1)^i \cdot A_{i-1} - (-1)^i (G_i + 3g_i), \tag{19}$$

där maximifelet är

$$B_i' = \frac{1}{4}(G_i - g_i). \tag{20}$$

Denna procedur kan alltså fortsättas så länge som $f_i(x)$ är en monotont avtagande funktion med $f_i''(x) > 0$.

I formlerna (19) och (20) är alltså

$$G_i = \int_n^\infty f_{i-1}(p)\,dp; \qquad g_i = \int_{n+1}^\infty f_{i-1}(p)\,dp, \tag{21 a) (21 b}$$

där

$$f_{i-1} = \frac{1}{2}\int_{p-1}^{p+1} f_{i-2}(r)\,dr - f_{i-2}(p). \tag{22}$$

4. Den numeriska räkningen skall utföras för serien $\sum \frac{1}{n^2}$, som ger enklast tänkbara funktioner $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ $\ldots$ Formlerna (5) ge

$$G_1 = \frac{1}{n}, \qquad g_1 = \frac{1}{n+1}.$$

Väljes $n = 5$, blir $G_1 = \frac{1}{5}$, $g_1 = \frac{1}{6}$, $A_1 = 0{,}183333$, $A'_1 = 0{,}175$ och $B'_1 = 0{,}00833$. Då $s_5 = 1{,}463611$, blir första närmevärdet $s \approx 1{,}6386$ med felet $< 0{,}0084$. Här ha s_5 och A_1 angetts noggrannare än övriga närmevärden, enär de behövas vid följande beräkningar.

Enligt formeln (13) erhålles sedan

$$f_1(k) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right) - \frac{1}{k^2}.$$

Sättes

$$h_1(n) = \int_n^\infty f_1(k)\,dk = \frac{1}{2}\ln\frac{n+1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{5n^5} + \frac{1}{7n^7} + \ldots,$$

erhålles enligt formlerna (21):

$$G_2 = h_1(5) = 0{,}002667 + 0{,}000064 + 0{,}000002 = 0{,}002733,$$
$$g_2 = h_1(6) = 0{,}001543 + 0{,}000025 = 0{,}001568,$$

och vidare:

$$A_2 = 0{,}002151,\ A'_2 = 0{,}00186,\ B'_2 = 0{,}00029,$$
$$\therefore\ s \approx s_5 + A_1 - A'_2 = 1{,}6451.$$

Enligt (17) erhålles nu

$$f_2(k) = \tfrac{1}{2}\ [h_1(k-1) - h_1(k+1)] - f_1(k)$$

och sättes

$$h_2(n) = \int_n^\infty \frac{1}{2}\, h_1(k)\, dk = \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{40n^4} + \frac{1}{84n^6} + \ldots,$$

erhålles enligt formlerna (21):

$$G_3 = h_2(4) - h_2(6) - G_2 = 0{,}000242,$$
$$g_3 = h_2(5) - h_2(7) - g_2 = 0{,}000093,$$

varav:

$$A'_3 = 0{,}000130,\ B'_3 = 0{,}000037,$$
$$s \approx s_5 + A_1 - A_2 + A'_3 = 1{,}644923.$$

Rätta värdet är $\frac{\pi^2}{6} = 1{,}644934.$

5. Även alternerande serier kunna bliva föremål för en sådan summation, om de först reduceras till en serie med positiva monotont avtagande termer.

Föreligger serien

$$\Sigma\, \alpha_n = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \ldots,$$

varvid förutsättes att

$$\alpha_1 - \alpha_2 > \alpha_3 - \alpha_4 > \alpha_5 - \alpha_6 > \ldots$$
$$\alpha_2 - \alpha_3 > \alpha_4 - \alpha_5 > \alpha_6 - \alpha_7 > \ldots,$$

så kan serien skrivas

$$\Sigma\, \alpha_n = \Sigma\, \beta_n = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_\eta + \ldots,$$

där

$$\beta_1 = \alpha_1 - \alpha_2,\ \beta_2 = \alpha_3 - \alpha_4,\ \ldots\ \beta_\eta = \alpha_{2\eta-1} - \alpha_{2\eta} = \alpha_{n-1} - \alpha_n,\ \ldots,$$

och $n = 2\eta$ är ett helt tal. Om det finnes en funktion $f(x)$, som uppfyller villkoren $f(k) = \alpha_k$, och $F(x) = f(2x-1) - f(2x)$ monotont avtar, så är

$$\beta_n = \alpha_{2\eta-1} - \alpha_{2\eta} = \alpha_{n-1} - \alpha_n = F(\eta) = f(2\eta+1) - f(2\eta) = f(n-1) - f(n).$$

Då fås

$$R_n = \alpha_{n+1} - \alpha_{n+2} + \ldots = \beta_{\eta+1} + \beta_{\eta+2} + \ldots = \sum_{\eta+1}^{\infty} F(p).$$

Alltså fås övre och undre gräns för R_n,

$$G = \int_{\eta}^{\infty} F(p)\,dp, \qquad g = \int_{\eta+1}^{\infty} F(p)\,dp.$$

Väljes såsom exempel den alternerande serien $\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$, blir $f(x) = \frac{1}{2x-1}$ samt $F(x) = \frac{1}{4x-3} - \frac{1}{4x-2}$, vilken funktion är lätt att integrera.

En ny svensk lärobok i geometri.

Av **OLOF STENSTRÖM.**

Den svenska matematiska lärobokslitteraturen, bortsett från de rena skolböckerna är fattig, varför ett nytt tillskott måste hälsas med glädje. Den lärobok i geometri som tidigare använts vid våra universitet vid studier till filosofie kandidat- och fil. ämbetsexamen — Lindelöf, Lärobok i analytisk geometri — har i ett par decennier varit utgången ur bokhandeln. Nästan lika länge har ryktet förmält, att professor Fritz Carlson förberedde en lärobok i geometri. Nu har dess första del kommit.[1]

Ehuru varken titel eller förord upplyser härom, torde boken vara avsedd närmast för dem som aspirera på betyget »godkänd» i nyssnämnda examina. Den vänder sig emellertid i lika hög grad till lärare och intresserade elever i våra gymnasier.

I boken behandlas räta linjen, cirkeln, klotet, konen, cylindern, konvexa polyedrar samt främst andragradskurvor, vartill komma i ett sista kapitel exempel på kurvor av högre grad. Så gott som inga andra bilder än de som förekomma i gymnasiekursen behandlas. Trots detta har det blivit en mycket innehållsrik och omväxlande bok på 360 sidor.

I den utredande texten äro insprängda en stor mängd övningsproblem till vilka i bokens slut fogats svar med tämligen utförliga kommentarer. Redan denna exempelsamling på 510 omväxlande, originella och tankeväckande uppgifter är synnerligen imponerande och måste ha krävt ett stort arbete att sammanställa. Problemens svårighetsgrad synes vara sådan, att de väl lämpa sig som uppgifter för enskilt arbete i matematik på reallinjen. En mång-

[1] Fritz Carlson, Lärobok i geometri. Första delen. C. W. K. Gleerups förlag, Malmö 1943, 361 s., häft. kr. 14:—.

fald av problemen kunna av lärare konkretiseras och förenklas till lämpliga skrivningsproblem. Jag anser, att en mycket stor del av bokens värde ligger i denna exempelsamling.

Men även den egentliga texten i läroboken skulle jag vilja beteckna som en exempelsamling, en samling exempel på geometriska frågeställningar och geometriska metoder, som ge inblickar i den elementära geometriens rika värld. Geometrien är ett mycket mer mångskiftande kunskapsområde än man ofta gör klart för sig. Anledningen till denna bristande insikt är nog den, att de flesta läroboksförfattare, in- och utländska, sätta en ära i metodens ensidighet.

Geometriens studieföremål kunna sägas vara å ena sidan de geometriska *bilderna,* sammansatta eller genererade av elementen punkt, linje, plan, å andra sidan de geometriska motsvarigheter (geometriska transformationer) som kunna uppsättas mellan alla de element, som uppfylla den geometriska rymden. Ofta får studiet av bilderna dominera på bekostnad av motsvarigheterna, ehuru de senare vore värda minst lika stort intresse.

Dessa geometriska föremål kunna definieras och undersökas med mycket olika metoder; man brukar särskilja den analytiska och den syntetiska metoden. Inom den analytiska kan man skilja mellan den rent algebraiska (till vilken Lindelöfs ovannämnda lärobok medvetet begränsar sig) och den även differentialgeometriska. Den syntetiska metoden kunde också kallas den abstrakt konstruktiva, i det att »konstruera ett element» betyder att utpeka det som skärnings- eller sammanbindningselement mellan två eller flera redan givna bilder. Konstruktionerna äro endast tänkta. — Dessutom finnas de konkret konstruktiva metoderna (den beskrivande geometriens metoder), så utformade, att konstruktionen kan utföras som en ritning, varvid man av den erhållna teckningen begär, att den skall ge dels en bestämning av elementens relativa storlek, dels och helst samtidigt en åskådlig (perspektiv) föreställning om elementens anordning i rummet.

De skilda metoderna ha med förkärlek och stundom fanatism omfattats av olika författare. I Sverige har den analytiska geometrien dominerat vid universiteten, den beskrivande geometrien vid de tekniska högskolorna. Den syntetiska geometrien drives huvudsakligen i realskolan och stundom på licentiatstadiet. I utlandet drives eller drevos såväl analytisk som syntetisk geometri vid bägge slagen av högskolor, även om läroböckerna alltid torde ha varit ensidiga.

Professor Carlson har icke fruktat mångsidigheten. De skiftande metoderna öppna perspektiv åt olika håll och kunna locka

den ene att syssla med ett, den andre med ett annat. Boken har härigenom kanske fått en heterogen karaktär, men ur praktisk synpunkt är detta en fördel. Enstaka kapitel kunna lätt brytas ut till uppgift för enskilt arbete i matematik.

I arbetet behandlas de elementära geometriska bilderna men även ett par elementära motsvarigheter, likställighet och inversion. Den ensidighet i metoden, som karakterisera många läroböcker, medför också ensidighet i valet av studieföremål. Vissa bilder och frågor ligga lättare till för den ena, vissa för den andra metoden. Att ellipsen är en oval vet varje lekman, men hur definieras matematiskt begreppet oval? Detta är en enkel fråga, som besvaras i läroboken. Det finnes ett komplex av frågor av denna art, som lätt kunna behandlas syntetiskt, men som aldrig kunna tagas i betraktande i en analytisk lärobok. — Av det sagda framgår, att Carlsons lärobok förtjänar titeln: Geometri utan någon specifikation.

Intet företal ger läsaren något förhandsmeddelande om hur författaren tänkt sig lösningen av det ytterst delikata problem, som planläggningen av en lärobok i den mångskiftande elementära geometrien är. Författaren har ganska djärvt skjutit åt sidan kravet på en systematisk uppbyggnad av lärostoffet.

Det torde vara ett riktigt val att i en lärobok avsedd som förmedlande länk mellan skolmatematiken och högre studier ge en framställning, där behandlingen av de enskilda detaljerna uppfylla alla krav på stränghet i bevisföringen och fullständighet i diskussionen av specialfallen, men där hela teorien dock får vila på den grund skolmatematiken lagt. Förutsättningarna givas icke, men i stort sett kan sägas, att skolkursens syntetiska geometri i planet och i rummet förutsättas. Så lös som behandlingen av den syntetiska geometrien i vår svenska skola numera är, måste det anses vara djärvt att skriva en lärobok i geometri för universitetsstadium utan att gå tillbaka och bygga upp geometrien från början. Men detta djärva grepp har säkert varit det enda möjliga.

Det måste naturligtvis hägra som ett ideal för en läroboksförfattare att låta den elementära geometrien, som redan är ett månggrenat träd, växa upp ur en fast mark med säkra utgångspunkter och med en uppbyggnad, som ger icke blott fasthet åt bevisföringen utan även tilldelar varje geometrisk sats dess bestämda plats i systemet. En läroboksförfattare, som satte detta stora mål för sig, skulle nog snart gripas av eftertankens kranka blekhet, om hans uppgift tillika vore att delge kunskaper om konkreta geometriska problem till den omfattning, varom det här är fråga.

En klar disposition av det geometriska lärostoffet kan erhållas endast genom ett axiomatiskt uppbyggande av lärostoffet, i det man, enligt vad som brukar kallas Kleins Erlangerprogram, successivt inför de geometriska axiomen och först behandlar de geometriska bilder och egenskaper, som kunna definieras medelst en mera begränsad grupp av axiom och därefter, i det man vidgar axiomsystemet, tar nya geometriska egenskaper i betraktande och samtidigt specialiserar de geometriska bilderna.

Man brukar vid studiet av vår vanliga tredimensionella geometri särskilja de affina och de metriska egenskaperna och satserna. Att lägga detta program till grund för en lärobok skulle vara att sätta idealet högt, men att förverkliga det skulle vara svårt både ur teoretisk och pedagogisk synpunkt. Bättre är nog att först rikta studenternas ögon på en viss mångfald problem och att på ett något senare stadium tvinga dem att gå tillbaka till grunden. Det nämnda programmet kan dock giva en lämplig disposition av elementen i en speciell teori, även om icke kravet på en behandling, som grundar sig endast på den nödvändiga axiomgruppen, kan upprätthållas. Så synes det mig lyckligt, att i Carlsons framställning av den analytiska geometriens fundament de i grunden affina problem — för vars lösande det är likgiltigt, om vinkeln mellan koordinataxlarna är rät eller ej — behandlats först och därefter i ett senare kapitel de metriska problemen, som studeras lätt endast med rätvinkliga axelsystem.

Teorien för räta linjen kan även i skolan lätt framställas så, att det klart framträder, vilka satser och formler för den räta linjen, som äro oberoende av axelvinkeln och vilka som bero av denna. Det är icke svårare än det oftast följda förfaringssättet, då axelvinkeln även i onödan antages vara rät. Många geometriska problem av i grunden affin natur kunna analytiskt lösas mycket enklare, om man vid valet av koordinataxlar kan förfoga även över axelvinkeln. Det vore mycket lyckligt, om Carlsons lärobok kunde bidraga till att i skolböckerna en linjes riktningskoefficient definierades som förhållandet mellan ordinatans algebraiska tillskott och abscissans algebraiska tillskott. Att detta förhållande är konstant är just det som karakteriserar linjen som rät. Definitionen är oberoende av axelvinkeln.

I kapitlet »Delningsförhållandet» visar förf. kort och elegant, att om i ett koordinatsystem med allmän axelvinkel ekvationen för en rät linje är $l(x, y) = 0$ och två punkter ha koordinaterna (ξ, η) och (ξ_0, η_0), är $l(\xi, \eta) : l(\xi_0, \eta_0) =$ förhållandet mellan avstånden från (ξ, η) och (ξ_0, η_0) till linjen l, dessa avstånd tagna längs parallella linjer och räknade med tecken, nämligen samma tecken,

om punkterna ligga på samma sida om l, och motsatta tecken, om punkterna ligga på olika sidor om l. Ur denna sats härledas formler för koordinattransformation vid axelsystem med allmän axelvinkel. I kapitlet om rätvinkliga koordinater framträder formeln för vinkelräta avståndet från en punkt till en rät linje och koordinattransformation vid rätvinkliga axelsystem som specialfall av det allmänna fallet.

På några ställen i boken står en stjärna vid rubriken, ehuru ingen upplysning ges om dess betydelse. Den stjärna, som står vid kapitlet »Inversion», bör icke föranleda någon att förbigå detta exempel på en geometrisk motsvarighet.

I kapitlet om cirkeln dominerar begreppet cirkelns potens. I kapitlet om parallellprojektion ges grunderna för denna avbildningsmetod, varefter densamma i förening med omläggning av det projicierande planet användes för konstruktiv behandling av några metriska problem. Konstruktionerna åskådliggöras av klara figurer.

De till triangelkonstruktionerna i planet analoga konstruktionerna av tresidiga hörn i rummet — då tre element äro givna — genomföras med denna metod. Satserna om tresidiga hörn utmynna i de satser ur den sfäriska trigonometrien, som svara mot de trigonometriska triangelteoremen. — I kapitlet om konvexa polyedrar bevisas Cartesii-Eulers relation mellan antalet ytor, kanter och hörn i en polyeder. Ur denna relation härledes vilka regelbundna polyedrar som äro möjliga. Slutligen genomföres i detalj konstruktionen av en reguljär ikosaeder i rätvinklig projektion. Dessa kapitel stå i nära kontakt med gymnasiekursen i rymdgeometri.

En dryg tredjedel av boken ägnas åt andragradskurvorna. Här har liksom vid räta linjen de affina egenskaperna behandlats först i tre kapitel, ett för var och en av kurvtyperna ellips, hyperbel och parabel, varefter dessa kurvors metriska brännpunktsproblem samlats i ett kapitel. — Ellipsen definieras först som den rätvinkliga projektionen av en cirkel, och härur härledes ellipsens egenskaper i samband med konjugatdiametrar. Ellipsens ekvation skrives $\pm [l_1^2(x, y) + l_2^2(x, y) - k^2] = 0$ i ett koordinatsystem med allmän axelvinkel. — Hyperbeln däremot definieras som orten för det ena hörnet i en parallellogram, där det motstående hörnet är fixt och de genom detta gående parallellogramsidorna äro givna fixa linjer, och parallellogrammens yta är konstant. Vinkeln mellan de givna linjerna är godtycklig. Väljas dessa till koordinataxlar, blir hyperbelns ekvation $xy = a^2$ och vid allmänt val av koordinataxlar $l_1(x, y) \cdot l_2(x, y) = a^2$. — Parabeln slutligen definieras som orten för

en punkt P, så belägen i förhållande till två varandra skärande givna linjer, att förhållandet mellan kvadraten på avståndet från P till den ena linjen och avståndet från P till den andra linjen är konstant; avstånden mätas längs godtyckliga fixerade riktningar. Med de givna linjerna som koordinataxlar blir parabelns ekvation $y^2 : x =$ konstant och vid allmänt val av koordinataxlar $l_1^2(x, y) : l_2(x, y) =$ konst. Dessa relationer härledas omedelbart ur den ovan citerade satsen om förhållandet mellan avstånden från två punkter till en rät linje, mätta längs parallella riktningar. — Kurvornas ekvationer hänförda till ett par konjugerade diametrar (diameter och tangent) härledas enkelt ur de givna definitionerna, och kurvornas ekvationer hänförda till symmetriaxlarna framkomma som specialfall härav.

Geometriska konstruktioner taga intresset lika mycket i anspråk som den analytiska behandlingen, och de bägge metoderna få ofta samverka. På varje punkt av framställningen hålles motsvarigheten aktuell mellan ekvationens form och den geometriska egenskapen hos kurvan. Här förekommer ingen »analytisk geometri» med långrandiga räkningar, där man under kalkylens gång tappar kontakten med geometrien och först, när det analytiska maskineriet malt fram en slutprodukt, finner det överraskande geometriska resultatet. Som avslutning på denna teori behandlas syntetiskt plana snitt i rotationscylindrar och rotationskoner.

Det sista kapitlet innehåller en rad exempel på kurvor, den kubiska kurvan i normalform, algebraiska och transcendenta kurvor, kurvor givna i parameterform. Till den stora mängden övningsuppgifter ges svar i form av en bildcratlas över kurvorna.

Omsorgsfullhet i alla detaljer präglar boken. Något tryckfel utöver det som författaren själv angivit har jag ej observerat. Några inadvertenser har jag funnit, men de äro ej av större betydelse.

Ehuru författaren överallt behandlar teorier, som mångfaldiga gånger framställts i läroböcker, är hans grepp på uppgiften alltid okonventionellt. Vad man saknar är — såsom förut påpekats — en inledande översikt. I en lärobok av denna typ torde en systematisk framställning i viss mån kunna ersättas av en historisk. Att Appolonii kägelsnittsteori saknas anser jag vara en brist. Men boken har blivit diger nog ändå. Det billiga priset, 14 kr., för ett matematiskt arbete om 360 sidor och 200 figurer måste verka lockande. Varje läroverksbibliotek bör äga boken, helst i flera exemplar, både som handbok för lärare och till hemlån för elever.

Matematisk begåvning hos gossar och flickor.

Referat av **SIGURD ÅSTRAND.**

Finlands svenska läroverksförening är en beundransvärt livaktig förening. Trots krig och allehanda svårigheter utger den — genom lektor Einar Pontan i Helsingfors — sedan några år tillbaka den förträffliga tidskriften »Skola och hem». I år har läroverksföreningen på ett sätt, som kan bli betydelsefullt, vidgat tidskriftens program. Med andra häftet av denna årgång (1943) följer nämligen en bilaga, som är det första numret i en ny skriftserie med titeln: Skrifter utgivna i samband med Skola och hem. Denna bilaga har författats av Runar Meinander och har titeln »Matematisk begåvning hos gossar och flickor» samt undertiteln »En statistisk undersökning av skolvitsord» (Helsingfors 1943, 73 s.).[1]

En undersökning av den art som Meinander gjort arbetar med många svårigheter. Det är inte lätt att fixera, vad som menas med matematisk begåvning, och det är inte säkert, att den matematiska begåvningen kan mätas med skolbetygen som mått. Meinander diskuterar först, vad matematisk begåvning är för någonting, och citerar därvidlag med instämmande ett uttalande av Turmlirz: Matematisk begåvning är nästan alltid blott allmän intelligens, som användes i matematiken. Han citerar dock också en del andra psykologer, som framhållit, att ett väsentligt drag hos den matematiska begåvningen är förmågan att substituera, att tänka i symboler. Som grund för sina undersökningar måste Meinander dock lägga en praktiskt användbar definition på matematisk begåvning och den blir: Matematisk begåvning är förmågan att lösa matematiska uppgifter. Den på detta sätt definierade matematiska begåvningen kan naturligtvis med rätt stor säkerhet mätas med hjälp av matematikbetyget.

Betyg är emellertid ett mycket kinkigt material att arbeta med, framför allt då man skall jämföra med varandra betyg från olika lärare, från olika åldersstadier och från olika skolor. Meinander har skarp blick för alla de olika slag av svårigheter, som här torna upp sig. Han påpekar till exempel, att det är vanligt att

[1] Tidskriften »Skola och hem» utkommer med fyra häften per år och kostar i Sverige 5 kr. Prenumeration kan ske genom svensk bokhandel eller genom postverket. Meinanders skrift kan erhållas separat (20 mk) från Nylands tryckeri, Fabiansg. 9, Helsingfors.

lärarna i högsta klassen ändra sin betygsskala, så att betygen här icke egentligen kunna jämföras med de tidigare betygen. Han blir därför tvungen att i de flesta fall lämna denna klass utanför undersökningen.

Det har vidare visat sig, att matematikbetygen för flickor bli så olika i flickskolor och i samskolor, att de icke kunna tagas tillsammans, varför han måst begränsa sin undersökning till samskolor. Vidare kan fel uppstå genom att elevmaterialet i samskolan icke är slumpmässigt sammansatt; det kan ju förhålla sig så, att man där har ett negativt urval av gossar och ett positivt urval av flickor, och då är materialet inte så väl ägnat för jämförelser mellan gossar och flickor. Något dylikt var i viss utsträckning fallet i de privata samskolorna i Stockholm före 1928.

Meinander påpekar också den stora roll som kvarsittning och omflyttning kan spela. Särskilt betonar han den betydelse det kan ha, att det är vanligt, att, om det går dåligt för en flicka på gymnasiet, får hon helt enkelt sluta skolan — hon behöver inte nödvändigtvis bli student — men, om det går dåligt för en pojke, får han sitta kvar. Det på detta sätt uppkomna urvalet visar sig vara av betydelse för undersökningen.

Meinanders utförliga diskussion av alla dessa vanskligheter har ett rätt stort intresse för oss här i Sverige med vår eviga diskussion om betygsresultaten av den 4-åriga och av den 5-åriga realskolan. Svårigheterna att på ett statistiskt vederhäftigt sätt lösa vårt problem torde vara väsentligt större.

Det primärmaterial, som stått till Meinanders förfogande är inte så litet. I de tre samskolor, som undersökningen omfattar, ha under åren 1920—39 givits 16 602 vårterminsbetyg till 2 522 elever, och det är dessa som bearbetats. Två av skolorna äro belägna i Helsingfors, den ena är svensk, den andra finsk. Den tredje skolan är belägen i en svensktalande landsortsbygd. Av eleverna utgjorde 56 % flickor och 44 % gossar.

I Finland användes sifferbetyg och den finländska betygsskalan kan översättas i den vanliga svenska på följande sätt: 10 = A; 9 = a; 8 = AB; 7 = BA; 6 = B; 5 = B?; 4 = BC. Lägre betyg än 4 förekommer så ytterst sällan, att Meinander icke tagit med dem i sin statistik utan räknat eventuella lägre betyg som 4. Vidare ges i Finland två betyg i matematik, ett som avser aritmetik och algebra och som här i fortsättningen kommer att kallas algebrabetyget, och ett i geometri.

För att få en bakgrund till matematikbetygens variation har Meinander beräknat medelbetyget i kunskapsämnena för varje elev. Det visar sig nu, att kurvan över flickornas medelbetyg är

svagt fallande från lägsta klassen (7,26) till näst högsta klassen (6,79). Den är överallt högre belägen än kurvan över gossarnas medelbetyg. Denna senare är emellertid belägen på tämligen konstant höjd hela skolan igenom (omkring 6,7), varför skillnaden mellan flickornas och gossarnas medelbetyg oavbrutet avtar. Skillnaden är 0,49 betygsenheter i den lägsta klassen och avtar sedan till 0,08.

Algebrabetygen ligga till på ett annat sätt. Flickorna ha i lägsta klassen någon överlägsenhet: 0,20 betygsenheter. I mellanklasserna slingra sig flickornas och gossarnas kurvor om varandra, men i de högsta klasserna ligger gossarnas över och försprånget är i näst högsta klassen 0,54. Geometribetygen förhålla sig i stort sett som algebrabetygen, och skillnaderna mellan gossarnas och flickornas medelbetyg i matematik äro på högstadiet så stora att de statistiskt sett äro signifikativa.

Meinander summerar: Om man beaktar att flickornas medelvitsord i kunskapsämnen ... är högre än gossarnas, så står det klart, att vi här icke ha att göra med en relativ försämring av det kvinnliga elevmaterialet, utan att det är fråga om en reell och viktig olikhet i de båda könens intellektuella utveckling.

En undersökning av korrelationen mellan medelbetyget i kunskapsämnena å ena sidan och algebrabetyget å andra sidan visar, att i småklasserna är denna korrelation ungefär densamma för gossar och flickor, under det att på högstadiet korrelationen är mycket svagare för flickorna än för gossarna. Meinander sluter härav, att den matematiska begåvningen efter könsmognaden utvecklar sig på ett annat sätt hos flickorna än hos gossarna. Samma slutsats erhåller han av undersökningar av dispersionen hos såväl medelbetyget som algebrabetyget.

Några smärre specialundersökningar knytas till huvudundersökningen. Den första gäller förekomsten av betygen 8—10 hos de båda könen. Bland gossarna ha hela skolan igenom (högsta klassen undantagen) 16—20 % något av dessa betyg. Flickorna börja i lägsta klassen med 22 % och sluta i näst högsta med 6 %.

En annan specialundersökning tar sikte på antalet underbetyg. Procenttalet är för gossarna tämligen konstant och håller sig med ett undantag mellan 20 och 25 %. Flickornas underbetygsprocent är i småklasserna 15—19 % för att i näst högsta klassen springa upp till 35 %. Man får ett intryck av att underbetygsfrekvensen är rätt hög i Finland, ett intryck som förstärkes än mer, när Meinander meddelar att vid undersökning på 28 540 elever vid 35 lärdomsskolor i Helsingfors, som utförts av Falck, 57 % av eleverna visade sig ha något underbetyg.

En blick på antalet speciella matematiska begåvningar visar,

att dessa äro rätt sällsynta. Av dem som nå något av de tre högsta betygen i matematik kunna endast 15 % av gossarna och 10 % av flickorna betecknas som matematiska specialbegåvningar. En liknande bild ge underbetygen: endast en försvinnande del av dem som ha ett gott medelbetyg har underbetyg i matematik.

Vid den tredje specialundersökningen studerades betygsfördelningens symmetriförhållanden. Fördelningen av medelbetygen i kunskapsämnena ger en kurva som rätt väl överensstämmer med Gauss' fördelningslag. Algebrabetygen visa däremot en starkt asymmetrisk fördelning, varav författaren drar den slutsatsen, att fordringarna i matematik icke äro avpassade efter elevernas genomsnittliga utvecklingsståndpunkt.

Meinander har vidare undersökt, hur matematikbetygen ställa sig inom ett konstant elevbestånd. Han har då sökt ut dem ibland de 2 522 eleverna, som kunna följas hela skolan igenom. Det blir endast 183 (= 7 %), som nått studentexamen utan att sitta kvar någon gång, och 155 (= 6 %), som dubblerat någon klass. Undersökningen, som innehåller några intressanta enskildheter, bekräftar det förut erhållna resultatet i huvudfrågan.

Samma allmänna bild av den matematiska begåvningens utveckling hos gossar och flickor, som det föregående ger, får man av en undersökning av matematiska utvecklingstyper som Meinander försöker sig på. Han talar om tre typer: de med konstant matematikbetyg, de med fallande matematikbetyg och de med stigande matematikbetyg; 70 % av gossarna och 60 % av flickorna höra till den första typen. Dubbelt så många flickor som gossar ha fallande betyg och en fjärdedel så många ha stigande.

De resultat som Meinander kommer till överensstämma väl med dem som andra forskare erhållit samt med den vanliga åsikten hos de lärare, som undervisat både pojkar och flickor. Meinander redogör rätt ingående för litteraturen på området samt för de försök till förklaring av det konstaterade sakförhållandet som ha gjorts. Man har talat om de olika intressena hos pojkar och flickor, om deras olika arbetssätt och om deras olika erfarenheter under uppväxtåren. Kanske kan till orsakerna också föras det i annat sammanhang påpekade förhållandet, att en viss suggestion utgår från den allmänna uppfattningen, att matematik inte är något för kvinnor. Men är det verkligen nödvändigt att söka en bestämd förklaring till förhållandet? Är det inte i stället rent av troligt, att vi här stöta på en verklig, konstitutionell skillnad mellan könen?

Meinanders undersökning gör ett mycket gott intryck. Den är redig, försiktig och grundlig. Det slag av pedagogiska under-

sökningar, som denna avhandling representerar, ger det enda vederhäftiga underlag, som finns att få, för studiet av det viktigaste pedagogiskt-psykologiska problemet: hur passa våra kurser för det elevmaterial som skall inhämta dem?

Bokanmälningar.

Jakob Jensen og Einer Torsting, *Matematik for Begyndere.* Jul. Gjellerups Forlag, København 1942. 192 s.

Ovannämnda lärobok, avsedd för den danska »almindelige Maskinisteksamen», är av olika skäl i hög grad värd att läsas av svenska pedagoger. Därvid skall bokens speciella ändamål ej avskräcka; de behandlade kursmomenten äro nämligen på intet sätt fackbetonade. Att den är avsedd för vuxna elever har endast medfört en knappare framställningsform än vad eljest varit möjligt.

Framställningen av hela tal och bråk är kort sagt mönstergill, kortfattat men fullständigt och välgenomtänkt utförd på 32 sidor. Lärogången: addition och multiplikation av de naturliga talen — subtraktion — negativa tal — division — bråk (och i bråkläran multiplikation före addition) — denna lärogång synes mig idealisk. Bokstäver som beteckning för tal införas redan tidigt och på ett utmärkt naturligt sätt. Av övriga moment i avd. Aritmetik fäster man sig bl. a. vid ett par enkla nomogram i form av dubbelskalor samt vid författarnas införande av logaritmer och potenser.

Bokens andra avd., Geometri, verkar säkerligen överraskande på de flesta svenska läsare, då vi ju ej äro inställda på den s. k. »Virkelighedsgeometrien». Dennas metoder komma till användning här liksom i en tidigare lärobok av samma förf.,[1] och det måste medges att de verka stimulerande. Några vackra detaljer må antydas: satserna om vinkeln mellan tangent och korda, periferi- och medelpunktsvinklar; parallelltrapetsets yta (med parallellogrammens och triangelns som specialfall); Pythagoras' sats (bevisad endast med likformighetssatser).

Det är alltså en bok, som kan ge oss många värdefulla impulser för undervisningen.

Stig Comét.

[1] *Geometri for Mellemskolen,* anmäld i en uppsats av S. Åstrand i denna tidskr., årg. *23*, s. 13.

G. H. Hardy, *A Mathematician's Apology.* Cambridge University Press 1941. 93 sid., 3 s. 6 d.

Den berömde engelske talteoretikern har, sedan han passerat de 60 och »lämnat sin skapande tid bakom sig», skrivit en för lekmännen lättförståelig tillbakablick på sitt liv, som formar sig till ett svar på frågorna: »Varför är ett allvarligt studium av matematiken värdefullt? Vari ligger det egentliga berättigandet av en matematikers liv?» Med humor och självironi och utan varje spår av salvelse förklarar han, varför matematikens värde icke ligger i dess *nytta.* Han tar upp två satser, primtalens oändliga antal (Euklides' bevis) och irrationaliteten hos $\sqrt{2}$ (Pythagoras' bevis), och visar i en fin analys, vari satsernas »allvar» (allmängiltighet och djup) och »skönhet» (överraskning, kombinerad med oundviklighet och »tänkandets ekonomi») ligger. Han analyserar vidare skillnaden mellan »ren» och »använd» matematik. Intressant för en lärare är hans temperamentsfulla: »I hate 'teaching'; I love lecturing.»

Jag tror, att varje matematiker känner sig på något sätt yngre och rikare, sedan han läst denna lilla charmfulla bok. Och varför inte ge den som enskilt arbete i engelska åt en realgymnasist?

Einar Lunell.

Carl Fred. Holmboe, *Michael Faraday.* H. Aschehoug, Oslo 1943, 191 s.

En bok tryckt i Oslo 1943 medför redan när den kommer i ens hand något av vänskapsfull hälsning. En eventuell aning av nyfikenhet må stillas av konstaterandet, att det inte blir någon särskilt sensationellt av att den handlar om en engelsman. Vi gläds endast åt att objektivt studium och respektfull beundran av en den internationella vetenskapens störste även detta år kunnat dokumenteras i en norsk bok.

Det råder som bekant ingen brist på Faradaybiografier, och författaren strävar ej heller efter någon prioritetsrätt till skildringar och omdömen om denne märklige mans bana. Det är en livfull skildring av hans yttre öden och hans sätt att arbeta både med sin ungdoms översvallande uppslagsrikedom och i sina senare, av kamp mot svagheten präglade år. Den ingående skildringen av hans upptäckter och arbeten har blivit till en välskriven och för envar tillgänglig framställning av de elektriska fenomenen. Illustrationer och planscher förhöja dess värde. De hundra årens perspektiv har kunnat belysa vilka verkligt centrala problem han bearbetade — den sista fjärdedelen av boken berättar om »hvad

som senere hendte» — och man måste nästan i detalj låta övertyga sig om att vi ha en strängt systematisk forskares trägna arbete snarare än något slag av oförklarlig intuition att tacka för detta.

Det är idel för fysikern intressanta saker som berättas, några ej allmänt kända. Några ungdomsarbeten över legeringar av stål med metaller, som en Faradays minnestecknare strax efter hans död ansåg skilja sig från hans andra däri att de voro värdelösa, granskades omkring år 1930 av en bekant metallurg, som analyserade de på Royal Institution bevarade proven och fann, att man här hade en början till systematiska försök på området, outnyttjad endast därför att metallurgin var för outvecklad för att förstå Faradays framlagda idéer.

Holmboes skildring försummar ej att även låta oss känna människan Michael Faraday i sitt privat- och familjeliv, i sina tadelfria mellanhavanden med kolleger, i all sin vandel ledd av säkerligen på religiös grund fotad rättrådighet.

En för naturforskning intresserad svensk kan i varje fall ha ett nummer säkrat på den lista, varmed han skall gynna norsk bokmarknad.

Erik Ingelstam.

Endre Berner, *Lærebok i organisk kjemi.* Cammermeyers Boghandel, Oslo, 1942, 367 s., inb. kr. 28: —.

Utgivandet av en någorlunda omfattande lärobok i organisk kemi på skandinaviskt språk är redan i sig själv en händelse av stort intresse, men även bortsett härifrån har professor Berners arbete många förutsättningar att väcka uppmärksamhet i Sverige. Det råder f. n. en påtaglig brist på lämpliga läroböcker i organisk kemi motsvarande fordringarna för betyget »med beröm godkänd» i svensk ämbets- och kandidatexamen. De som finnas — svenska såväl som utländska — äro antingen för små eller för omfattande. Berners arbete intar här en mellanställning och kan numera läsas som kursbok i Uppsala.

En modern lärobok i organisk kemi måste tillgodose många skilda krav. Kunskapsstoffet sväller oavlåtligt i olika riktningar, ej minst genom det forcerade studiet av högmolekylära ämnen samt medicinskt och biologiskt viktiga substanser. Tekniskt eller ekonomiskt betydelsefulla ämnen och reaktioner kräva en någorlunda fyllig behandling. På det teoretiska området pågår en rask, delvis revolutionerande utveckling, där kvantmekaniska betraktelsesätt spela en stor roll, men resultaten ägna sig ännu ej för elementär framställning.

Professor Berner måste sägas ha löst sin uppgift på ett mycket

lyckligt sätt. I sin allmänna uppläggning följer boken traditionella linjer med huvudvikten lagd på systematiken och med bibehållande av den gamla tredelningen i alifatisk, karbocyklisk och heterocyklisk serie. Lämpligt avvägda teoretiska avsnitt ha inarbetats på lämpliga ställen i anslutning till systematiken. Man noterar med tacksamhet att stereokemin är väl tillgodosedd samt att författaren omnämner mesomeribegreppet och berör den moderna uppfattningen ifråga om benzolformeln och det »aromatiska tillståndet».

Naturligtvis kan man på speciella punkter ha skilda meningar om vad som bort medtagas. Många organiska ämnen spela numera en viktig roll i den oorganiska analysen (8-oxikinolin, o-fenantrolin m. fl.) men behandlas varken i organiska eller oorganiska läroböcker.

Sättningen av de kemiska formlerna och bokens typografiska utstyrsel i övrigt göra både författaren och förlaget all heder. Tryckfel och formella inadvertenser äro svåra att undvika i en första upplaga men synas anmärkningsvärt fåtaliga.

Då boken är den första i sitt slag på norska språket, har ortografien erbjudit vissa svårigheter. Huvudprincipen har varit att för vanligare kemiska namn och termer följa norska stavningsregler men i övrigt söka anslutning till internationellt skrivsätt. Azobenzol och xylol ha alltså sin välkända form medan ordet sinkhydroksyd vid första påseende kan väcka någon undran. För den, som är intresserad av rättstavningsproblem kan boken erbjuda åtskillig anledning till eftertanke.

Arne Fredga.

Rünar Meinander, *Meteorologins grunder.* Söderströms förlag, Helsingfors 1942, 66 s.

På många områden inom samhällslivet äro kunskaper i meteorologi både till nytta och nöje, ibland alldeles nödvändiga. Erfarenheter vunna under de senaste åren tyda på att meteorologiundervisningen i gymnasiet i regel är försummad i oroväckande grad. Orsakerna härtill kunna ju vara flera. Av stor vikt är därför att intresserade ha tillgång till litteratur avpassad för självstudier. Detta lilla häfte synes vara väl lämpat som en första orientering i ämnet och förtjänar att få stor spridning, ej minst bland gymnasiets elever.

Framställningen är så elementär som man rimligen kan begära men på samma gång klar och saklig och innehållet är väl avvägt. Man blir förvånad över att så mycket kan rymmas på så få sidor, men så har förf. genomgående lyckats undvika att ingå för mycket

på detaljer. Inga väsentliga felaktigheter ha kunnat upptäckas i texten, men figurerna, som uppgå till 40 st., kunde kanske i några fall varit bättre valda. Analysen av väderlekskartan i fig. 40 kan knappast vara riktig. Kapitelindelningen är i huvudsak enl. gammalt mönster: atmosfärens uppbyggnad och värmeomsättningen i lufthavet, lufttemperaturen, kondensationsföreteelser, moln och dimma, åska, lufttryck och vind, vädret och dess förändringar.

Den meteorologiska allmänbildningen i landet behöver höjas betydligt. Fysiklärarna landet runt skulle kunna hjälpa till att få upp den på en högre nivå genom att söka intressera sina elever för det som försiggår i lufthavet. Härvidlag bör detta lilla häfte vara till god hjälp.

H. Henrikson.

Stig Ekelöf, *Teknisk elektricitetslära,* del 1 (2. uppl.) och 2. Utg. av Tekniska Högskolans Studentkår, kompendier n:r 118 och 122, Stockholm 1942, 195 + 147 s.

Det synes mig motiverat att i denna tidskrift fästa uppmärksamheten även på svenska kompendier av allmännare intresse. Professor Ekelöfs här rubricerade föreläsningar under hans verksamhet som docent vid KTH tillhör denna kategori. Vi ta här hänsyn till innehållet i den mån som en fysiker utan alltför speciella önskemål kan tänkas ha nytta av framställningen.

Första delen omfattar, utom en kommenterad bibliografi, kapitlen om likström och de elektriska och magnetiska fälten; den andra behandlar växelströmmar samt Maxwells ekvationer med tillämpning på elektromagnetisk strålning.

Ett kompendiums knappa form brukar avskräcka, men här tillfredsställes i varje fall kräsenheten hos den systematiskt lagde av att framställningen är genomförd med så sträng urskillning. Det är ovanligt, att ett kompendium avfattas med sådan omsorg. Då därtill kommer, att innehållet är till form och i sak modernt, utgör det en förnämlig kunskapskälla.

Vektorräkning kommer genomgående till användning, och för mången är därför delar av formelspråket icke lättillgängligt. Dock anföres ofta parallellt med vektorekvationen den motsvarande, för det konkreta sinnet mera påtagliga integralformeln, som för övrigt den åt elementär pedagogik inriktade i många fall kan översätta till enklare lydelse.

Likströmsteorin, som måhända skulle ha vunnit på om sammanhangen mellan satserna tillåtits framträda tydligare, är utbyggd med några strömföringssatser, som i vanlig praxis väl kunna undvaras; värdefullt är, att strömningsfält behandlas. Teorin för de

stationära fälten är berikad med vissa klart och modernt skrivna avsnitt om fenomenens atomfysikaliska tydning, en belysning av elektrotekniken som man ofta efterlyser. Avsevärt utrymme ägnas åt tekniskt viktiga system.

Växelströmsteorin är så mönstergillt framställd, att var och en som bär på komplex om detta område som något »svårt» bör passa tillfället att här bli på angenämt sätt korrigerad. Typiska storleksordningar angivas, och reella kondensatorer och spolar behandlas tacknämligt nog i sitt sammanhang. Den symboliska metoden gör de flesta tillämpningar lättillgängliga. Här torde de flesta icke-specialintresserade vara benägna att stanna, före beräkningarna på kretsar med järn och på flerfassystem samt behandlingen av strålningen från en dipol.

Figurerna och stencilskriften är som vanligt från detta förlag av utmärkt kvalitet.

Erik Ingelstam.

Hans v. Hortenau, *Konsten att uppfinna.* Teknik för Allas handböcker Nr 3. Stockholm 1942. 64 s., kr. 2:25.

När recensenten fick det lilla häftet i handen till granskning, hade han den förutfattade meningen, att man icke kan lära bort »konsten att uppfinna». Den medfödda originaliteten och envisheten ansåg han vara allena utslagsgivande. Man tillskriver ju f. ö. Edison det bekanta uttalandet, att en uppfinning består till 1 % av inspiration och 99 % av transpiration. Men det är just det rationella disponerandet av de 99 procenten, som denna bok handlar om, och recensenten inser, att man därmed faktiskt *kan* lära sig att uppfinna. I boken givas många kloka praktiska råd hur en uppfinnare bör ägna tid åt litteraturgranskning och vilken litteratur, som skall granskas, hur han skall rådfråga erfarna och kunniga män, hur han skall ordna för sig med experiment, modeller, patentering, kapital och allt detta, som en uppfinning ofta går sönder på.

Under mångårigt arbete i ett industrilaboratorium har rec. haft många tillfällen att möta uppfinnare och följa deras framgångar och misslyckanden. I alla de fall, där uppslagen varit förnuftiga och en lyckosam utveckling skett, ha vederbörande — utan att känna v. Hortenaus bok — omedvetet följt hans råd. De som misslyckats skulle ha haft god nytta av boken, om den funnits tidigare. Nu finnes den!

J. Tandberg.

Gustaf de Laval, 1845—1913. De höga hastigheternas man. Minnesskrift utgiven av AB. de Lavals Ångturbin, utarbetad av Torsten Althin. Stockholm 1943, 352 s.

Tekniska Museets intendent har i en rikligt illustrerad kvartovolym med skicklig hand givit oss en monografi över den störste svenske uppfinnaren i modern tid, mannen, som slösade med idéer och inspirerade sin samtid till tekniska dåd, men som likväl ständigt var i behov av pengar — till nya experiment. Ehuru av en fransk släkt, som kan ledas tillbaka till medeltiden, kunde de Laval även leda en linje tillbaka till Olof Rudbeck. Man frestas tänka på flera likheter med denne store patriot och gigantiske mångfrestare, när man häpnar över den självtagna arbetsvolym som den senfödde ättlingen dignade under.

Biografien är ej blott en teknisk exposé över kemistens och mekanistens otaliga hugskott och bragder utan även en förstående skildring av människan, av mannen bakom verket, ärlig och rättskaffens i med- och motgång. Althin har haft tillgång till bl. a. 20 löpmeter dokument och arkivalier förutom en mängd tryckta skrifter, som beröra de Laval, och ur det väldiga materialet har han separerat fram gräddan.

Boken, som är rikt påkostad — med fem färgplanscher, 60 illustrationer i djuptryck och inbunden i blått klotband —, kostar 25 kr. och säljes endast från Tekniska Museet. Hela inkomsten tillfaller oavkortad museet.

J. Tandberg.

Drivmedelsförsörjningen under krisen. Kooperativa förbundets bokförlag 1943, 132 s., kr. 3:75.

Hösten 1942 anordnades av Kursverksamheten vid Stockholms Högskola en föreläsningsserie över drivmedelsförsörjningens tekniska problem i vårt land, hållen av åtta fackmän, och som nu utkommit i tryck, delvis kompletterad fram till mars 1943.

Efter en jämförelse mellan våra kommunikationer före och efter krigsutbrottet behandlas energihushållningen i freds- och kristid, elbilen, bensin och brännoljor, syntetisk bensin och ersättningsbränsle, gengas, kol, brännтorv och ved i industri och samfärdsel, smörjmedelproblemet samt gummits roll i vår drivmaterielförsörjning.

Framställningens klarhet och ämnets aktualitet gör boken läsvärd ej blott för bilister och yrkestekniker utan även för lärare i fysik och kemi samt för tekniskt intresserad ungdom.

E. Nordefeldt.

Gradualavhandlingar.[1]

Einar Lindholm, *Über die Verbreiterung und Verschiebung von Spektrallinien. Experimentelle und theoretische Beiträge.* Uppsala 1942, 94 s. Disputation vid Stockholms Högskola den 17 oktober 1942. Opponent: docent Lamek Hulthén; extra opponent: professor Erik Hulthén.

En spektrallinje är aldrig fullkomligt skarp. Om man iakttager linjen med tillräckligt hög dispersion, visar det sig, att den alltid har en ändlig bredd. Bredden beror på de betingelser, under vilka ljuset alstras. Om man har låg temperatur och mycket lågt tryck, blir bredden mycket liten. Om man har hög temperatur, breddas linjen genom Dopplereffekten. Om man slutligen har högt tryck (en eller flera atmosfärer), åstadkomma de gaskinetiska stötarna en breddning av linjen. Det är denna s. k. stötbreddning, som undersökes i avhandlingen.

Avhandlingens experimentella del omfattar mätning av bredderna i HCN:s och HCl:s bandspektrum. Detta utfördes så, att kontinuerligt ljus från en punktljuslampa fick passera genom en behållare med den gas, som skulle undersökas. Gastrycket var med HCN ca $^1/_2$ atm och med HCl 3,5 atm. Behållaren var 13 meter lång och ljuset fick gå igenom denna en eller flera gånger. Absorptionsspektret fotograferades med institutets stora konkavgitter. De band, som undersöktes, voro rotationssvängningsbanden vid ca 8 000 resp. 9 000 Å. De äro mycket svaga, varför absorptionssträckan måste vara lång. Linjebredden mättes med mikrofotometer. Bredden var ungefär 1 Å.

Den enklaste förklaringen till stötbreddningen gavs redan år 1906 av Lorentz. I enlighet med den klassiska atomteorien betraktade han den emitterande molekylen som en oscillator, som utsänder ljus oavbrutet. Men vid varje gaskinetisk stöt sker en omskakning av molekylen, som fullkomligt avbryter ljusutsändandet under den tid stöten varar. Efter stöten begynner ljusutsändandet på nytt. Ljusutsändandet sker alltså ostört blott under tiden mellan två stötar. Genom en bevisföring lik den, som ligger till grund för osäkerhetsrelationen, kan man visa, att den emitterade spektrallinjen får en bredd, som är omvänt proportionell mot tiden mellan tvenne stötar. Detta innebär, att bredden blir proportionell mot trycket, vilket överensstämmer med experimenten. Att förhållandena bli desamma vid absorptionslinjer är självklart.

År 1932 förbättrades teorien av Weisskopf och Lenz. De påpe-

[1] När ej annorlunda anges, är referatet av vederbörande förf:s egen hand.

kade nämligen, att molekylerna komma att påverka varandra, när de passera förbi varandra på litet avstånd, även om avståndet ej är så litet, att gaskinetisk stöt inträffar. De elektriska laddningarna i kärnor och elektroner åstadkomma nämligen en attraktion mellan molekylerna, som i allmänhet är omvänt proportionell mot sjunde potensen av avståndet mellan molekylerna (s. k. van der Waals-kraft). Under förbipassagen påverkas ljusutsändandet av attraktionen på samma sätt som av en gaskinetisk stöt, vilket innebär, att den tid, under vilken ljusutsändandet ostört pågår, blir kortare och alltså linjebredden blir större än i Lorentz' teori. Attraktionen åstadkommer dessutom, att linjen blir en smula förskjuten åt rött, vilket allt stämmer med experimenten.

Avhandlingens teoretiska del utgöres av ett försök att skapa en kvantmekanisk motsvarighet till Weisskopf-Lenz' klassiska teori. Förloppet, när molekylerna passera varandra på litet avstånd, behandlas härvid med kvantmekaniska metoder, som äro analoga till dem, som Faxén och Holtsmark använt vid behandlingen av stötförloppet mellan en atom och en elektron. Teorien prövas på av andra författare utförda experiment.

Slutligen innehåller avhandlingen en beräkning av de mätta bredderna i HCN:s och HCl:s spektrum. Attraktionen mellan tvenne cyanvätemolekyler (eller tvenne klorvätemolekyler) beror huvudsakligen på att cyanvätemolekylen är en stark elektrisk dipol. Vid beräkningen av attraktionen måste man ta hänsyn till att molekylerna rotera. Till slut jämföras de mätta och de beräknade bredderna, varvid rätt god överensstämmelse erhålles.

Ido Leden, *Potentiometrisk undersökning av några kadmiumsalters komplexitet,* Lund 1943, 120 s. Disp. i Lund $^{21}/_{5}$ 1943. Opponenter: docent Birger Adell och fil. lic. Harald Olerup.

När en positiv jon, centralatomen, bildar ett komplex med negativa joner eller neutrala molekyler, ligander, sker detta enligt Werner så, att centralatomen binder ett bestämt antal (= koordinationstalet) ligander. Emellertid uppbygges i alla hittills fullständigt undersökta fall, vilka dock äro rätt få, det så erhållna gränskomplexet successivt. Kadmiumjonens koordinationstal antages i allmänhet vara fyra, och dess komplex med exempelvis cyanjoner skrives därför $[Cd(CN)_4]^{2-}$. Förutom detta gränskomplex kan man emellertid även påvisa komplexen $[CdCN]^+$, $[Cd(CN)_2]$ och $[Cd(CN)_3]^-$, där det okända antalet vattenmolekyler i komplexen utelämnats ur formlerna. Om Werners föreställningar äro riktiga, bör varje komplex innehålla så många vattenmolekyler i »den inre sfären», att koordinationstalet överallt blir fyra eller möjligen sex.

Av ovan givna formel för kadmiumcyanidkomplexen framgår också, att det ej finnes någon anledning att skilja på ofullständig dissociation och komplexbildning.

Komplexen i ett system kunna beräknas, om man känner kadmiumjonkoncentrationerna i en serie lösningar med stigande ligandhalt. Kadmiumjonkoncentrationer kunna enkelt mätas potentiometriskt, lämpligen med användning av en kadmiumamalgamelektrod. Beräkningar och återgivande av försöksresultat bli mycket enkla, om man konsekvent väljer koncentrationen av »fri ligand», i ovan angivna exempel alltså cyanjonkoncentrationen, till oberoende variabel. Jämför den genomgående användningen av pH som oberoende variabel i syra-bas system! Olika räknemetoder måste emellertid väljas för svaga och starka komplex.

I den refererade avhandlingen har kadmiumjonens komplexbildning med några vanliga, huvudsakligen oorganiska ligander undersökts, såsom halogen-, nitrat-, nitrit-, acetat-, sulfatjoner och ammoniak. De bildade komplexens beständighetskonstanter ha beräknats, och deras koncentrationer ha uträknats som funktion av lösningarnas ligandkoncentrationer.

Föreläsningar för lärarkandidaterna vid provårsläroverken under läsåret 1942—1943.[1]

Göteborg: lektor S. Friberg, 1. Den grundläggande undervisningen i ellära på gymnasiet. 2. Demonstrationsförsök (huvudsakligen geometrisk optik); adjunkt J. Lundberg, 1. Gammalt, som kan utgå, och nytt, som bör införas i gymnasiets kemikurs. 2. Några av den kemiska institutionens viktigaste inventarier och deras användning i undervisningen; lektor R. Nyhlén, Geometriens aritmetisering.

Lund: lektor A. Leide, 1. »Laborationerna i fysik». 2. Behandlingen av elektriska och magnetiska fält; adjunkt O. Palmgren, Äggvitekemien på realgymnasiet; lektor B. Svensson, 1. Problemlösningens metodik. 2. Funktionsläran på gymnasiet.

Stockholm: lektor E. Nordefeldt, Det enskilda arbetet inom den naturvetenskapliga ämnesgruppen; lektor A. Wahlgren, Empiriskt införande av logaritmer; adjunkt B. Wahlström, Några nyare demonstrations- och laborationsförsök: 1. Statik och dynamik. 2. Vågrörelselära och optik; lektor T. Wetterblad, Fysiklaborationer och fysikräkning; lektor G. Starck, Demonstration av nya kemiska försök.

Uppsala: adjunkt P. Granath, 1. Fysikundervisningen, särskilt i realskolan. 2. Läroverkets fysiska institution för realskolan; lektor B. Hedenstedt, Läroverkets fysiska institution för gymnasiet; adjunkt J. Palmgren, Massverkningslag, fördelningssats och lösningsprodukt.

[1] Uppgifterna ha lämnats av Skolöverstyrelsens statistiska byrå, som även meddelat, att inga avhandlingar med matematiskt-naturvetenskapligt innehåll förekomma i läroverkens årsredogörelser 1942—1943.

Tidskrifter.

Svensk kemisk tidskrift, 1943: 5—7.

Ur innehållet: C. Brosset and J. Orring, Studies on the Consecutive Formation of Aluminium-fluoride Complexes; Gunhild Aulin-Erdtman, Einige Modellversuche zur Chemie des Lignins; R. Dahlbom och T. Ekstrand, Några bensol- och toluolsulfonsyrederivat av heterocykliska aminer; S. Wideqvist, Eine neue Synthese von Hydratropanitril; G. Holst und H. Malmgren, Über die Reaktion zwischen Natriumsuperoxyd und Kohlendioxyd; L. Enebo, Om termofil cellulosajäsning; Anna-Greta Hybinette, Bestämningar av låga halter strontium i några svenska pegmatitmineral; S. Säverborn and K. E. Danielsson, On a Globulin Occurring in the Horse-Chestnut; N. Hellström, Om föroreningar i sulfitsprit; E. Larsson, Darstellung von β-Merkaptoisobuttersäure; C. Brosset, The Heterogeneous Complexity Function; H. Sihtola, Eine Untersuchung über die Hydrolysengeschwindigkeit der Zellulose; K. Myrbäck und Walborg Thorsell, Zur Mechanismus der Stärkedextrinierung.

Ljuskultur, 1943: 1—2.

Ur innehållet: Färg och belysning; Några synpunkter på blandljusanläggningar; Belysningsteknisk rationalisering; Mineralens luminiscensfenomen i ultraviolett; Den fysikaliska bakgrunden till den moderna tekniska ljusalstringen; Lampugnar; Den elektriska rumsbelysningens problem; Glödlampor och u-lampor, egenskaper och egenheter.

Populär radio, 1943: 2—7.

Ur innehållet: Ultrahögfrekvensmaterial; Nätlikriktaren; Geiger-Müllerröret; Den nordiska radiopressen; Rundradio och kortvåg; Räknemetoder vid växelströmskretsar; Kortvågsmottagning; Signalgenerator och indukator; Akustiska problem vid modern radiotransmission; Decimalklassifikationen, ett rationellt system för klassificering av teknisk och vetenskaplig litteratur; Motkopplade förstärkare; Katodkondensatorn.

Teknik för alla, 1943: 24—35.

Ur innehållet: Tekniken i medicinen; Torpeder; Den första lysgasen; Första motorcykeln; Påvens eget observatorium; Märkliga ånglokomotiv; Tuberkulos opereras till hälsa; Bliv segelflygare; Krig i stratosfären; Vad man inte ser på bio; Nautofonen, världens kraftigaste elektriska ljudinstrument; Sveriges första bilfabrik; Ställbara propellrar; Ållebergstävlingarna; Trådlös elkraft; Köld ur patroner; Catgut, kirurgernas sytråd; Världens störste skeppsbyggare; Nikolaus Kopernikus; Från Stephensons »Locomotion» till »The Flying Scotchman»; Termoelektricitet; Ballongspärren; Bättre grammofonskivor; Gamla järnbruk; Radiospaning. Under rubriken »Händigt folk»: Hur man tillverkar en Reiszmikrofon; Nu bygga vi ett spegelteleskop; Hur man gör ett torrbatteri; Trådlös telefon; Hur en spegel tillverkas; Elmotor, byggd på 15 minuter.

Matematisk Tidsskrift, København 1942, A: 4, B: 3—4.

Ur innehållet i A: H. Bohr, A. S. Bang; I. Jepsen og I. L. W. Iessen, Lektor O. A. Smith; V. A. C. Jensen, To Bagateller; Litteraturanmeldelser; Danske Eksamenopgaver. Ur innehållet i B: B. Jessen, Abstrakt Maal- og Integralteori; E. Følner, Nulpunktsmængder for næstenperiodiske Funktioner.

(Forts. s. 186)

Problemavdelning.[1]

Matematiska uppgifter.

1288) *Vad är villkoret för att de nio punkter, som givit niopunktscirkeln dess namn, ligga på en regelbunden månghörning?* *N. J.*

1289) *Tio av kanterna i en allmän hexaeder äro a. Vilka värden skola de två återstående kanterna ha, för att a) ytan b) volymen skall bli så stor som möjligt?* *N. J.*

1290) *Konstruera den största ellips, som kan inskrivas i ett symmetriskt segment av ett kägelsnitt. Ellipsen och segmentet ha gemensam symmetriaxel.* *X.*

Enklare matematiska uppgifter.[2]

1291) Lös ekvationssystemet

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1 \\ x^2 + 2xy - y^2 &= x\sqrt{2} \end{aligned}\right\}.$$

Svar: $\dfrac{x \mid \cos 15^\circ \mid \cos 45^\circ \mid \cos 135^\circ \mid \cos 255^\circ}{y \mid \sin 15^\circ \mid \sin 45^\circ \mid \sin 135^\circ \mid \sin 255^\circ}$.

1292) Lös ekvationen $(1 + \operatorname{tg} x)^2 + (1 + \cot x)^2 = 24$.

Svar: $\left.\begin{matrix} 15^\circ \\ 75^\circ \end{matrix}\right\} + n \cdot 180^\circ;\quad \left.\begin{matrix} -\ 9^\circ,73 \\ -\ 80^\circ,27 \end{matrix}\right\} + n \cdot 180^\circ.$

1293) För en triangel ABC gäller, att $a^2 + b^2 + c^2 = 8R^2$. Visa, att en vinkel är rät.

1294) Visa, att punkterna $(\cos\alpha \cos\beta \cos(\alpha+\beta)$; $\cos\alpha \cos\beta \sin(\alpha+\beta))$, $(\cos\beta \cos\gamma \cos(\beta+\gamma)$; $\cos\beta \cos\gamma \sin(\beta+\gamma))$, $(\cos\alpha \cos\gamma \cos(\alpha+\gamma)$; $\cos\alpha \cos\gamma \sin(\alpha+\gamma))$ ligga i rät linje.

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. Bågman, till vilken uppgifter och lösningar kunna insändas under adress: Högre allm. läroverket å Östermalm, Stockholm.

[2] Uppg. 1290, 1292—1298 äro insända av *X.*, uppg. 1291, 1299 av *S. B.*, 1300 av *G. Thorén.*

1295) I en cirkel med radien R inskrives en oliksidig triangel ABC, i vilken $2a = b + c$. Den inskrivna cirkelns medelpunkt är I, den omskrivna cirkelns medelpunkt är O. Beräkna radien i cirkeln AIO.

Svar: $\frac{R}{2}$.

1296) Genom en punkt P på kantlinjen AB i tetraedern $ABCD$ läggas plan parallella med sidoytorna ACD och BCD. Dessa plan avgränsa jämte tetraederns sidoytor en kropp, vars volym genom lämpligt val av P skall göras så stor som möjligt. Hur skall P väljas?

Svar: På mittpunkten av AB.

1297) I en regelbunden n-sidig pyramid ha de in- och omskrivna kloten samma medelpunkt. Beräkna sidovinkeln i topphörnet.

Svar: $\frac{180^\circ}{n}$.

1298) I en sexsidig pyramid med toppen O är basytan en regelbunden sexhörning $ABCDEF$. I vilket förhållande delas pyramidens volym av det plan genom kanten AB, som halverar kanterna OD och OE?

Svar: 13 : 23.

1299) Kurvan $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x}{\sqrt{a}}$ går genom origo O och en punkt A på positiva x-axeln. Tangenter och normaler i O och A bilda en rektangel. Beräkna siffervärdet på a samt rektangelytan.

Svar: $a = 2$; en ytenhet.

1300) Kurvan $y = ax^2 + bx - 4$ skär x-axeln i A och B. Tangenterna till kurvan i A och B bilda med x-axeln en likbent och rätvinklig triangel, vars yta är en ytenhet. Angiv siffervärdena på a och b.

Svar: $a = -\frac{1}{2}$; $b = \pm 3$.

1301) Att konstruera en kvadrat, då avstånden från en fix punkt till tre av kvadratens hörn äro givna.

Lösn. till uppg. 1261—1263.

1261) *I en tresidig pyramid äro sidokanterna l cm, baskanterna a, b och c cm. I topphörnet är kantvinklarnas summa 360°. Visa, att $a^2 + b^2 + c^2 = 8l^2$.* *X.*

Tetraedern är $O(ABC)$ med $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Utdrages AO över O stycket $OE = AO = l$, blir $CE = \sqrt{4l^2 - b^2}$ och $BE = \sqrt{4l^2 - c^2}$. Kan det visas, att $\sphericalangle BEC = 90°$, fås $(4l^2 - b^2) + (4l^2 - c^2) = a^2$ eller $a^2 + b^2 + c^2 = 8l^2$. Om kantvinklarna utefter AO, BO och CO betecknas med resp. α, β och γ, bli kantvinklarna i pyramiden $O(BCE)$ α, $\pi - \beta$ och $\pi - \gamma$. Enligt lydelsen är $\alpha = (\pi - \beta) + (\pi - \gamma)$. Tages O som centrum för en sfär med radien l, utskära sidoplanen i pyramiden $O(BCE)$ storcirkelbågar. I den uppkomna sfäriska triangeln är en vinkel = summan av de övriga, varför denna uppdelas i två likbenta trianglar genom cirkelbågen EM, som råkar bågen BC i dess mittpunkt. I parallellcirkeln BCE blir BC diameter och $\sphericalangle BEC = 90°$. *X.*

Även löst av *N. J.* och *E. Smn.*

1262) *Visa, att enveloppen för de kordor i en konisk sektion, som halveras av en rät linje, är en parabel.* *N. J.*

Den givna räta linjen tages till y-axel. Kägelsnittets ekvation är $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ och ekvationen för en rörlig korda $y = kx + l$. Elimination av y ger en ekvation av andra graden, i vilken rötternas summa = 0. Härav fås $bl + 2ckl + d + ek = 0$. Elimination av l ger $f(x, y, k) = (bx - 2cy - e)k + 2ck^2x - d - by = 0$. Enveloppen erhålles, om k elimineras ur systemet $f(x, y, k) = 0, \frac{\partial f}{\partial k} = 0$ och blir $(bx - 2cy - e)^2 + 8cdx + 8bcxy$ eller $b^2x^2 + 4bcxy + 4c^2y^2 + (8cd - 2be)x + 4cey + e^2 = 0$, som representerar en parabel, såvida den givna linjen ej är en diameter eller parallell med en asymptot. I dessa fall är enveloppen ett punktpar (en punkt i ∞), som man lätt finner direkt. Se uppg. 211, årg. *10.* Löst av *S. B.* och *E. Smn.*

Eftersom kordorna i en cirkel halveras av normalerna mot dem från centrum och en parabels fotpunktskurva med avseende på brännpunkten är vertextangenten, är enveloppen en parabel, om kägelsnittet är en cirkel. Genom s. k. affintransformation visas härur, att detta även gäller, om kägelsnittet är en ellips eller hyperbel, och sedan visas detsamma genom limesövergång för en parabel. *N. J.*

1263) *Visa, att tangeringspunkterna för de gemensamma tangenterna till två cirklar ligga på en hyperbel.* *N. J.*

Mittpunktsnormalerna till de gemensamma tangenterna råka centrallinjen mitt emellan cirklarnas centra (punkten F). Tangenterna beröra därför en parabel med fokus i F och radikalaxeln som topptangent.

Om en rörlig korda i ett givet kägelsnitt halveras av en fast linje l, så envelopperar kordan en parabel. Är l vinkelrät mot en symmetriaxel, ligger parabelns fokus på denna och l är topptangent. Detta följer ur uppg. 1262. De åtta kontaktpunkterna, som förutsättas vara reella och distinkta, utgöra fyra med avseende på centrallinjen symmetriska par. Genom tre av dessa kan läggas ett kägelsnitt K, som har sin ena axel på centrallinjen. Enveloppen för de kordor i K, som halveras av radikalaxeln, sammanfalla med den förstnämnda parabeln. Härav följer, att alla 8 punkterna ligga på K. Att K icke kan vara en ellips eller parabel framgår av en figur (icke-konvext punktsystem).

Däremot kan K sönderfalla i två (vinkelräta) linjer, om nämligen en inre gemensam tangent är vinkelrät mot en yttre. Se uppg. 289 a, årg. *12*. *X.*

Forts. fr. s. 182.

Fysisk Tidsskrift, København 1943: 3.

Ur innehållet: J. Rybner, Professor P. O. Pedersens rumakustiske Arbejder og Lydteknisk Laboratorium; P. S. Wedell, Felt og Materie; Boganmeldelser; Register till 31.—40. Aargang.

Naturens Verden, København 1943: 4—5.

Ur innehållet: R. Collander, Växtcellernas permeabilitet och ämnesutbyte; H. Ødum, Nogle fossile danske Brændstoffer og deres Fremskaffelse; G. Hevesy, Anvendelse af mærkede Atomer i Biologien; H. C. A. Lassen, Sulfonamidernes kliniske anvendelse.

Norsk Matematisk Tidsskrift, Oslo 1943: 2.

Ur innehållet: J. O. Stubban, Noen egenskaper ved diametrene til visse isotrope algebraiske kurver; E. S. Selmer, To rekker for summen $\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \ln p$; H. Bjerkeseth, Pierre Fermat's løsning av en ubestemt kvadratisk likning; Eksamensoppgaver; Oppgaver for gymnasieelever; Løste oppgaver.

Fra Fysikkens Verden, Oslo 1942—1943: 4.

Ur innehållet: E. A. Hylleraas, Nobelpristagere i fysikk: H. A. Lorentz, P. Zeemann; B. Edlén, Tydningen av de ljusa linjerna i solkoronans spektrum; J. Waseftyński, De ytre sollags hydrodynamikk; H. v. Ubisch, Elektriske reduktorer; W. Johannessen, Metode til å studere luftbevegelsen i de jordnære skikt; R. Krekling, En enkel tidsmåler; R. Brahde, Wolf-Rayet stjernene.

Naturen, Bergen 1943: 5—6.

Ur innehållet: C. L. Godske, Utviklingen av den moderne værvarsling; Chr. Oftedahl, Overskyvninger i den norske fjellkjedje; R. Nordhagen, Professor Axel Blytt; K. Langlo Olsen, Oson og vær.

Fyllnadsprövning efter studentexamen.

Augusti—september 1943.

Matematiska uppgifter för latinlinjen.

1. Lös ekvationen

$$\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+1{,}5} = \frac{1}{4x^2-9}.$$

2. I en likbent triangel med ytan 4 m² är summan av basen och höjden lika med summan av de båda lika stora sidorna. Beräkna höjden och sidorna.
3. För att bestämma avståndet mellan ett strandat fartyg A och ett skär B, som låg mellan fartyget och stranden, uppmätte man på stranden från en punkt C, som låg i rät linje med A och B, en baslinje $CD = 250$ m. Vidare mättes vinklarna $BCD = 84°$, $BDC = 83°$ och $ADC = 86°$. Beräkna avståndet AB.
4. I en regelbunden niohörning $ABCDE \ldots$ med sidan 5 cm dragas diagonalerna AD och AE. Beräkna ytan av triangeln ADE.
5. En skuld på 10 000 kronor skall amorteras under 20 år på så sätt, att vid slutet av vart och ett av de 10 första åren betalas 600 kronor och vid slutet av vart och ett av de återstående åren en viss summa. Hur stor blir denna, om räntefoten är 4 %?
6. I en rätvinklig triangel är den omskrivna cirkelns radie 13 cm och den inskrivnas 4 cm. Beräkna triangelns sidor.
7. I triangeln ABC är sidan $AB = 10$ cm, $BC = 21$ cm och $AC = 17$ cm. En cirkel går genom A och tangerar sidan BC i punkten B. Bestäm ytan av den del av cirkeln, som ligger inom triangeln.
8. Från en hamn A avgår en ångbåt med en hastighet av 2 mil i timmen i en riktning, som från norr avviker 30° mot öster. Tre timmar senare avgår från en annan hamn B, som ligger 16 mil rakt öster om A, en motorbåt med en hastighet av 7 mil i timmen. Vilken kurs bör motorbåten hålla för att sammanträffa med ångbåten?

Resultat: 1. $x_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{449}}{8}$. 2. Höjden $= \frac{4\sqrt{3}}{3} = 2{,}309$ m; basen $= 2\sqrt{3} = 3{,}464$ m och de lika sidorna $= \frac{5\sqrt{3}}{3} = 2{,}887$ m. 3. 333 m. 4. 31,16 cm². 5. 937 kr. 6. 10 cm, 24 cm och 26 cm. 7. 17,47 cm². 8. $N\,51°{,}8\,V$.

Matematiska uppgifter för realgymnasiet.

Allmän kurs.

1. I två likbenta trianglar äro benen lika stora och förhållandet mellan baserna 3 : 8. Vinkeln vid spetsen är i den ena triangeln tre gånger så stor som i den andra. Beräkna trianglarnas vinklar.
2. Ekvationerna för sidorna i en triangel AOB äro $2y = x$, $y = 2x$ och $x + 4y - 3 = 0$. Triangeln vrides 90° kring origo O, så att den kommer att intaga läget A_1OB_1 i andra kvadranten. Sidorna AB och A_1B_1 skära varandra i punkten C. Angiv ekvationen för linjen OC.
3. Bestäm z ur ekvationssystemet

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = a, \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = b^2, \\ \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} = z. \end{cases}$$

4. Lös ekvationen $2 \sin 3x - 3 \cos 3x = 1$.
5. Första termen i en oändlig geometrisk serie är positiv. Mellan vilka värden skall kvoten ligga, för att summan av de 20 första termerna skall understiga seriens summa med mindre än 0,1 % av denna? Gränsernas värden skola angivas approximativt med tre riktiga decimaler.
6. Upprita kurvan $y = x^3 - 3x^2 + 3x$. P och Q äro två punkter på kurvan, så belägna att tangenterna till densamma i dessa punkter äro parallella. De nämnda tangenterna skära x-axeln i punkterna A och B. Visa, att sträckan AB är $\frac{2}{3}$ av sträckan PQ:s projektion på x-axeln, var än P är belägen.
7. Bevisa riktigheten av formeln

$$\frac{1}{\cos v} + \frac{\sin^2 v}{\cos 2v \cos v} + \frac{\sin^2 v}{\cos 3v \cos 2v} + \ldots + \frac{\sin^2 v}{\cos (n+1)v \cos nv} = \frac{\cos nv}{\cos (n+1)v}.$$

8. Två givna räta cirkulära koner ha gemensam bottenyta och äro vända åt motsatta håll. Toppvinkeln i den ena är 2α, toppvinkeln i den andra är supplementvinkel till denna. Båda konerna stympas genom var sitt plan, parallellt med bottenytan. Avståndet mellan planen är lika stort som bottenytans radie. I vilket förhållande delas detta avstånd av bottenytan, då summan av de stympade konernas mantelytor är så stor som möjligt?

Resultat: **1.** Toppvinklarna $33°{,}56$ och $100°{,}68$; basvinklarna $73°{,}22$ och $39°{,}66$. **2.** $5x + 3y = 0$. **3.** $z = \frac{a}{2}(3b^2 - a^2)$. **4.** $24°{,}13 + n \cdot 120°$ och $73°{,}40 + n \cdot 120°$. **5.** $-0{,}708 < k < 0{,}708$. **6.** Parallellförflytta koordinataxlarna till kurvans medelpunkt $(1; 1)$. **8.** $\cot \alpha$.

Matematiska uppgifter för realgymnasiet.

Specialkurs.

1. Visa, att en liksidig triangel kan omskrivas kring cirkeln $x^2 + y^2 + 4x\sqrt{3} - 8y + 21 = 0$, så att ett hörn faller i origo. Angiv även ekvationerna för triangelns sidor.
2. För vilka värden på x, uttryckta i radianer, är $4\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$, om $y = \cos^3\frac{x}{2}$?
3. Bågen i ett cirkelsegment är dubbelt så stor som segmentets korda. Bestäm medelst grafisk metod kordans medelpunktsvinkel på $0°{,}5$ när.
4. Bestäm konstanterna a och b i funktionen $y = \frac{x^3 + ax^2}{x^2 + b}$, så att linjen $y = x + 1$ blir asymptot till motsvarande kurva och funktionen får ett maximum för $x = -\frac{1}{2}$. Upprita kurvan i stora drag.
5. Asymptoterna till en hyperbel, vars högra gren ständigt tangerar y-axeln, äro parallella med linjerna $y^2 = 3x^2$. Hyperbelns ena brännpunkt beskriver högra hälften av cirkeln $x^2 + y^2 = a^2$. Sök och konstruera orten för den andra brännpunkten.
6. En parabels ekvation är $y^2 = 4ax$. Normalen i en punkt P på kurvan skär denna även i en punkt Q. Beräkna det minsta värde, som sträckan PQ kan antaga.
7. På en kub ställes en annan kub, så att den senares undre basyta icke skjuter utanför den förras övre basyta. Totala ytan av den sålunda erhållna sammansatta kroppen är $4a^2$, där a är

en konstant. Undersök, hur den sammansatta kroppens volym varierar, då kubernas kantlinjer variera.

Resultat: **1.** $3x\sqrt{3}+y=0$; $x\sqrt{3}+5y=0$; $x\sqrt{3}-2y+21=0$. **2.** $\pi+n\cdot 2\pi$; $\pm\frac{\pi}{3}+n\cdot 2\pi$. **3.** 143°. **4.** $a=1$; $b=\frac{1}{4}$. **5.** Orten är vänstra hälften av ellipsen $x^2+9y^2=9a^2$. **6.** PQ:s minsta värde är $=6a\sqrt{3}$. Om normalens vinkelkoeff. är k $(=\operatorname{tg} v)$, är ordinatan för PQ:s mittpunkt $(M)=\frac{2a}{k}$. Härur och av subnormalens värde $(=2a)$ erhålles $PM=\pm\left(\frac{2a}{k\sin v}+\frac{2a}{\cos v}\right)$, d. v. s. $PQ=\pm\frac{4a}{\sin^2 v\cdot\cos v}$ eller (uttryckt i k) $=4a\frac{\sqrt{(1+k^2)^3}}{k^2}$. **7.** Volymen avtar från $\frac{8a^3}{\sqrt{250}}$ (kubernas kanter lika) till min. $=\frac{8a^3}{\sqrt{280}}$ (förh. mellan kanterna 3 : 2) för att sedan växa till $\frac{8a^3}{\sqrt{216}}$ (den övres kant $=0$).

Uppgifter i fysik.

Obs. Lösningarna till uppgifterna 1 och 4—8 böra åtföljas av enkla figurer. — Erforderliga konstanter, vilka ej äro uppgivna i problemens text, hämtas ur formelsamlingen.

1. En låda har formen av en rätvinklig parallellepiped med kantlängderna 6 dm, 8 dm och 12 dm. Den väger 110 kg och är packad så, att tyngdpunkten, som ligger mitt i lådan, ej förskjutes. Lådan ligger på ett vågrätt golv. En person förflyttar den 28 m genom att gång på gång välta över den kring en av 12 dm-kanterna. Lådan får därvid rulla över av sig själv, varje gång dess tyngdpunkt kommit förbi högsta läget. Golvet är så beskaffat, att lådan ej glider, då den vältras. Hur stort mekaniskt arbete åtgår för förflyttningen?
2. En sfärisk metallkula släppes och faller utan begynnelsehastighet ned mot ett horisontellt underlag. Den träffar underlaget, sedan den fallit en viss tid, studsar upp ett stycke efter stöten, faller ånyo, studsar än en gång o. s. v. Vid varje stöt mot underlaget förlorar kulan 15 % av den rörelseenergi, den har omedelbart före stöten. En viss tid efter det kulan släpptes, befinner den sig slutligen åter i vila. Sök förhållandet mellan denna tid och den tid, som skulle ha åtgått, om kulan efter den första fallrörelsen blivit liggande på underlaget utan att studsa. Den tid, själva stötarna taga, kan lämnas ur räkningen, likaså luftens motstånd.

3. Vissa radioaktiva ämnen utsända α-partiklar, som utgöras av elektriskt laddade heliumatomer (kärnor). Genom experimentella undersökningar har man funnit, att 1 g radium (jämte dess α-strålande sönderfallsprodukter) per sekund utsänder $14{,}9 \cdot 10^{10}$ sådana partiklar. Genom andra experiment har man funnit, att nämnda kvantitet radium med sönderfallsprodukter per år utvecklar 164 mm³ heliumgas av 0° och 760 mm kvicksilvertryck. Beräkna antalet atomer i 1 g helium. Heliumgasens täthet är vid nämnda tryck och temperatur 0,000179 g/cm³. Ett år kan sättas lika med 365 dygn.
4. Två glasskalor *A* och *B* samt en i en rörformig fattning insatt tunn samlingslins uppställdes på en optisk bänk, och fattningen försköts mellan skalorna, tills man erhöll en skarp bild av skalan *A* på skalan *B*. Avståndet mellan skalorna var 500 mm, och avståndet mellan skalan *A* och ena randen R_1 av fattningen befanns vara 250 mm. Röret med linsen vreds helt om, och mätningarna upprepades vid oförändrat avstånd mellan skalorna. Man erhöll därvid en lika stor bild som i förra fallet, då avståndet mellan skalan *A* och samma rand R_1 av fattningen utgjorde 350 mm. Beräkna linsens brännvidd.
5. Objektivet till en enkel kikare är vattentätt insatt i tuben och består av en tunn, symmetrisk enkellins av en glassort, vars brytningsindex är 1,515. Objektivets brännvidd är 20,0 cm. Kikaren är i vanliga fall inställd för användning mot avlägsna föremål i luft. Vid ett tillfälle önskar man emellertid betrakta ett föremål, som befinner sig i vatten, varför man doppar ned kikarens objektivdel under vattenytan. Därvid förblir kikarens inre luftfyllt, och okularet befinner sig ovanför vattenytan. Hur mycket bör okularet förskjutas i förhållande till objektivet? Föremålets avstånd kan anses vara stort i förhållande till kikarens längd. Observatörens öga är i båda fallen inställt på samma sätt. Brytningsindex för vatten är 1,333.
6. Elektromotoriska kraften hos ett termoelement är 0,000037 V vid en grads temperaturskillnad mellan lödställena och kan anses vara proportionell mot temperaturskillnaden, såvida denna icke är alltför stor. Mellan elementets poler är inkopplad en vridspolegalvanometer, som gör ett utslag av en skaldel för $0{,}53 \cdot 10^{-7}$ A. Galvanometerns motstånd är 73 Ω, termoelementets kan uppskattas till 1 Ω. Vilken är den minsta temperaturskillnad man kan mäta med detta termoelement, om det minsta galvanometerutslag, man med säkerhet kan avläsa, är 0,2 skaldelar?
7. För bestämning av ett homogent magnetfälts styrka användes vid ett lärjungeförsök följande anordning. På ett lutande plan

voro två cylindriska kopparstavar anbragta, parallellt med varandra och med planets längdriktning. Tvärs över dem låg en rak cylindrisk koppartråd, nära vars ändar spår ursvarvats, som passade till stavarna, så att tråden lätt kunde rulla utefter dem utan att urspåra. Det magnetiska fältet alstrades av en elektromagnet, som var fastgjord vid det lutande planet på sådant sätt, att kraftlinjerna voro vinkelräta mot detsamma. Genom koppartråden kunde man sända elektrisk ström. Först bestämdes nu friktionskoefficienten mellan tråden och stavarna genom mätning av friktionsvinkeln, som befanns vara 1°,8. Sedan släpptes ström genom tråden, och lutningsvinkeln ökades. Det visade sig, att en ström av 1,40 A just var tillräcklig att hindra tråden att rulla ned, då planets lutningsvinkel var 8°,8. Trådens vikt var 2,15 g och längden av dess strömgenomflutna del 5,0 cm. Den kraft, varmed tråden påverkas i magnetfältet, är proportionell mot trådens längd, mot strömstyrkan och mot det magnetiska fältets styrka; proportionalitetskonstanten är 0,1, då trådens längd mätes i cm, strömstyrkan i ampère, kraften i dyn och magnetfältets styrka i gauss. Beräkna magnetfältets styrka. Det jordmagnetiska fältets inverkan kan försummas. Av teckningen böra framgå magnetfältets och strömmens riktningar i förhållande till varandra.

8. Motståndet i ett galvaniskt element kan bestämmas med följande anordning. Till ändarna *A* och *B* av en jämntjock konstantantråd av 100 cm längd kopplas dels en ledning *AGB*, innehållande en känslig galvanometer *G*, dels en ledning *ACB*, som mellan *A* och *C* innehåller det element, vars motstånd skall mätas, och mellan *B* och *C* ett jämförelsemotstånd på 0,6 ohm. Mellan *C* och en mot mättråden *AB* löpande glidkontakt *D* kopplas en ledning med en strömbrytare *S*. Motståndet i denna ledning kan försummas. Man låter först *S* vara öppen och avläser galvanometerns utslag. Därefter sluter man *S* och förskjuter kontakten *D*, tills galvanometern gör samma utslag som nyss. Detta inträffar, när avståndet *AD* är 440 mm. Beräkna elementets motstånd. Motståndet i galvanometern är så stort, att strömmen i densamma kan försummas i jämförelse med strömmen genom elementet.

Resultat: 1. 660 kgm. 2. Förhållandet $= \frac{1+\sqrt{0{,}85}}{1-\sqrt{0{,}85}} = 24{,}6$. 3. $1{,}60 \cdot 10^{23}$. 4. 120 mm. (Då bilderna äro lika stora, måste linsens avstånd till skalorna vara lika). 5. Okularets avstånd från objektivet bör ökas med 9,6 cm. 6. 0°,021. 7. 367 gauss. 8. 0,47 ohm.

Något om segelflygning och dess energikällor i atmosfären. IV.[1]

Av **H. HENRIKSON.**

c. *Molntermik.*

Uppvindarna inne i cumulus- och cumulonimbusmolnen äro i de flesta fall en direkt fortsättning på instrålningstermiken och många gånger en förstärkt form av denna. Man brukar för övrigt ofta hänföra dessa uppvindar till instrålningstermik. Det finns emellertid all anledning att noga skilja mellan ren instrålningstermik och molntermik. För den senare svarar nämligen en helt ny energikälla, och denna utgöres av det vid vattenångans kondensation frigjorda värmet.

För att avdunsta 1 g vatten vid $t°$ C erfordras $600—0{,}6\ t$ cal, omkring 0° C således sex gånger så mycket som behövs för att uppvärma samma vattenmängd från 0° till 100° C. Följaktligen är det avsevärda värmemängder som bli fria, då uppåtstigande fuktig luft når kondensationsnivån. Härigenom motverkas den adiabatiska avkylningen under uppstigningen i mycket hög grad. Den maximala halten av vattenånga per massenhet fuktig luft ändras förhållandevis hastigt vid hög temperatur och långsamt vid låg temperatur. Därför kan också mycket mera vatten kondenseras och mera värme frigöras vid hög än vid låg temperatur, och följaktligen blir den uppåtstigande luftens avkylning ovan kondensationsnivån långsammare i förra fallet än i det senare. Exempel härpå lämnades, då atmosfärens jämviktsförhållanden berördes.

Då den fuktadiabatiska temperaturgradienten är betydligt mindre än den torradiabatiska och ofta mindre än den geometriska temperaturgradienten (fuktlabil skiktning), äro förutsättningarna rätt stora för uppkomsten av kraftiga vertikala luftströmmar ovanför kondensationsnivån. Den rådande temperaturskiktningen i atmosfären har alltid avgörande betydelse för uppvindarnas utbredning och styrka. Fig. 13 är ett exempel på särskilt gynnsamma förhål-

[1] Forts. från Elementas junihäfte 1943, s. 91.

landen. Såväl under som över kondensationsnivån ligger hävningskurvan till höger om skiktningskurvan, och den uppåtstigande luften är på alla höjder varmare än omgivningen. Sålänge detta förhållande råder, är accelerationen riktad uppåt, hastigheten ökar och väldiga molnmassor skjuta i höjden i tornliknande bildningar. På den höjd där skiktnings- och hävningskurvorna åter skära varandra är det slut med energivinsten, och däröver avtager uppvindarnas styrka mer eller mindre snabbt beroende på skiktningskurvans vidare förlopp. Ibland finns denna spärr först på 6—8 km höjd, och i så fall uppkomma mäktiga åskmoln.

Inne i de centrala delarna av ett sådant moln har man konstaterat uppvindar på ända till 15—20 m/sek i medeltal för flera kilometer tjocka skikt. Man måste därför räkna med att ännu kraftigare uppvindar kunna förekomma vid enstaka tillfällen, förmodligen över 25 m/sek. Det inses ju lätt, att det måste vara ytterst farligt att ge sig i kast med de väldiga krafter, som kunna släppas lösa inne i dylika moln. Man behöver ju blott tänka på att en horisontell vindhastighet uppgående till 22—25 m/sek vid jordytan motsvarar full storm. I allmänhet nå uppvindarna inne i cumulus- och cumulonimbusmolnen ej så höga värden. En övre gräns för de flesta sådana moln ligger vid ca 10 m/sek och rätt ofta uppgå de ej till mer än ett par m/sek, allt beroende på hur stora energimängder som stå till förfogande. Flera av de höjdrekord, som satts under årens lopp, ha möjliggjorts genom ett påpassligt utnyttjande av molntermiken, och otaliga gånger ha höjder nåtts, som varit obetydligt lägre än det för tillfället gällande rekordet. År 1938 slogs det sedan 1934 gällande världsrekordet på 4 350 m ej mindre än tre gånger under två på varandra följande dagar. De uppnådda höjdvinsterna utgjorde i tur och ordning 4 980, 5 550 och 6 685 m; vid det sistnämnda tillfället var topphöjden 8 000 m. Även det svenska höjdrekordet 4 560 m, topphöjd 4 780 m, nåddes inne i ett åskmoln; det sattes den 13 juni 1943 strax utanför Stockholm av Å. Gävert.

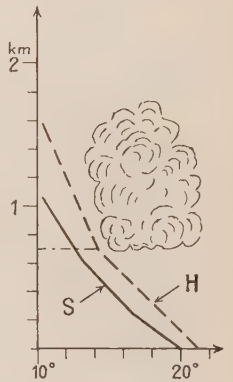


Fig. 13. Exempel på väl utbildad molntermik. *S* skiktningskurvan, *H* är en hävningskurva. En luftvolym som följer denna är hela tiden varmare än omgivningen.

Cumulusmolnens vertikala mäktighet kan variera högst betydligt från fall till fall. Ibland nå de upp genom en stor del av tropo-

sfären, ibland förmå de växa blott obetydligt över kondensationsnivån. Förekomsten av inversioner ovanför denna inverkar mer eller mindre deformerande på molnen alltefter inversionsskiktets mäktighet. Man kan stundom få se, hur ett cumulusmoln, som nått något tusental meters mäktighet, plötsligt plattas till i toppen och breder ut sig åt sidorna, för att efter en stund åter börja skjuta i höjden. Uppvärmningen underifrån och den genom kondensationen frigjorda energien kan nämligen leda till att uppströmmarna småningom förmå bryta igenom spärren, om denna ej är för kraftig. Ibland är inversionen synlig genom att den sammanfaller med

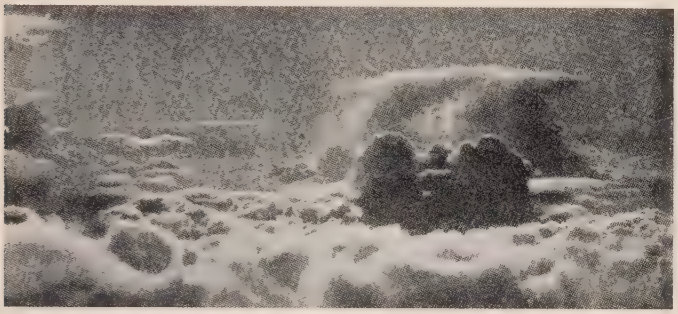


Fig. 14. Ett molntäcke bestående av cumulus och stratocumulus begränsas uppåt av en inversion. Enstaka cumulustoppar förmå bryta igenom denna men tvingas breda ut sig, när de råka på ett nytt högre liggande spärrskikt (ur Georgii, Flugmeteorologie).

ett mer eller mindre tunt molnskikt. Från ett flygplan kan man då få se, hur enstaka molngubbar skjuter upp genom skiktmolntäcket. Det kan till och med hända, att cumulusmolnen förmå tränga igenom mer än ett inversionsskikt. Fig. 14 utgör ett exempel på hur cumulusmoln bryta igenom ett spärrskikt.

För segelflygaren är det av största vikt att med ledning av molnens utseende kunna sluta sig till om det är användbart eller ej. Ett cumulus, som är statt i tillväxt, innehåller i regel goda uppvindar medan ett, som har liten vertikal mäktighet och ej visar tendenser att växa uppåt, knappast kan användas till annat än att lokalisera instrålningstermiken. Det är dock ej säkert, att två cumulusmoln, som se likadana ut, giva samma fördelning av uppvindarna. Ibland förmår segelflygplanet tränga igenom molnet från bas till topp, ibland kan det ej nå toppen utan tvingas nedåt. Dessa nedåtriktade luftströmmar kunna tydas antingen som tecken på att molnet är

i upplösning eller på att uppvindarna nått förbi jämviktsläget. Luften kan ju vara stabilt skiktad inom ett höjdintervall utan att det behöver förekomma en inversion. Inom cumulusmoln av det senare slaget har man ofta konstaterat kraftigare uppströmmar än i moln av förra slaget, särskilt i molnens mellersta delar, och det är därför förklarligt, att de uppåtstigande luftmassorna förmå betydligt överstiga sitt jämviktsläge. Särskilt i de fall då cumulusmolnen kunna genomflygas från bas till topp finnas goda förutsättningar för sträckflygningar trots svaga vindar i höjden. Man kompenserar höjdförlusten under själva sträckflygningen genom att vid behov åka hiss inne i cumulusmolnen.

Vid klarläggandet av uppvindarnas fördelning i cumulusmolnen har man haft ovärderlig nytta av de rika erfarenheter, som segelflygarna samlat under ett stort antal molnflygningar, men med filmkamerans hjälp har man i detalj kunnat studera cumulusmolnens utveckling. I ett väl utbildat cumulusmoln råder i regel en stationär uppvind i de centrala delarna och ofta nedåtriktade luftströmmar i molnets yttre delar, där turbulensen kan vara betydande. Stundom förekomma dock starka uppvindar även i molnens yttre delar.

Känner man den geometriska tillståndskurvan (atmosfärens temperaturskiktning), kan man beräkna uppvindarnas styrka såväl under som över kondensationsnivån och givetvis också avgöra, om uppvindar över huvud taget äro att vänta. Vid ett modernt inrättat segelflygläger göras därför temperatursonderingar med motorflygplan och meteorograf, ibland flera gånger om dagen. På så sätt håller man ständig kontroll över temperaturskiktningen och dess förändringar. I regel visa de beräknade uppvindarna god överensstämmelse med de verkligen iakttagna. Följande tabell ger ett exempel på beräknade och iakttagna uppvindar inne i cumulusmoln.

Höjd:	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	km
ber. uppvind	0,9	2,2	3,3	4,3	4,9	5,4	6,0	m/sek
uppm. » a)	2,2	1,8	2,0	3,2	4,9	4,9	4,9	»
» » b)	2,2	1,7	2,1	3,8	2,8	—	—	»

Beräkningarna gälla för eftermiddagen den 30 juli 1929 över området kring Wasserkuppe. Mätningarna gjordes med två timmars mellanrum och i två olika cumulusmoln. Överensstämmelsen mellan beräknade och uppmätta värden är ju synnerligen god; många flera sådana exempel skulle kunna anföras.

d. *Höjdtermik.*

Atmosfärens labila skiktning åstadkommes ju i regel på så sätt att värme genom solstrålning tillföres de närmast marken liggande luftskikten, varifrån de vertikala luftströmmarna sedan utgå, när labiliteten utlösts på ett eller annat sätt. Ibland påträffas på några tusen meters höjd luftskikt med utpräglad labil temperaturfördelning. Det är uppenbart, att en sådan också kan bildas genom att kallare luft tillföres i höjden eller genom utstrålning från högt liggande skikt. Detta kan leda till uppvindar i höjden, vilka ej äro beroende av solstrålningen på dagen. Denna s. k. höjdtermik kan möjliggöra segelflygning nattetid och under vintern men är ännu så länge föga utforskad och av ringa betydelse. Fig. 15 visar schematiskt temperaturfördelningen vid höjdtermik, som orsakats genom avkylning inom ett begränsat luftskikt.

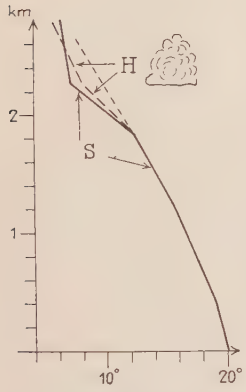


Fig. 15. Höjdtermik med molnbildning. *S* skiktningskurvan efter avkylningen. Den räta småstreckade linjen anger temperaturfördelningen dessförinnan. En från 1 900 m uppåtstigande luftvolym följer hävningskurvan *H*.

I en del av de fall, då man kunnat utnyttja uppvindar på stor höjd oberoende av instrålningen, finns vissa tecken som tyda på att det skulle bero på fria fortskridande vågrörelser inom ett tunt inversionsskikt, som även är förbundet med ett vindsprång. De i ett sådant skikt uppkomna vågorna vandra i den »relativa» vindens riktning och med halva dennas hastighet. Den överadiabatiska gradient, som vid temperatursonderingar konstaterats, kan i så fall vara skenbar och orsakas av horisontella temperaturmotsättningar mellan lä- och lovartsidorna på vågberg och vågdalar. Förekomsten av tunna, parallellt löpande molnbankar i 90° vinkel med vindriktningen och på regelbundet avstånd från varandra stödja en sådan tydning. Uppvindarnas styrka överstiger sällan ett par m/sek. De förekomma på vågbergens *läsidor*.

e. *Kvällstermik.*

Så länge den till jordytan instrålade värmemängden är större än den som avgives genom utstrålning, minskas stabiliteten i de

marknära luftskikten, och när temperaturgradienten börjar närma sig den torradiabatiska eller når och ev. något överskrider denna, äro vertikala luftströmmar i full gång. En solig sommardag är detta en normal företeelse. Mot kvällen minskas värmeöverskottet och uppvindarna mattas mer och mer för att helt upphöra, då den utstrålade värmemängden blir större än den instrålade och stabiliteten i markskikten därigenom åter ökar. Härigenom omöjliggöres segelflygning i de lägre skikten, i regel upp till ca 1 000 m. Därovanför bibehålles emellertid den labila skiktningen avsevärt längre, oftast till sent på kvällen och ibland under en stor del av natten. Denna s. k. kvällstermik, som alltså ej är något annat än rester av instrålnings- och molntermiken under dagen, utnyttjas i stor utsträckning av segelflygarna. Uppvindarnas styrka kan vara betydande. Mitt i natten har man uppmätt ända till 6 m/sek, och en höjdvinst på ca 1 000 m är ej särskilt ovanlig. Det är emellertid klart, att kvällstermiken är svårare att utnyttja än termiken under dagen, men uppvindarna äro i regel betydligt jämnare.

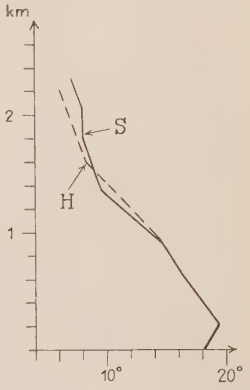


Fig. 16. Exempel på kvällstermik. Under kvällen upphör termiken i det marknära luftskiktet, där en markinversion bildas med mycket stabil temperaturskiktning. Rester av termiken finnas kvar mellan 900 och 1 500 m. *S* och *H* resp. skiktnings- och hävningskurva.

Kvällstermik kan förekomma både med och utan molnbildning, det senare fallet schematiskt illustrerat i fig. 16. I allmänhet leder den nog till molnbildning eller kanske snarare till att molnbildning, som förekommit tidigare under dagen och eftermiddagen, underhålles långt fram på kvällen, trots att värmetillförseln utifrån avstannat. Labilitetsenergiens omvandling till uppåtstigande luftströmmar behöver en utlösningsanordning. Utlösningen kan ske orografiskt, om ett hinder i den horisontella luftströmmens väg är så högt, att även de lägsta labila luftskikten beröras av den tvångsvisa lyftningen över hindret. Ofta mojnar vinden i de marknära skikten, men ett stycke upp kan den fortsätta att blåsa. Om övergångsskiktet ligger tillräckligt högt, kan även turbulensen i detta tänkas som utlösande faktor. Slutligen ha vi en tredje möjlighet, och den är kanske den vanligaste. Jordytans uppvärmning genom solstrålningen under dagen sker ju mycket ojämnt. Över skogklädda områden finner man då i regel blott nedåtriktade luft-

strömmar; vi ha i ett föregående sammanhang kunnat konstatera, att stora mängder solenergi magasineras inom sådana områden. När kvällen kommer och utstrålningen börjar överväga, avkyles skogklädd terräng mycket långsammare än omgivningen. Skogen har nu stora värmemängder att avgiva till luften ovanför, och denna börjar sakta stiga. Allteftersom temperaturmotsättningarna bli större, öka uppvindarna i styrka. I allmänhet torde de dock vara för svaga för att direkt utnyttjas för segelflygning, men de äro mer än tillräckliga för att utlösa en ev. förekommande labilitet i skikten närmast ovanför. Så småningom sinar skogens värmeförråd, och därmed avtar också uppvinden, först i markskiktet, senare även högre upp. Över städer och tättbebyggda samhällen äro förhållandena enahanda. Även här förekommer den bästa termiken efter solnedgången, tvärtemot vad man kanske skulle kunnat vänta sig. Under dagen är byigheten i regel rätt stor, och ordnade uppvindar äro mindre vanliga.

Den för kvällstermiken typiska temperaturskiktningen kan även förekomma mitt på dagen, nämligen i kustnära trakter, där växlingen mellan land- och sjövind är utpräglad. Sålänge vinden en solig sommardag blåser från land, äro möjligheterna till termisk segelflygning utmärkta. När sjövinden fram mot middagstiden sätter in och medför avkylning upptill ca 500 meters höjd eller något mera, omöjliggöres med ens all termik i de lägre skikten, ofta till dubbelt så stor höjd som sjövinden når. Däröver finnes under gynnsamma omständigheter rester av förut rådande termik, som möjligen kunna utnyttjas, om luften här genom yttre orsaker bringas ur sitt labila jämviktsläge. I ett sådant fall, som fig. 17 illustrerar, är all termik i de lägre skikten, upptill 600 m, omöjliggjord genom avkylningen, vid marken uppgående till 5°. Man övertygar sig lätt härom genom att inlägga en ny hävningskurva utgående från marktemperaturen 15 à 16°. Ovan 800 m finns däremot labiliteten kvar.

f. *Vindtermik.*

Den förut behandlade instrålnings- och molntermiken förutsätter svag vind för att komma till full utveckling. En måttlig ökning av vindens styrka medför en förskjutning av uppvindsområdena, men dessas oregelbundna fördelning allt efter markytans beskaffenhet bibehålles. Eventuellt förekommande moln ligga nu ej rakt över uppvindsområdena utan mer eller mindre vid sidan om dessa. Kraftig vind kan trasa sönder termikblåsorna.

Helt annorlunda blir förhållandet, om luftmassan som helhet är labilt skiktad. I samband med de ostvart vandrande lågtrycken

införa gång efter annan västliga och sydvästliga vindar luftmassor av maritimt ursprung, vilka upptagit stora mängder fuktighet från havet. I regel torde det röra sig om ursprungligen kall luft, som förts mot sydligare breddgrader och därvid uppvärmts underifrån, varvid fuktlabil temperaturskiktning lätt inställer sig. I en sådan luftmassa finnas alla förutsättningar för goda uppvindar. De gå under namnet vindtermik, emedan de mestadels förekomma i förening med stor horisontell vindhastighet. Uppvindarnas fördelning är utomordentligt regelbunden, och de äro alltid förbundna med molnbildning. En ordnad utlösning av labiliteten kommer till stånd i form av långsträckta valsar, s. k. *molngator*, vilkas axlar ligga i vindriktningen. Ofta bildas flera sådana parallella molngator på regelbundet avstånd från varandra. På molngatans ena sida råder uppvind, och där sker nybildning av molnen, på den andra råder en nedåtriktad luftström med upplösning av molnen. Uppåt begränsas molngatorna i regel av en inversion. Bredden brukar bli ungefär lika stor som höjden; längden kan ibland uppgå till flera mil. Experimentellt har man kunnat visa uppkomsten av dylika valsar genom att låta en luftström passera mellan två olika tempererade plattor, en undre uppvärmd och en övre avkyld.

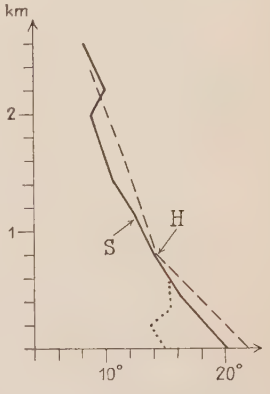


Fig. 17. Sjövindens inverkan på termiken. *S* är skiktningskurvan innan sjövinden sätter in. En luftvolym, som följer hävningskurvan *H*, är varmare än omgivningen upptill ca 2 km. När sjövinden börjar blåsa, avkyles skiktet upptill 600 m (punkterad bruten linje), varigenom termiska uppvindar i detta omöjliggöres. Ovan 800 m råder fortfarande labil skiktning med möjlighet till termik.

Vindtermiken skapar de nödvändiga förutsättningarna för långdistansflygningar, ty dels behöver man ej slösa tid på att söka efter uppvindsområdena, dels blir färdhastigheten stor tack vare den i regel kraftiga horisontella vinden. Före kriget voro tyskar och ryssar de verkliga specialisterna på att utnyttja vindtermiken, men så äro ju också förhållandena i Tyskland och särskilt över sydryska stäppområdet idealiska. I juli 1935 lydde rekordet på 504 km. Det var fyra tyska segelflygare, som samtidigt flögo exakt samma sträcka. 1937 togo ryssarna definitivt hand om världsrekordet. I maj detta år gjordes tre rekordflygningar med Moskva som utgångspunkt. De tillryggalagda sträckorna voro

resp. 539, 602 och 652 km. Den nu gällande maximisträckan är som förut nämnts 794 km. Denna tillryggalades på blott 8 timmar och 25 minuter, och färdhastigheten var således i medeltal 100 km/tim. I Sverige ha vi hittills fått nöja oss med mera blygsamma resultat, men i juli 1943 flög svensken Fägerbladh sträckan Alleberg—Ystad eller 300 km, vilket dock ej skedde i särskilt typisk vindtermik.

g. *Fronttermik.*

Innan man kommit underfund med och lärt sig utnyttja vindtermiken, vilket skedde år 1934 i samband med de årligen återkommande segelflygtävlingarna på Wasserkuppe i Rhön, utnyttjades huvudsakligen de vandrande åskfronterna för sträckflygningar. Det ligger ju nära till hands att söka använda denna framvältrande, ofta flera tiotal kilometer långa mur av cumulonimbus. Inne i molnen var det knappast tillrådligt att hålla till, det var man tidigt på det klara med, men *framför* åskfronten visade det sig finnas kraftiga och dessutom oväntat jämna uppvindar, maximistyrka i regel 6—8 m/sek, inom höjdintervallet 1—3 km. Den vanligaste flyghöjden vid dessa segelflygningar var 2—3 km i ett par sekundmeters uppvind på ett avstånd av ca 1—2 km framför själva fronten och alltid före molnmuren. Sedan hade man blott att hålla sig där; förflyttningen i horisontell led ombesörjde den vandrande fronten. Den längsta sträcka, som tillryggalagts på detta sätt, är 272 km. Som exempel på hur jämna uppvindarna kunna vara må anföras, att vid en av dessa flygningar höll sig flygplanet på $2\,900 \pm 50$ m i hela 44 minuter och därefter på $2\,250 \pm 250$ m i 2 timmar! Av dessa frontsegelflygningar har man ansett sig kunna draga den slutsatsen, att kalluftsinbrottet vid marken i samband med frontpassagen måste föregås av ett liknande i höjden, varigenom temperaturskiktningen blir labil. Fig. 18 visar schematiskt ett tvärsnitt genom en sådan åskfront och hur flygningen bör ske.

Fig. 18. Tvärsnitt genom en åskfront. Avkylningen i höjden kommer först. Start omedelbart innan fronten passerar vid marken, t. ex. från ett hang, och därefter flygning i uppvindarna före fronten på betryggande avstånd från de mäktiga åskmolnen.

4. Uppvindar förorsakade av vågbildning i atmosfären.

Redan innan de termiska uppvindarna voro nämnvärt utforskade, hade man genom undersökningar av luftens strömningsförhållanden omkring höjdsträckningar, speciellt Rossittens dyner, funnit, att stationära vågor kunde bildas i lä av dem. Under de senaste 20 åren ha systematiska forskningar bedrivits för att söka klarlägga, hur vågbildningarna i atmosfären uppkomma. Härvid har särskilt området omkring Riesengebirge och på nordsidan av Alperna visat sig lämpliga. Ett och annat problem väntar ännu på slutgiltig lösning, men det mesta torde nog få anses vara tillfredsställande klarlagt.

Vågrörelserna i lä av ett hinder kunna indelas i två huvudgrupper, dels sådana som sträcka sig blott ett fåtal kilometer uppåt i atmosfären, dels sådana som förekomma i hela troposfären eller blott i dess övre hälft. De förstnämnda förekomma relativt ofta, ha förhållandevis liten våglängd och bildas vid vindhastigheter, som sällan överstiga 11 m/sek. De senare äro mera sällsynta och uppträda blott i vissa väderlekslägen, bl. a. då vindhastigheten i höjden är stor (ungefär lika med vågornas fortplantningshastighet, ca 20 m/sek); våglängden är större, och därför kallas de stundom »de långa vågorna».

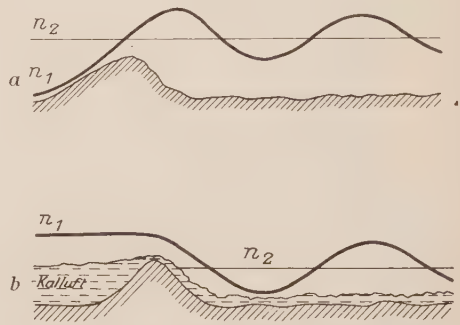


Fig. 19. Svängningsrörelser i lä av ett hang. Genom detta ändras jämviktsläget från n_1 till n_2. I *a* är temperaturgradienten stor ($\geq 0{,}8$ °/100 m), i *b* är den liten ($\leq 0{,}3$ °/100 m, stabil skiktning).

a. *Vågrörelser i atmosfärens lägre skikt.*

Varje avgränsad luftvolym, som kommer ur sitt jämviktsläge eller tvingas in i ett nytt, utför dämpade svängningar omkring detta, vare sig orsaken till rörelsen är överhettning av marknära skikt eller beror på att en luftström tvingas över ett hinder. Här kommer nu närmast det senare alternativet i fråga.

I. $\gamma \geq$ *ca 0,8* °/*100 m* (*labil skiktning*). Gränsen mellan stabil och labil skiktning är ju egentligen 1 °/100 m, men skiner samtidigt

solen, utgör ungefär 0,8°/100 m undre gränsen för termisk segelflygning. Luft som strömmar uppför ett hang och därvid samtidigt uppvärmes genom solstrålning (indirekt) ändrar sitt jämviktsläge (från n_1 till n_2, se fig. 19 a). Höjdändring liksom amplitud och svängningstid beror av temperaturskiktningen och överhettningen, våglängden dessutom av den horisontella vindhastigheten. Vågorna bli tydligt synliga, om kondensation inträder inom det höjdintervall, som beröres av den svängande luften. Två fall kunna då inträffa. Om ingen inversion finnes, bildas moln av cumulustyp, om däremot en inversion ligger strax ovanför kondensationsnivån, förflackas molnen och antaga linsform (se fig. 20 a och b). I båda fallen ligga molnen ordnade i parallella band men kunna under vissa omständigheter växa samman till ett helt molntäcke (se fig. 21 a och b). De bästa uppvindarna påträffas, där luftens vertikalrörelse är som störst och givetvis ej i vågtopparna (jfr fig. 21 a, områdena med plustecken). Ett inversionsskikt, som kommer i svängning, har stor betydelse för svängningsrörelserna inom luftskiktet därunder. Oftast sammanfaller inversionen med en språngvis ändring i bl. a. vindhastigheten, som inverkar på våglängden. Även luftens

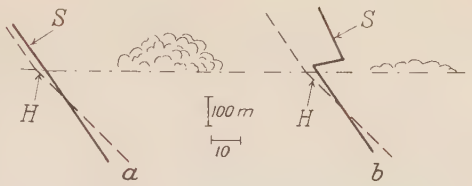


Fig. 20. Svängningar kring ett jämviktsläge, som ligger något under kondensationsnivån. I *a* finns ej någon inversion, molnen bli av cumulustyp; i *b* ligger en inversion omedelbart över kondensationsnivån, linsformade moln bildas. *S* skiktningskurva, *H* hävningskurva.

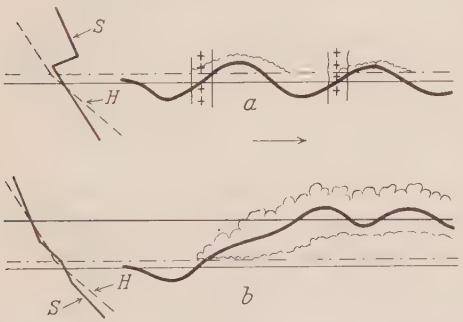


Fig. 21. Molnbildning genom vågrörelse i lä av ett hinder. *H* hävningskurva, *S* skiktningskurva. Heldragen vågrät linje jämviktsnivå, streckpunkterad vågrät linje kondensationsnivå. I *a* krönas vågbergens toppar av linsformade moln, områdena med plustecken visa, var de kraftigaste uppvindarna finnas. I *b* medger skiktningen två jämviktslägen, det ena ovanför kondensationsnivån, och kring detta bildas ett sammanhängande molntäcke med cumulusform.

täthet ändras diskontinuerligt, och i gränsskiktet mellan två medier med olika täthet uppkomma lätt vågrörelser. I händelse av resonans förstärkas de primära svängningarna i luftskiktet under inversionen, och även ovanför denna råkar luften i svängning.

II. $\gamma \leq$ *ca 0,3 °/100 m* (*stabil skiktning*); häri även markinversioner inberäknade. Under vintern samt nattetid bildas i regel ett kalluftskikt närmast marken, vilket till en början kan antagas ha ungefär samma mäktighet på båda sidor om en höjdsträckning.

Fig. 22. Vågrörelse i troposfärens undre hälft synlig genom molnbildning; kondensationsnivån ligger lägre än vågdalarna, varför ett sammanhängande moln bildas (ur »Beiträge zur Physik der freien Atmosphäre», Bd 25, häfte 2).

Om lufttrycksgradienten plötsligt skärpes och den av tryckfördelningen bestämda vindriktningen är gynnsam ($\perp$ höjdsträckningen), kan kalluften i lä sugas bort, medan den i lovart ligger kvar upptill i höjd med hanget. Den luft, som strömmar ovanför kalluftskiktet, sänker sig då på hangets läsida och jämviktsnivån ändras (n_2 i fig. 19 b); omkring detta uppkommer även nu svängningar, som kunna utbreda sig uppåt. Kondensationsnivåns läge liksom förekomsten av en eller flera inversioner i höjden sätta även nu sin prägel på fenomenet. I såväl detta som föregående fall kunna svängningarna omfatta luftskikt om några kilometers tjocklek, men i marknära skikt kunna virvlar och stor byighet förekomma. Uppvindarnas styrka på vågbergens lovartsida kan uppgå till några m/sek. Fig. 22 visar ett exempel på vågrörelse med molnbildning i atmosfärens lägre skikt.

b. *»De långa vågorna».*

En helt annan storleksordning och utbredning ha de uppvindar, som i vissa fall påträffas i samband med vågrörelser, vilka kunna sträcka sig genom hela troposfären och ibland nå upp till stratosfärens lägsta skikt. Teorin för dessa vågors uppkomst har fått sin nuvarande utformning under de senaste åren (uppsatser i tidskriften »Beiträge zur Physik der freien Atmosphäre», Band 25 och följande med talrika litteraturhänvisningar) och anknyter till

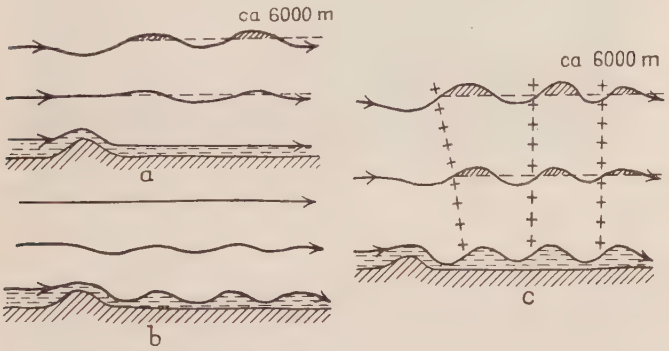


Fig. 23. Uppkomsten av de s. k. långa vågorna. Genom luftens strömning över hindret vid marken orsakas en nedbuktning av strömlinjerna på stor höjd rakt ovanför hanget, varigenom vågrörelser inledas i höjden under gynnsamma omständigheter (*a*). Ett annat vågsystem bildas i skikten närmast marken (*b*). Vid samverkan uppkommer en vågrörelse enligt *c* med kraftiga uppvindar, 3—7 m/sek, på vågbergens lovartsidor (angivna genom plustecken).

ett liknande problem för strömmande vatten, vilket lösts av Lord Kelvin i slutet av 1800-talet. Här kan det endast bli fråga om en mycket grov skissering av fenomenet.

För att hela troposfären eller i varje fall en stor del av denna (den övre) skall råka i svängningsrörelse, måste vissa villkor vara uppfyllda, bl. a. följande: en inversion (ev. flera) måste finnas på en höjd, som är stor i förhållande till hindrets (på ca 6 000—10 000 m); stabil skiktning i troposfärens lägre del men fuktindifferent eller fuktlabil temperaturskiktning i höjden särskilt inom de skikt, som ligga över och under inversionen; enhetlig kraftig luftströmning på alla höjder och vindhastigheten i höjden ungefär lika med vågornas fortplantningshastighet, i vilket fall resonans inträder och vågbergen kunna bli minst lika stora som markhindrets höjd. Denna »kritiska hastighet» är bl. a. en funk-

Fig. 24. Moazagotl-moln över Riesengebirge. Skiktning och vågformade partier framträda tydligt.

Fig. 25. Moazagotl-moln sedda från sidan. Vågrörelsen utpräglad. Bilder ur »Beiträge zur Physik der freien Atmosphäre», Bd 25, häfte 2.

tion av temperaturinversionens storlek och utgör normalt ca 20 m/sek. Om den kritiska hastigheten överskrides, förstöras vågrörelserna, »bränningar» bildas, och på hindrets lovartsida tornar luften upp sig med påföljd att ett högträckande uppvindsområde uppkommer över hindret (förstärkning av hanguppvinden till mer än tio gånger hangets höjd).

I svängningsrörelsen deltaga två vågsystem, ett undre, som är

identiskt med det som beskrivits under a *II* (se fig. 23 b), och ett övre, som uppkommer på följande sätt: luftens strömning upp över och nedför hanget orsakar en nedbuktning av inversionsskiktet i höjden, lodrätt över hanget enligt fig. 23 a (strömlinjerna varandras spegelbilder), varigenom inversionen och kringliggande skikt komma i svängning. I gynnsamma fall samverka de båda vågsystemen, och hela troposfären svänger som fig. 23 c schematiskt visar. Uppvindsområdena — i fig. markerade genom plustecken — kunna då sträcka sig ända upp till lägre stratosfären. Ett segelflygplan, som lyckas komma in i ett sådant, skjutsas nästan lodrätt upp, såsom t. ex. vid Zillers förut nämnda höjdrekord. I mindre gynnsamma fall kan det undre vågsystemet helt saknas eller också kunna de båda vågsystemen helt eller delvis upphäva varandra inom troposfärens mellersta del, t. ex. den $^{11}/_{10}$ 1940, då tysken Glöckner över Alperna nådde 11 410 m men uppvindarna påträffades först på 6 500 m höjd.

På stor höjd (över ca 5 000 m) blir vågbildningen ofta synlig genom de karakteristiska moln, som kunna bildas på hindrets läsida, över Riesengebirge benämnda Moazagótl-moln (fig. 24 och 25). De bildas på vågbergens toppar och stå alldeles stilla på samma plats, sålänge vågrörelsen fortgår, ibland ett helt dygn. Molnen ha oftast formen av en cigarr eller en fisk (»fisken» över Himalaja) men kunna ibland smälta samman till ett molntäcke med stor horisontell utsträckning. Avståndet mellan två vågberg uppgår i medeltal till ca 8 km, och man har kunnat se ända till 6—7 vågor efter varandra (härav namnet »de långa vågorna»). Den första vågen är bäst utvecklad, men man har kunnat segelflyga även i den andra och tredje. Uppvindarnas styrka varierar mellan 3 och 5 m/sek, någon gång 7—8 m/sek. Liknande moln ha vid flera tillfällen varit synliga i Sverige, t. ex. på östra sidan av Kölen och över trakterna kring Vättern.

5. Beräkning av de termiska uppvindarnas styrka.

En avgränsad luftvolym med tätheten ϱ' och absoluta temperaturen T' antages röra sig i vertikal led genom den omgivande luftmassan med tätheten ϱ och absoluta temperaturen T. På luftvolymen verka då dels tyngdkraften, dels den vertikala komponenten av den kraft, som lufttrycksfältet utövar. För beräkning av luftvolymens acceleration $\frac{d^2z}{dt^2}$ gäller då sambandet (kraftekvationen)

$$\varrho' \frac{d^2z}{dt^2} = -\varrho' g - \frac{\partial p}{\partial z}. \qquad (2)$$

För den omgivande luften, som befinner sig i vila, få vi för samma nivå

$$0 = -\varrho g - \frac{\partial p}{\partial z}. \tag{3}$$

Elimineras $\frac{\partial p}{\partial z}$, erhålles ur (2) och (3) efter division med ϱ' sambandet

$$\frac{d^2z}{dt^2} = g\left(\frac{\varrho}{\varrho'} - 1\right). \tag{4}$$

Enligt gasernas allmänna tillståndslag gäller $p = R\varrho T = R\varrho' T'$, varför ekv. (4) efter omformning kan skrivas

$$\frac{d^2z}{dt^2} = g\,\frac{T' - T}{T}. \tag{5}$$

Detta värde på accelerationen står dock ej helt till förfogande för vertikalrörelsen. Energiförluster, huvudsakligen förorsakade av friktion och blandning med omgivningen, äro oundvikliga. Dessutom inverkar luftvolymens form. Den brukar vara mer eller mindre klotformig, och härigenom ökas skenbart dess massa under rörelsen. Allt som allt minskas accelerationen med minst en tredjedel, och vi komma därför de verkliga förhållandena närmare, om vi som uttryck för accelerationen använda formeln

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{2}{3}\,g\,\frac{T' - T}{T}. \tag{6}$$

Multiplikation med $2\frac{dz}{dt}$ ger, om $\frac{dz}{dt}$ sättes $= v_z$,

$$d(v_z)^2 = \frac{4}{3}\,g\,\frac{T' - T}{T}\,dz. \tag{7}$$

Då $-dp = g\varrho dz$ enligt barometriska höjdformeln — jfr ekv. (3) — och $p = R\varrho T$ enligt gasekvationen, blir $gdz = -\frac{dp}{p}RT$; ekv. (7) kan därför också skrivas

$$d(v_z)^2 = -\frac{4}{3}\,R(T' - T)\frac{dp}{p}. \tag{8}$$

För g användes värdet 9,81 m/sek² och för R värdet 287 m²/sek² · · grad.

Uppvindarnas styrka (v_z) kan alltså beräknas med hjälp av ekv. (7) eller (8). Såväl T som T' är en funktion av höjden (trycket), och detta samband måste vara känt för att ekv. skola kunna integreras. Bäst göres emellertid beräkningen skiktvis enl. ekv. (8),

sedan den geometriska tillståndskurvan inritats på ett adiabatpapper, ur vilket man då får alla nödvändiga uppgifter om temperatur och tryck. Varje skikt väljes så, att T inom detta ändras lineärt. För p och $T' - T$ insättas medelvärdena inom de olika skikten. De för dessa beräknade differenserna $d(v_z)^2$ ge sedan v_z.

Ekv. (7) och (8) gälla endast under kondensationsnivån. Ovan denna måste de modifieras, om ej det kondenserade vattnet faller ut som nederbörd, vilket för vanliga cumulus ej är fallet. Hänsyn måste därför tagas till det vatten, som den uppåtstigande luftströmmen för med sig. Om den kondenserade vattenmängden är w gram per gram luft och Q betyder ångbildningsvärmet, är den vid kondensationen frigjorda värmemängden $w \cdot Q$. Den uppåtstigande luftens avkylning blir härigenom mindre, och tillståndsändringen sker längs fuktadiabaten och ej längs torradiabaten. Temperaturskillnaden $T' - T''$ vid ett visst tryck (på en viss höjd) mellan fuktadiabaten och torradiabaten, båda gående genom kondensationspunkten, är alltså ett mått på det frigjorda kondensationsvärmet. Om c_p som vanligt är luftens spec. värme vid konstant tryck, få vi $w \cdot Q = c_p(T' - T'')$ och således $w = \frac{0{,}24(T' - T'')}{600 - 0{,}6(T' - 273)}$.

Det medförda vattnet betyder en ökning i tätheten, vilket givetvis har samma effekt på accelerationen, som om ökningen åstadkommits genom en sänkning av temperaturen, dvs. som om T' minskats med $w \cdot T'$ eller — i närheten av 0° C — med $\frac{0{,}24(T' - T'')273}{600} =$ $= 0{,}11(T' - T'')$. I ekv. (7) och (8) skola vi alltså ersätta T' med $T' - 0{,}11(T' - T'')$, och i den förra kunna vi approximativt sätta $T = 273°$. Vi få då

$$d(v_z)^2 = 0{,}05[T' - T - 0{,}11(T' - T'')]\,dz \qquad (9)$$

och

$$d(v_z)^2 = -383[T' - T - 0{,}11(T' - T'')]\frac{dp}{p}. \qquad (10)$$

Betydelsen av de olika temperaturerna är sammanfattningsvis följande:

T = absoluta temperaturen hos den av vertikalrörelser ostörda atmosfären; T fås från den geometriska tillståndskurvan.

T' = absoluta temperaturen hos den uppåtstigande luftvolymen; T' fås från fuktadiabaten genom kondensationspunkten.

T'' = den absoluta temperatur som den uppåtstigande luftvolymen skulle haft, om kondensation ej ägt rum; T'' fås från torradiabaten genom kondensationspunkten.

Under kondensationsnivån är $T' = T''$, och ekv. (9) och (10) övergå då i (7) och (8) med insatta värden på konstanterna.

De från ovanstående formler erhållna värdena på uppvindarnas styrka äro naturligtvis blott approximativa, men överensstämmelsen mellan beräknade och uppmätta värden är oftast mycket god.

Litteratur:

W. Hirth, »Handbuch des Segelfliegens», Stuttgart 1939 eller 1942.
Georgii-Höhndorf, »Der Segelflug und seine Kraftquellen im Luftmeer», Berlin 1935.
Uppsatser i tidskriften »Beiträge zur Physik der freien Atmosphäre», Band 25—27, med talrika litteraturhänvisningar.

Enheten för kraft inom hållfasthetstekniken.

Av **FOLKE K. G. ODQVIST** och **J. O. ROOS af HJELMSÄTER.**

Vid sammanträde med Ingenjörsvetenskapsakademiens avd. VII den 11 februari 1943, varvid dryftades frågan om enheten för begreppet kraft inom ingenjörstekniken, uppdrog avdelningen åt ovan nämnda ledamöter att härom göra en förberedande utredning. Resultatet av denna utredning föreligger här.[1]

1. Vikt och massa.

Enligt svensk lag om mått och vikt, SF nr 162/1934, är vikt och massa synonyma begrepp. Enheten för *vikt* (*massa*) är kilogrammet och är i Sverige = riksprototypen, som är en kopia av internationella kilogramprototypen i Breteuil vid Paris.[2]

En kropps vikt (massa) fastställes genom jämförelse med prototypen medelst vägning med balansvåg och är därför densamma på olika orter på jorden.

2. Tyngd och kraft.

a) En kropps *tyngd* är den kraft, varmed den drages till jorden. Denna tyngdkraft är beroende av breddgraden till följd av jordens rotation, avplattning mot polerna ävensom av höjden över havet m. m. och är olika på olika orter.

[1] Denna utredning har tidigare publicerats i tidskriften IVA, h. 2, 1943. Den införes med benäget tillstånd i Elementa för att läsekretsen skall kunna följa utvecklingen av den segslitna frågan om fysikens och teknikens enheter. Vid sammanträde den 14 sept. 1943 med IVA:s avd. VII togs utredningen till protokollet. Med anledning av denna utredning har red. från Förste ingenjören vid K. Mynt- och justeringsverket, docent Torsten Swensson, mottagit ett inlägg, som återfinnes å sid. 214 i detta häfte. *Red.*

[2] Enheten ifråga är den internationella kilogramprototypen. Se sid. 215. *Red.*

Den av tyngdkraften orsakade accelerationen vid fritt fall är därför också olika på olika orter; vid polen = 9,8321; i Stockholm = = 9,8184; i Paris = 9,8094 m/sek².

Femte internationella konferensen för mått och vikt fastställde år 1913 »l'intensité normale de la pesanteur» eller »normalaccelerationen» till 9,80665 m/sek², vilket värde avsågs att vara accelerationen vid 45° nordl. bredd (nära Turin eller Bordeaux) och havets nivå. (Senare har det visat sig att detta icke är fullt exakt.)

b) Enheten för *kraft* inom hållfasthetstekniken är ett kilogram = = kilogramkraften = tyngden av kilogramvikten och betecknas kg eller (mera sällan) kgf.

Denna kilogramkraft är såsom ovan sagts olika på olika orter. Om kilogramkraften på orten för normalaccelerationen = 9,80665 antages = 1,0000 kg, då är kilogramkraften i Paris = 1,0003; i Berlin = 1,0006 och i Stockholm = 1,0012.

Konsekvensen härav är bl. a.

Om ett byggnadsverk, t. ex. en bro, belastas med massor åverkade av tyngdkraften, bliva påkänningarna i densamma 0,12 % större om bron är i Stockholm än om den är i Turin. Om lika provstänger av ett material provas med samma nominella belastning i en med krönta vikter kalibrerad provningsmaskin, blir i Stockholm påkänningen likaledes 0,12 % större och provstången brister vid 0,12 % lägre belastning än i Turin.

Någon internationell överenskommelse om enheten för kilogramkraften föreligger icke. Olika alternativ kunna därvid komma ifråga, t. ex. den kilogramkraft, som ger massan 1 kg den internationellt fastställda normalaccelerationen, eller kilogramkraften på någon överenskommen ort, såsom Paris, Stockholm eller annan ort.

I *Frankrike* är i lag år 1919 stadgat, att enheten för kraften är en »stèhne» = den kraft, som på en sekund förmår giva massan 1 ton en hastighetstillväxt av en meter per sekund.

Vidare stadgas:

Unitées mécaniques. Forces: Le kilogramme-poids ou kilogramme-force, force avec laquelle une masse égale à un kilogramme est attiré par la terre. Le kilogramme-poids est pratiquement égale à 0,98 centistèhne.

Den franska lagen hänför sålunda icke kilogramkraften till någon viss ort och anger den endast med två benämnda siffror.

I *Tyskland* har sedan 1870-talet Mechanisch-technische Versuchsanstalt i Berlin och sedan 1904 Materialprüfungsamt, Berlin-

Dahlem, baserat sin kontroll av drag- och tryckprovningsmaskiner på direktbelastning, varvid kilogramkraften i Berlin varit enhet.

År 1939 har Physikalisch-technische Reichsanstalt i sin egen verksamhet infört benämningen »Kilopond» = kraften som ger 1 kg normalacceleration 9,80665; någon officiell överenskommelse om tillämpning av denna kraftenhet inom ingenjörstekniken finnes dock icke.

I *Sverige* förefinnes ingen officiell enhetlighet.

Moll-Rudbergs lärobok i fysik, 11 uppl. 1941, anger som enhet för kraft kilogramkraften vid normalacceleration 9,80665.

Vid Statens Provningsanstalt i Stockholm finnes för kontroll av provningsmaskiner 20 st vikter, vardera om 500 kg, sammanlagt 10 ton, vilka äro justerade vid Mynt- och Justeringsverket. Enheten för dessa vikters tyngd är därför kilogramkraften i Stockholm, vilken alltsedan provningsanstaltens tillkomst år 1919 sålunda varit enheten för anstaltens hållfasthetssiffror och även för de hållfasthetssiffror, som erhållas i de provningsmaskiner i andra delar av Sverige, som av anstalten kontrolleras med elastisk kraftmätare.

Som skäl för denna enhet må anföras följande. Om i Sverige en byggnadskonstruktion skall konstrueras för en viss last, t. ex. 1 000 kg, så förstår man med denna last den lokala tyngdkraften av massan 1 000 kg. Det är då en tillräckligt god approximation att använda kg-kraften i Stockholm som enhet. Uträknas för olika delar av konstruktionen den härav orsakade påkänningen i kg/mm² eller kg/cm², så är kraftenheten för dessa siffror ävenledes kg-kraften i Stockholm. (Ur denna synpunkt är det en komplikation eller sämre approximation att använda kg-kraften i Turin som enhet.)

Vid Tekniska högskolan i Stockholm tillsatte lärarkollegiet i september 1941 en kommitté för yttrande om Giorgi-måttsystemet. I sitt ganska utförliga yttrande den 18 maj 1942, publicerat i tidskriften Elementa 1942, lämnar kommittén intet bestämt förslag till enhet för kg-kraften inom ingenjörstekniken, utan synes skjuta denna fråga på framtiden.

Professor H. Faxén har i sitt kompendium i Mekanik, andra upplagan 1943 givit en framställning av hithörande begrepp och anför: »Vid statistiska hållfasthetsberäkningar är det enklast att låta kraften ha samma mätetal som belastningen», vilket för Sveriges vidkommande praktiskt taget skulle betyda att antaga kg-kraften i Stockholm som enhet.

Professorn i hållfasthetslära, F. Odqvist, antager som kraftenhet

för provningsmaskiner och hållfasthetssiffror ävenledes kg-kraften i Stockholm.

Ifall man i Sverige skulle som enhet antaga kg-kraften för normalacceleration 9,80665, så skulle detta medföra, att Statens Provningsanstalts och Tekniska högskolans hittillsvarande hållfasthetssiffror fingo ökas med 0,12 % och att vid kontroll av provningsmaskiner medelst direktbelastning 1 000 kg finge benämnas 1001,2 kg.

I de flesta fall inom hållfasthetstekniken spelar en avvikelse av 0,1 % ingen praktisk roll, men i vissa fall kan den dock ha betydelse. Statens Provningsanstalt i Stockholm har exempelvis bland sina arbetsuppgifter att kontrollera materialprovningsmaskiner vid olika industriverk, vilka maskiner enligt svensk SIS-standard skola ha en noggrannhet inom ± 1 %. I åtskilliga gränsfall kan då en osäkerhet av 0,1 % i själva kraftdefinitionen vara avsevärd.

Ävenledes torde vetenskaplig ordning kräva, att det inom hållfasthetstekniken så viktiga begreppet kraft har en definierad enhet.

Undertecknade få därför föreslå, så länge icke annorlunda officiellt föreskrives, att i Sverige inom hållfasthetstekniken bör liksom hittills med kraften 1 kg förstås tyngden i Stockholm av massan 1 kg.

Litteratur:

J Tandberg: Vad är 1 kilogram? Tidskr. Elementa 1934 och 1935.
Moll-Rudberg: Lärobok i fysik, V Mekanik, 11 uppl. 1941.
Skrivelse från Kommittén för Giorgimåttsystemet till Tekniska högskolans lärarkollegium. Tidskr. Elementa 1942.
Hilding Faxén: Föreläsningar vid Tekn. Högskolan i Stockholm, Mekanik, 2 uppl. 1943.
»Grundeinheiten und Mass-systeme». Tidskr. Die Physik in regelmässigen Berichten. Heft 1, 1942.

Stockholm den 24 maj 1943.

Teknikens kraftenheter.

Av TORSTEN SWENSSON.

Genom utredning av professorerna Folke K. G. Odqvist och J. O. Roos af Hjelmsäter [1] rörande enheten för kraft inom hållfasthetstekniken har diskussion ånyo upptagits rörande teknikens kraftenheter. Det har därför synts lämpligt att i denna tidskrift söka ytterligare belysa innebörden av de inom tekniken använda enheterna samt att söka framdraga de skäl, som tala för eller emot begagnande av dessa olika kraftenheter.

De största svårigheterna att erhålla ett för alla acceptabelt system ha uppkommit därigenom, att inom tekniken sedan gammalt kraften ansetts såsom grundstorhet med grundenheten kilogram. Av vikt är därför att framhålla den rätta betydelsen av denna kilogramenhet. På allmänna konferensen för mått och vikt år 1889 fattades följande beslut:

»La Conference générale sanctionne,

A. En ce qui concerne les prototypes internationaux.

— —

2o. Le prototype du Kilogramme adopté par le Comité international.

Ce Prototype sera considéré désormais comme unité de masse.»

För att ytterligare söka undvika missförstånd och positivt utsäga att kilogrammet *icke* är enhet för tyngd deklarerade den tredje allmänna konferensen år 1901:

»1o. Le kilogramme est l'unité de masse; il est égal à la masse du prototype international du kilogramme.

2o. Le term poids désigne une grandeur de la même nature qu'une force; le poids d'un corps est le produit de la masse de ce corps par l'accélération de la pesanteur; en particulier, le poids normal d'un corps est le produit de la masse de ce corps par l'accélération normale de la pesanteur.»

Härav framgår klart, att kilogrammet enligt internationell överenskommelse är enhet för *massa* och icke för *kraft*. Enligt nu gällande svensk lag om mått och vikt av den 11 maj 1934 är vikt liktydigt med massa. I lagens 2 § stadgas i överensstämmelse med den internationella överenskommelsen:

[1] Se detta häfte sid. 210.

»Enhet för längd är metern och enhet för vikt är kilogrammet. Metern och kilogrammet representeras i enlighet med definitioner, fastställda av allmänna konferenser för mått och vikt, av de internationella prototyperna för metern och kilogrammet, vilka sanktionerats av allmänna konferensen för mått och vikt i Paris år 1889 och förvaras av internationella byrån för mått och vikt i Sèvres.»

Det måste alltså anses olyckligt och förvillande, att inom tekniken 1 kilogram användes såsom enhet för tyngd i dess egenskap av kraft. Kraftenheten bör erhållas på annan väg och härvidlag användes den på erfarenhet grundade satsen, att en kraft F ger åt massan m en acceleration a, som är direkt proportionell med kraften och omvänt proportionell mot massan, alltså $a = c_1 \cdot \frac{F}{m}$, varur fås $F = cam$. Man kan nu välja kraftenheten så, att man får de enklaste formlerna och sålunda låta konstanten c ha värdet 1. Då erhålles $F = am$. Om såsom i CGS-systemet g och cm sättas såsom grundenheter, erhålles såsom kraftenhet 1 dyn eller den kraft, som förmår ge massan 1 g accelerationen 1 cm/s². Nu är det tydligt, att man lika gärna i ett enhetssystem kan välja andra grundenheter än CGS-systemets g, cm och s, exempelvis m, kg och s, vilket egentligen är naturligare, då vi ha meter och kilogram representerade såsom prototyper. Ett dylikt system, MKS-systemet, har blivit aktuellt genom att den allmänna konferensen för mått och vikt år 1921 upptog de elektriska storheterna på sitt program och år 1933 beslöt, att de s. k. internationella elektriska enheterna skulle överges och att man skulle återgå till de absoluta enheterna, sådana dessa voro definierade såsom potenser av CGS-enheterna. Genom detta beslut blir en absolut joule lika med 10^7 erg, d. v. s. lika med den mekaniska energienheten i ett MKS-system. Kraftenheten i detta system, 1 newton (n), är nämligen den kraft, som ger massan 1 kilogram en acceleration av 1 m/s², sålunda lika med 10^5 dyn. Energienheten är då 1 newtonmeter, som blir 10^7 erg, sålunda lika med 1 joule. Ett sådant förslag till ett enhetligt MKS-system har framlagts av den konsultativa kommittén för elektricitet och har år 1935 i princip antagits av den internationella kommittén för mått och vikt. Meningen hade varit, att den till år 1939 planerade, men till följd av kriget uppskjutna allmänna konferensen skulle ha fastställt de föreslagna enheterna. Om efter krigets slut förslaget internationellt godtages, skulle alltså även en för tekniken till storleken lämplig kraftenhet vara fastställd. Innan så blir fallet torde icke någon svensk lagstiftning kunna motses, då det icke kan anses lämpligt att på detta stadium föregripa ett internationellt

beslut, som troligen kommer att fattas vid nästa allmänna konferens. Om tiden alltså ännu icke är inne för konsekvent övergång till MKS-systemet, så synes dock det inom tekniken använda systemet redan nu lämpligen böra avpassas så, att det icke strider mot gällande internationella överenskommelser och mot svensk lag.

Frågan blir då, hur kraftenheten skall definieras för att så icke skall ske och vidare vilket namn kraftenheten skall ha, om man, såsom hittills brukats i tekniken, definierar kraften såsom en tyngd.

Tyngden G av en kropp är då den kraft, som kroppen i lufttomt rum utövar på sitt underlag. Om man i ekvationen $F = cam$ inför tyngden G av massan m och tyngdkraftens acceleration g fås $G = cgm$. Ur de båda ekvationerna fås $F = \frac{G}{g} \cdot a$.

I det renodlade — traditionella — tekniska systemet är 1 kilogram enhet för kraften och är den tyngd, med vilken 1 masskilogram i lufttomt rum drages mot jorden. Om man i detta system sätter konstanten $c = 1$ fås $m = \frac{G}{g}$, vilket betyder, att enheten för massan i det tekniska systemet motsvarar g masskilogram och sålunda varierar från ort till ort. Om man på grund av obehaget med en varierande massenhet definierar 1 kilogram såsom tyngden av 1 masskilogram i lufttomt rum vid normalaccelerationen, som enligt internationell överenskommelse år 1913 är $g_0 = 9{,}80665$ m/s², motsvarar massenheten 9,80665 masskilogram och är sålunda konstant. (Normalaccelerationen är enligt detta beslut fullständigt frigjord från något visst läge på jorden, exempelvis 45° latitud vid havets nivå, på exakt samma sätt som meterns längd frigjorts från jordmeridiankvadranten.) Tyngden kommer däremot att variera enligt formeln $F = \frac{G_0}{g_0} \cdot g$, där G_0 är normaltyngden, d. v. s. tyngden vid normalacceleration. Olämpligheten av att såsom i det renodlade tekniska systemet fastställa 1 kilogram såsom enhet för kraft är sålunda uppenbar, då den icke endast antagit samma benämning som den fastställda massenheten utan även leder till en massenhet, som till sin storlek icke överensstämmer med den internationellt antagna och som — vid viss tolkning — är variabel med tyngdaccelerationen.

Man har därför sökt att med bibehållande av 1 kg såsom massenhet definiera kraften såsom en tyngd, varvid givetvis kraftenheten icke bör kallas 1 kilogram, en beteckning, som ju redan är tilldelad massenheten, utan bör givas ett annat namn. I Sverige har inom detta modifierade tekniska system använts beteckningen kilogramkraft (kgf), dock med olika innebörd, beroende på om kilogram-

kraften tolkats såsom en lokal enhet eller om den hänförts till normalaccelerationen. Omtolka vi ekvationen $F = \frac{G}{g} a$ till $F = \frac{1}{g} \cdot Ga$ kommer konstanten c att bliva $\frac{1}{g}$ och då G har samma mätetal som massan G, kan man istället införa motsvarande massa m, varvid man erhåller $F = \frac{1}{g} am$. Om man vill ha F i samma dimension som i MKS-systemet, blir g ett dimensionslöst tal och vi få 1 kgf = $= g$ newton. Så tolkad, utan införande av normalaccelerationen, betecknar 1 kgf tyngden av massan 1 kg i lufttomt rum och är endast en lokal enhet, som varierar med g, ca $\frac{1}{2}$ % från ekvatorn till polen. Sålunda är i Stockholm 1 kgf ca 9,8185 newton, i Boden ca 9,8235 newton och i Hälsingborg ca 9,8159 newton. Inom Sverige varierar sålunda en så definierad kraftenhet med ca 0,1 %. I definitionen på kilogramkraften är angivelsen att tyngden skall hänföras till lufttomt rum nödvändig, även om i praktiken luftens upptryck kan försummas. Tyngden i luft av 1 kg med tätheten 8 är nämligen 0,99985 kgf, vilket dock endast gör en skillnad av 0,015 %, och tyngden av 1 kg vatten 0,9988 kgf under förutsättning av normal lufttäthet 0,0012.

En lokal kraftenhet, som varierar med orten, är särskilt olycklig vid beräkningar av energi och effekt. Sålunda blir ju rörelseenergin $\frac{mv^2}{2g}$ kgfm beroende av tyngdaccelerationen och detsamma är förhållandet med effektenheten 1 hästkraft. Man har därför även definierat 1 kgf såsom den kraft, som ger massan 1 kg en acceleration av $g_0 = 9{,}80665$ m/s². I Tyskland har Physikalisch-technische Reichsanstalt år 1939 inom sitt verksamhetsområde infört denna kraftenhet med namnet 1 kilopond (kp). Vi få istället $F = \frac{1}{g_0} \cdot am$, varvid konstanten c satts till $\frac{1}{g_0}$, likaledes dimensionslös. Kraftenheten blir då konstant 9,80665 newton. Detta medför emellertid, att tyngden i lufttomt rum av 1 kg vid accelerationen g icke blir 1 kgf utan $\frac{g}{g_0}$ kgf, exempelvis i Stockholm 1,0012 kgf, där kgf har betydelsen kilopond.

För att icke någon sammanblandning av dessa olika tekniska kraftenheter skall ske, synes i den mån en övergång till MKS-systemets enhet 1 newton av praktiska skäl stöter på svårigheter, 1 kilogram helt böra uteslutas såsom enhet för kraft, 1 kilopond (kp) definieras såsom den kraft, som ger vikten (massan) 1 kilogram en acceleration av $g_0 = 9{,}80665$ m/s² (normalacceleration) och

1 kilogramkraft (kgf) såsom tyngden av vikten (massan) 1 kilogram i lufttomt rum. Detta skulle betyda, att 1 kp = 9,80665 newton och att 1 kgf = g newton.

Genom att tekniken för mekaniska storheter hittills icke accepterat ett absolut måttsystem utan fasthållit vid en kraftenhet, baserad på kombinationen jorden-kilogrammassan, ha svårigheter uppstått, som bli allt tydligare, ju större noggrannhetsfordringarna bli beträffande kraftmätningar. Då intet avseende behövde fästas vid tyngdens variationer, var tyngden av 1 kilogram i lufttomt rum skenbart en konstant enhet och man behövde endast använda ett genomsnittligt värde för accelerationen. De fel, som uppstodo vid tekniska beräkningar, voro utan betydelse i betraktande av andra felkällor. Saken ställer sig emellertid annorlunda, då tyngdkraftens variation måste tagas med i räkningen, och man stod då inför valet att antingen låta kraftenheten vara lokal eller också hänföra den till en viss bestämd normalacceleration. Härvid ha på grund av olika lämplighetsskäl båda systemen kommit till användning. Strängt taget finnas sålunda fyra tekniska system, det renodlade med kraftenheten 1 kg och det modifierade med massenheten 1 kg, båda med tvenne underavdelningar, där kraftenheten kan vara konstant eller lokal. Skall man nu siffermässigt uttrycka en konstant, i vilken kraftenheten ingår, exempelvis brotthållfastheten, är det icke lämpligt att använda en obestämd lokal enhet, utan man bör angiva den ort, där bestämningen utförts. Angives emellertid denna ort, har man övergått från den typiskt lokala kraftenheten och skaffat sig en ny, konstant kraftenhet. På detta sätt kan inom varje land en nationell kraftenhet skapas, en situation, som i viss mån påminner om den, som existerade då man för allmänt bruk hade olika enheter för exempelvis längd, såsom svensk fot, dansk fot, engelsk fot m. m. Det kan icke vara lämpligt att tala om Stockholmskgf, Berlinkgf, Turinkgf el. dyl. utan enheten bör vara entydigt fastställd och internationellt gällande. På basis av det tekniska systemet kommer man då till kiloponden såsom en konstant och på internationell överenskommelse angående normalaccelerationen baserad enhet. Svårigheten med antagande av denna enhet inom hållfasthetstekniken ligger emellertid däri, att den för Sveriges del ger en sämre approximation än kilogramkraften i Stockholm. Man står alltså inför följande problem. Kilogramkraften såsom lokal enhet är i vissa fall bekväm, då reduktion till bestämd normalacceleration icke behöver ske. Inom hållfasthetstekniken synes det icke vara tillräckligt att ange kilogramkraften utan att samtidigt precisera den genom angivande av viss ort och därmed bestämd acceleration. En

normalacceleration är internationellt fastställd men är för avvikande från den i Sverige förekommande accelerationen. Antingen skall då en nationell kraftenhet skapas eller en övergång ske till en internationell kraftenhet, som icke är baserad på tyngden. Tyngdens variation är ett faktum, som man icke kan komma ifrån. Det bör då vara lämpligare att icke införa tyngden i enhetssystemet med allt vad därav följer utan att använda en absolut enhet, som är oberoende av tyngden. Tyngden uttryckt i denna konstanta enhet kommer då att variera på ett lättbegripligt sätt enligt kraftekvationen. Förhållandena synas sålunda tala för införande av en absolut kraftenhet, i vilket fall MKS-enheten 1 newton synes ha den största förutsättningen. Blir denna enhet internationellt fastställd, kan man vid kalkyler, som icke fordra större noggrannhet, räkna med att 1 newton motsvarar tyngden i Sverige av massan $\frac{1}{g}$ kg, där ett för Sverige gällande medelvärde å g kan användas. Införande av en klart fastställd enhet innebär ju icke, att man i varje mekaniskt problem skall nödgas reducera till den ort, där man befinner sig. Om definitionen i exakthet betydligt överträffar de fordringar, som ställas i praktiken, är det ingenting, som hindrar, att lämpliga approximationer företagas i försöksresultaten.

I nuvarande situation kan dock, som förut framhållits, enheten newton icke lämpligen fastställas såsom enhet. Utan ändring i sak mot vad som hittills praktiserats torde emellertid, som utredningen visat, ett förtydligande böra givas för att precisera den inom hållfasthetstekniken använda kraftenheten. Härvid synes emellertid dels enheten böra benämnas kilogramkraft och dels tyngden böra hänföras till lufttomt rum. Vidare synes orten böra angivas till provrummet vid Statens Provningsanstalt, enär accelerationen även i Stockholm varierar, bland annat beroende på höjden över havet. Enligt senast utförda mätningar i geodetiska byråns källare har accelerationen fastställts till 9,818470 m/s², men man borde direkt uppmäta den å Provningsanstalten för att erhålla ett möjligast exakt värde för eventuella omräkningar till annan ort. Ifrågavarande preciseringar innebära icke någon förändring i Provningsanstaltens hittillsvarande undersökningsmetoder eller någon korrektion av uppgivna provningsresultat, men synas dock böra föreslås, då det i viss mån är fråga om en definitionssak. Så länge icke annorlunda officiellt föreskrives synes sålunda i Sverige inom hållfasthetstekniken med kraften 1 kilogramkraft (kgf) böra förstås tyngden i Statens Provningsanstalts provrum av vikten (massan) 1 kilogram i lufttomt rum.

Meddelande från Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning.

1. *Fortbildningskursen i fysik den 2—14 augusti 1943.*

Den osedvanligt stora anslutningen till sommarkursen i fysik år 1942 (se Elementa *25*: 3 sid. 153) visade, att det förefanns ett stort behov av fortbildningskurser i fysik för lärare. Vid ett sammanträde med Folkuniversitetsföreningen hösten 1942, varvid kursarbetet för år 1943 diskuterades, framfördes från såväl Sveriges allmänna folkskollärarförening som från Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning en önskan om upprepning av 1942 års fysikkurs. Resultatet blev också, att en kurs i allmän elektricitetslära kom till stånd den 2—14 augusti 1943 genom samverkan mellan de nu nämnda föreningarna och Kursverksamheten vid Stockholms högskola.

Av de inemot 90 anmälda kursdeltagarna infunno sig endast något mer än 70. Kursen uppdelades liksom föregående år på två sektioner: sektion A för lärare med akademisk examen eller examen från Högre lärarinneseminariet och sektion B för folkskollärare. Deltagarna voro ungefär jämnt fördelade på de två sektionerna. Huvudvikten i kursarbetet var lagd på laborationerna (15 t.). Dessa voro för sektion A förlagda till Stockholms högskolas fysiska institution och leddes av lektor B. Grundström med biträde av fil. lic. V. Adelsköld, och sektion B laborerade på Stockholms hushållstekniska mellanskola under ledning av lektor Eva Ramstedt med biträde av fil. mag. Ingrid Lindstedt. Föreläsningarna (12 dubbelföreläsningar) höllos i regel på Stockholms högskola och voro gemensamma för båda sektionerna. Vidare ingick i det ordinarie arbetsprogrammet fyra studiebesök. Kursen inleddes med en föreläsning av lektor E. Ingelstam över ämnet »Elektricitetsläran i historisk belysning», och närmast därefter följde en serie föreläsningar av lektor B. Grundström över valda delar av elektricitetsläran, belysta med demonstrationsförsök. Övriga föreläsare och föreläsningar voro: ingenjör E. Mårtensson, »Bilens elektriska utrustning»; lektor B. Svensson, »Glimljuslampan och dess användning inom elementär fysikundervisning» och »Radiorören och deras behandling i den elementära fysikundervisningen»; dr G. Siljeholm, »Moderna glödlampor och deras tillverkning» och »Moderna gasurladdningsrör för ljusalstring o. dyl.»; civilingenjör G. Hassel (ett belysningstekniskt ämne); lektor Eva Ram-

STEDT, »De radioaktiva processerna» samt professor E. HULTHÉN, »Materiens omvandlingar». Studiebesök gjordes liksom föregående år vid AB Lumalampan och AB Norstedt & Söner, Skolavdelningen, där teknolog S. LINDHOLM demonstrerade ny fysikmateriel och försök inom elektricitetsläran. Nya för årets kurs voro studiebesöken vid AB Stockholms Spårvägar, där såväl trådbussarnas som spårvagnarnas elektriska utrustning studerades i detalj, och vid Hans Ostermans bilgarage, där den elektriska installationen i en bil demonstrerades. Ytterligare en anmärkningsvärd programpunkt var ny för årets kurs, nämligen en diskussion den sista kursdagen om »Fysikundervisningen i skolan». Diskussionen, som pågick under 1 ½ t., var mycket givande och rörde sig huvudsakligen om anskaffning av litteratur och materiel för laborationer samt om laborationsövningar och laborationsredogörelser.

Av deltagarna särskilt uppskattade kursmoment voro besöken hos AB Stockholms Spårvägar och Lumalampan samt demonstrationen av fysikmateriel hos AB Norstedt & Söner. Det senare gav ju direkt utbyte för det dagliga arbetet, och de två studiebesöken anknöto till aktuella områden av fysikundervisningen. Vid alla dessa studiebesök blevo kursdeltagarna mycket gästfritt mottagna, och demonstrationerna voro synnerligen välordnade och instruktiva.

Utom det ordinarie kursprogrammet besökte ett stort antal kursdeltagare Tekniska muséet och Saltsjöbadens observatorium.

Kostnaderna ha bestritts av deltagarnas kursavgifter (35 kr.) samt av anslag, vardera å 500 kr., från Sveriges allmänna folkskollärarförening och Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning. Vidare hade AB Lumalampan skänkt 250 kr. till stipendier åt kursdeltagarna, och en del föreläsare hade utan ersättning ställt sig till kursens förfogande. I egenskap av kursledare vill undertecknad härmed framföra ett vördsamt tack till alla — föreningar, företag och enskilda — som genom direkta understöd eller på annat sätt möjliggjort kursen. Jag tackar även varmt kursens föreläsare och lärare för all deras osparade möda och det skickliga och intresserade arbete de utfört, och samtliga kursdeltagare för det intresse och nit de visat under det ej så litet ansträngande kursarbetet. Till sist ber jag även att få framföra ett tack till SAF och Kursverksamheten vid Stockholms högskola för gott samarbete.

2. *Besök på utställningen »Den tekniskt-vetenskapliga forskningens hjälpmedel» den 18 september 1943.*

På inbjudan av Ingenjörsvetenskapsakademien besökte Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning den 18

september Ingenjörsvetenskapsakademiens utställning av hjälpmedel för tekniskt-vetenskaplig forskning, anordnad på dess bränsletekniska försöksstation i Stockholm, Drottning Kristinas väg 47.

Utställningen omfattade inredningsdetaljer, ledningssystem och annan fast utrustning samt instrument och apparater av dels kommersiella utställare i olika branscher, dels vetenskapsmän och tekniska forskare. En huvudavdelning omfattade elektriska hjälpmedel, såsom material, även ersättningsmaterial, belysningsanordningar, motorer, transformatorer, likriktare, fläktar, ugnar, värmeapparater och mätinstrument. En annan huvudavdelning omfattade laboratorieutrustningar och kemisk apparatur, både glasapparater och mätinstrument. Särskilt intresse tilldrog sig en del fysikaliska specialinstrument av vetenskapligt slag. I flera fall visades apparaterna i drift.

Kallelsekort till utställningen hade sänts ut till ca 250 av föreningens medlemmar i Stockholm och närbelägna städer, och ca ett hundratal medlemmar begagnade sig av tillfället att se utställningen.

3. *Studiebesök vid AB Stockholms Spårvägar den 19 oktober 1943.*

Det ovan omnämnda studiebesöket vid Stockholms Spårvägar under sommarens fortbildningskurs hade mottagits med stort intresse, och styrelsen hade därför utverkat tillstånd för medlemmarna i Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning att bese bolagets anläggningar vid Hornsberg.

Förste vagningenjör C. Hammarsköld höll först en kort orientering över bussdriften vid Stockholms Spårvägar, och avdelningsingenjör J. Hedström talade om »Trådbussar, deras konstruktion och elektriska utrustning». Ingenjör Hammarsköld var sedan ciceron under en mycket givande rundvandring genom garage och verkstäder. Han gav en livlig skildring av den mångfald tekniska problem och svårigheter, som äro förbundna med bussdriften i kristider och av det krävande arbetet vid busscentralen. Amanuens Hane gav en orientering över bolagets realskolekurser för personalen. Från Hornsberg fraktades deltagarna per bil till huvudstationen vid Tegnérgatan, där verkstadsingenjör F. Karlson höll ett med ljusbilder beledsagat föredrag om spårvagnar och demonstrerade deras elektriska apparatur. Å föreningens vägnar får undertecknad härmed framföra ett varmt tack till AB Stockholms Spårvägar för visat tillmötesgående och en intressant demonstration.

Bror Gustaver.

Elektricitetsläran på gymnasiet.

Av Docent **THOMAS ÖVERGAARD.**

Diskussionsinledning vid Föreningens för matematisk-naturvetenskaplig undervisning årsmöte i Göteborg den 7—8 jan. 1943.[1]

Betraktar man läroböckerna i ellära för gymnasiet, finner man ett karakteristiskt gemensamt drag. De återspegla ellärans tidigare historia.

Karakteristisk är också den skarpa avgränsningen kapitelvis. Varje lag behandlas för sig med experiment, varje lag ger uttryck för ett speciellt skeende. Man får i läroböckerna en samling speciella skeenden, skarpt avgränsade kapitelvis. Elevens behållning av läroboken blir härigenom densamma, som vi förmodligen skulle erhålla, om vi besökte assistenterna till Coulomb, Faraday, Ohm, Ampère, då de gjorde om sina mästares experiment. Vi få intet sammanhängande grepp om elläran som helhet.

Detta är ju rätt naturligt, eftersom sammanfogningen skett successivt under hundra år fram till våra dagar. Författarna ha känt bristen och till kapitlen fogat fotnoter, där förklaringar ges i anslutning till elektronteorien.

Vid studiet av läroböckerna fängslas man ofta av en glänsande framställning, ett utmärkt urval av slående experiment och en typografisk uppställning av text och lagar, som måste vara psykologiskt riktig. Dessa läroböckernas vackra sidor önskar jag ej borttagna.

Enligt vad jag skall söka visa är läroböckernas uppställning sådan, att eleven hindras att få en helhetssyn på elläran. Att helhetssynen saknas genomgående hos studenter, har jag kunnat konstatera under min trettonåriga läraretid vid Chalmers.

Betydelsen av en fast föreställningsvärld, en helhetssyn, är fundamental. Utan den blir det ingen ordning på den skapande fantasien.

Föreställningsvärlden måste ges redan i gymnasiet, därför att på

[1] Ett kort referat av diskussionen lämnas i Elementas marsh. 1943, s. 44.

de tekniska högskolorna och förmodligen även vid universiteten elektricitetsläran genast klädes i kall matematisk form.

Man får formler, som man kan förstå matematiskt, men som endast ett fåtal förmå omskapa till en egen fysikalisk föreställningsvärld. En viss helhetssyn på grundbegreppen måste finnas, för att en differentialekvation skall kunna uppställas på fysikalisk basis.

Det är på tiden, efter hundra år, att läroböckerna först och främst skola ge en elektrisk föreställningsvärld. Den får inte framstå i fragment i fotnoter. Likströmsmotorer, trefasgeneratorer och mycket annat kunde man däremot utan större skada sätta i fotnoterna.

Vill man främja helhetssynen, måste den gå före experimenten. I läroböckerna tycks principiellt den motsatta vägen ha valts. Först göres experimentet, och ur detta skall eleven sedan erhålla sin kunskap. Vad han då får, är blott kunskap om experimentet. Kunskaperna från experimenten sammanbindas icke till en helhetssyn. Att t. ex. elektrostatiken och elektrodynamiken äro barn av samma föräldrar, inser knappast en student.

Denna läroböckernas princip: experimentet först, därur slutledningar och kunskap, är ju inget annat än vetenskapens arbetssätt. Men man undrar, om den passar så bra i läroverket. Det är skillnad på skapande vetenskaplig fantasi i huvuden sådana som Coulomb, Ampère och Faraday och huvuden sådana som Andersson, Petersson och Lundström.

Men vi tycks fortfarande tro, att pojkarna, genom att göra om stormännens försök, hokus pokus också få sin föreställning klar liksom dessa.

Måste individens utveckling upprepa artens även på det andliga området? Måste en yngling nödvändigtvis uppleva samma sökande ut i det okända, som de stora forskarna fått göra?

Helhetssynens förverkligande innebär, så vitt jag kan förstå, att läroböckerna fastställa grunden för det elektriska skeendet, och detta med minsta möjliga antaganden. Skeendet är därefter bestämt av energiprincipen som huvudlag. Övriga lagar med enheter skola framkomma som en naturlig följd ur grundvalarna.

Nödvändigt och naturligt måste härvid enheterna framstå såsom sammanbindningslänkar. Dock har man härvid ingen hjälp av definitionen »1 ohm lika med motståndet hos en viss kvicksilverpelare», då man skall bygga upp sin elektriska föreställningsvärld. Först då man definierar motståndsenheten såsom en länk i händelsekedjan, t. ex. ur Ohms lag, blir den meningsfylld.

De tekniska enheterna, uppbyggda på kvicksilverpelare, utfällt

silver o. s. v. hindra helhetssynen. De kunna få stå i fotnoterna men inte i texten.

I samtliga läroböcker omnämnas kraftlinjer men tyvärr knappast mera än som illustration till magnetiska fält. Kraftlinjebegreppet är dock ett av de bästa verktyg, varmed elläran hopfogas till en helhet.

Vill man beskriva ett osynligt skeende, bör man åskådliggöra de osynliga krafterna. Alltså kraftlinjer. Skola händelser sedan utspelas, kommer man att osökt tänka på film. Jag har svårt att tänka mig ett område, där filmen kan väntas vara så absolut överlägsen, som just för att ge en levande föreställning om ett osynligt förlopp. Den är som skapad för undervisning i ellära. Film för 100 000 kronor, gissningsvis, skulle säkerligen ge eleverna en annan och bättre inlevelse i elläran, utan ökning av timantalet.

För att härvid nå bästa resultat måste läroböckerna genomgående använda kraftlinjer såsom verktyg.

Följer man den nyssnämnda principen för lärogången vid kritiken av läroböckerna, finner man dem labyrintartade.

I en av de vanligaste svenska läroböckerna börjar elläran med slutet på en hel kausalkedja, nämligen med strömmen (1 amp = = 1,118 mg Ag per sek.). Därefter definieras Coulomb = amp. · sek. Nytt brott mot grundregeln. Om man skall definiera en ström, fordras att man först får veta, vad som strömmar.

Härefter införes motståndsenheten (1 ohm = 1,063 m Hg), denna liksom nyssnämnda definition på ampère en i luften fritt hängande enhet. Med dessa enheter som grund fås sedan watt = ohm · amp.^{2} Detta innebär ett liknande brott som ovan. Innan watt omnämnes, måste energien, joule, ha definierats, om villkoret på kausalitet skall uppfyllas. Redan nu är eleven hopplöst snärjd i härvan.

Så definieras volt = watt/amp, vilket medför, att en tänkande elev måste tro, att spänning endast kan förekomma, då energien omvandlas.

Därefter kommer Ohms lag under formen volt = ohm · amp, varvid spänningen framstår såsom en av strömmen och motståndet beroende storhet. Sist definieras arbetet joule = laddning · spänning; arbetet, som ju redan är känt av eleverna såsom mekanisk enhet.

Övriga författare uppvisa likartade utvecklingar av elläran, varför den nu omnämnda läroboken kan stå såsom skolexempel i kritiken.

Varje lärare vet, att en fast ram om ämnet utan en mängd intressanta sidohopp är ett huvudvillkor, för att eleven skall få en fast föreställningsvärld. Flera författare dubbeldefiniera enheter. Sidohoppen komma i form av potential i absoluta enheter, ström-

styrka i elektromagnetiska, laddning och spänning i elektrostatiska. Måste dessa enheter medtagas, vilket jag betvivlar, får det inte vara i form av småstänk. De måste i så fall behandlas parallellt med det tekniska systemet. Man torde emellertid då ha överskridit programmet för gymnasiet.

Av mindre betydelse, men dock anmärkningsvärt, är införandet av sim-, tum- och lillfingerreglerna, då en enda, skruvregeln, täcker samtliga.

I det följande har ett försök gjorts till en grovskiss av elläran, såsom ett uppslag till diskussionen.

Kunskaper förutsättas i statik, något i dynamik samt kännedom om energiprincipen. Dessutom förutsättes ett visst mått av realskolans ellära.

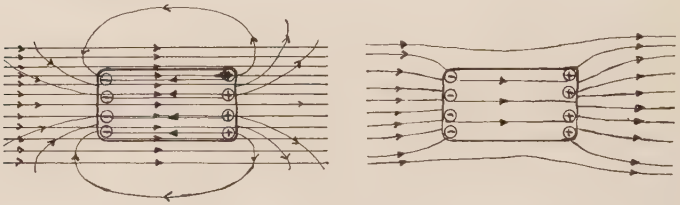


Fig. 1. Oledare. Resultantfält.

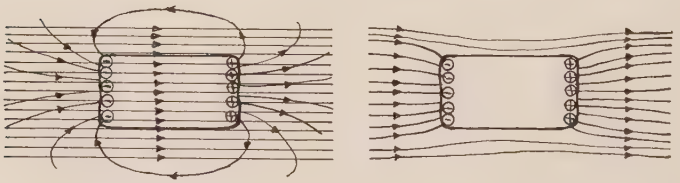


Fig. 2. Metallisk ledare. Resultantfält.

1. Krafters åskådliggörande genom kraftlinjer. Hur källor och virvlar se ut. Sammansättning av fält.
2. Kraftlinjernas mekaniska egenskaper; (populärt: kraftlinjer som spända gummisnodder). Energien i fältet.
3. Eleverna få lära sig att hjälpligt sammansätta fält. För att få en helhetssyn fordras blott några få sådana sammansättningar av principiellt viktiga fältbilder, till vilka man kan gå tillbaka för kontroll, och vilka man känner igen genom hela elläran. De mekaniska verkningarna utläsas ur varje bild. I fältbilden över en elektron i ett påtryckt fält beskrives, huru energien i

fältet vid elektronens förflyttning övergår i rörelseenergi hos elektronen.

4. Grunddragen av populär atomfysik.
5. I ett givet fält inläggas alla möjliga ämnen, varvid man urskiljer de fyra principfallen oledare, metalliska ledare, elektrolyter och ledare i gasform.

   Resultatet i varje principfall fås genom sammansättning av det yttre påtryckta fältet och de elektron- eller jonfält som karakterisera de olika ämnena.

   I oledaren (fig. 1) erhålles fältförsvagning. Dielektricitetskonstanten, dielektriska förluster och genomslag behandlas populärt.

   I metalliska ledaren (fig. 2) fås ström av elektroner. Strömmen kan ej upphöra, förrän fälten inuti ledaren neutraliserat varandra. Ordet strömkälla bör ersättas med ett mindre vilseledande ord. Begreppet influens bör försvinna och ersättas med begreppet elektrisk ström. En mycket tacksam men även delikat uppgift blir att här inarbeta en del av den klassiska läroverkselektrostatiken, så att statik och dynamik bli till en helhet.

   Hittills genomgångna kapitel, närmast utan formler, likna mest populärfysik. De avse att ge eleverna en allmän överblick över elektricitet och materia.
6. Enheter och lagar utvecklas kausalt.
   Givet: enheterna kgf, sekund och meter.
   Härav följer enheten för arbete: 1 joule = 0,102 kgm.
   och » » effekt: 1 watt = 1 joule/sek.
   Som första elektriska enhet införes: 1 coulomb = $6{,}25 \cdot 10^{18}$ elektroner. Elektronladdningen vore ju den naturliga enheten. Det är dock ingen svårighet för eleverna att tänka sig en viss mängd elektroner som enhet.

   En tidigare använd fältbild, en laddning i ett påtryckt fält, utnyttjas på känt sätt vid definitionen av volt = antalet joule per coulomb (fig. 3). Det är enligt min åsikt nödvändigt att definiera volt på ovannämnda sätt, om samsyn skall nås. Ej nog härmed, eleverna måste rent handgripligt leva sig in i detta centrala begrepp. Det karakteriserar ju det elektriska fältet, från vilket skeendet utgår.

   För att få fram en sådan handgriplig föreställning kan man tillgripa liknelser; t. ex. hur man kan mäta gravitationsfält, då man bara har en

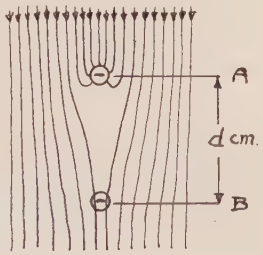


Fig. 3.

sten till förfogande. Man lyfter stenen, varvid arbetet ger upplysning om fältets styrka. För att få riktig relation mellan olika fält måste man ha samma sten och lyfta lika högt vid mätning på andra planeter.

Med begreppet volt väl inarbetat fås utan vidare: arbetet mellan två punkter i joule = V volt · C coulomb.

Arbetet per sekund ger antalet watt = V volt · C coulomb/sek.

Här införes 1 ampère = 1 coulomb/sek., och vi få effekten i watt = V volt · I ampère.

7. Ohmskt motstånd.
Bromsningen av elektroner i en ledning förklaras populärt atomfysiskt, varefter visas, att strömmen I dels blir bestämd av den påtryckta spänningen V, dels av ledningens hindrande egenskap, dess »motstånd» R. Formelmässigt skrives denna relation $I = k \cdot V/R$, varur R definieras såsom V/I, så att $k = 1$. Därefter visas, hur R beror av ledningens form och material.
8. Energiöverföringen fältet → rörelseenergi hos elektronerna → → värmerörelse hos molekylerna behandlas. Joules lag erhålles genom kombination av Ohms lag och watt = volt · amp.

Det kan diskuteras, vilken lag som skall gå först, Ohms eller Joules. Ohms lag torde ha företrädet, eftersom den representerar ett linjärt förlopp, vilket grundlagarna ju helst böra ha.

Joules lag innehåller I^2 och representerar dessutom det sista ledet i energiövergången från fältet via rörelseenergien hos elektronerna till värme, varför den bör stå sist.

9. Satsen om »aktion och reaktion» i en strömkrets.
Denna sats tycks tyvärr vara helt borglömd. Själv har jag icke påträffat den i någon lärobok. Och dock är satsen en mäktig hjälp till helhetssyn. Principen är enkel.

Om energi skall uttagas ur en elektrisk ström, representerad av elektronernas rörelseenergi, måste elektronerna bromsas. Den enda kraft, som kan bromsa elektronerna, måste vara elektrisk, likaväl som den enda kraft, som kan accelerera dem, också är det.

Om i ett område i ledningen elektrisk energi omvandlas till annan energiform (t. ex. värme i motstånd, elektriskt fält i en kondensator, magnetisk energi i en spole, mekanisk energi i en motor eller kemisk energi i en ackumulator) så måste vid energiöverföringen i området förekomma en *EMK*, reaktionsspänningen (E), som bromsar elektronerna, d. v. s. är motriktad den påtryckta spänningen (V). (Fig. 4.)

Spännings-	Bevis: Från V avgiven effekt: $V \cdot I$ watt
källa	Av X mottagen » : $-E \cdot I$ watt
V volt	Energiprincipen ger $VI = -EI$, varav $E = -V$.

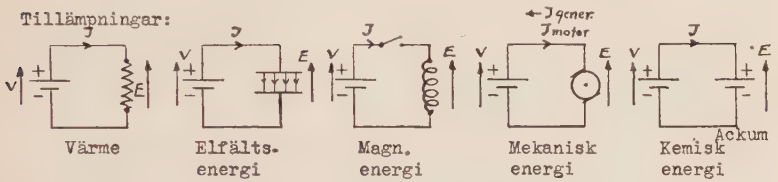


Fig. 4.

Energiprincipen tillämpad på fallet ger nu direkt satsen: »Strömstyrkan ställer in sig så, att påtryckt spänning och reaktionsspänning bli lika stora och rakt motsatta i varje ögonblick.»

I själva verket är det Kirchhoffs andra lag, fast sedd ur energiprincipens synvinkel. Dess räckvidd är långt utöver Kirchhoffs. (En separat artikel om denna sats kommer att införas i ett senare häfte av Elementa.)

Satsen ger oss ett enhetligt grepp på en väsentlig del av hela elektrodynamiken, vilket eleven verkligen har nytta av även sedermera, då han skall penetrera växelströmsförlopp.

Vid vanliga enkla räkningar på grenledningsproblem med ohmska motstånd räknas aldrig med dessa reaktionsspänningar. Genomgående räknas endast med påtryckt spänning och spänningsfall.

En viss oreda kan uppstå, då detta invanda betraktelsesätt skall tillämpas på vidare områden t. ex. vid en transformator. Hur många ha ej vid sådana problem varit villrådiga, om spänningsfallen skola räknas med plus- eller minustecken? Benämningen spänningsfall utgör under vissa omständigheter en farlig fallgrop. Om man i st. talar om »del av påtryckt spänning», undvikes missförstånd.

Hur bortglömd principen om aktion och reaktion är, framgår för övrigt av alla läroböckers, även på det tekniska området, behandling av transformatorn. Man bevisar, att primära och sekundära spänningarna förhålla sig som varvtalen, eftersom det är samma fluxändring genom båda lindningarna (enklaste fallet). Härvid har man emellertid endast bevisat, att inducerade spänningarna förhålla sig som varvtalen. Själva principen i skeendet d. v. s. att strömmarna i lindningarna ställa in sig så, att den inducerade primärspänningen i varje

ögonblick blir lika stor och rakt motsatt den påtryckta primärspänningen, omtalas ej. Man får steril i stället för levande elektroteknik.

Det kan vara motbjudande för mången att tänka sig reaktionsspänningar vid rena ohmska motstånd. Så fort man emellertid vill utvidga motståndsbegreppet att även omfatta induktiva och kapacitiva motstånd, så behövas de redan vid uppställningen av grundformlerna.

10. Efterföljande kapitel i elläran utformas på traditionellt sätt. Ett önskemål vore, att eleverna vid behandlingen av skruvregeln även finge veta, att ett magnetfält bildas inte bara av en elektrisk ström utan även av ett elektriskt fält, som förändras.

Sedan gammalt räknas elläran såsom mänskligheten kanske skönaste logiska naturbeskrivning, vars universella betydelse växer alltfort. Dess tjusande storhet ville jag emellertid att läroböckerna skulle ge något av.

Det är sannerligen ingen lätt uppgift att skriva en sådan ellära. Utan tvivel äro författarna själva långt ifrån nöjda med sina verk. Det skulle inte förvåna mig, om de drömt samma sköna dröm som jag, om en helgjuten lärobok, men under hand fått lov att kompromissa inför synpunkter, som jag inte mött, varvid klokheten bjudit dem att fylla nytt vin på de gamla läglarna.

Mina i föredraget framförda synpunkter äro varken nya eller originella. Så vitt jag vet, är det emellertid första gången de framförts inför ett så auktoritativt forum som här i dag.

Bokanmälningar.

F. Kohlrausch, *Praktische Physik*, Achtzehnte neubearbeitete Aufl. Herausgegeben von F. Henning. Band I, 535 S., Band II, 578 S., B. G. Teubner, Leipzig 1943. Per del kronor 34: 10.

I den nu utkomna, 18:e uppl. har innehållet disponerats på i huvudsak samma sätt som i den näst föregående, av år 1935, vilken till sin uppläggning helt avvek från tidigare upplagor (se anmälan i Elementa, *19*, 44, 1936). De olika kapitlen äro utarbetade av namngivna specialister, med få undantag knutna till Physikalisch-Technische Reichsanstalt.

Forskningens stora framsteg ha nödvändiggjort åtskilliga utvidgningar, särskilt av kapitlen akustik, röntgenstrålar och radioaktivitet. Men även kapitlen spektroskopi, växelströmsmätning, elektronrör och ljuselektrisk effekt ha tillförts mycket nytt material. Två nya kapitel ha tillkommit, om låga temperaturer och om höjdstrålning. Denna utvidgning har medfört en omfångsökning, som nödvändiggjort en fördelning på två band. Det första omfattar: Allgemeines, Mechanik und Akustik, Zustandsgrössen und Wärme, Optik; det andra: Elektrizität und Magnetismus, Korpuskeln und Energiequanten. Utvidgningen och ökade framställningskostnader ha haft till följd en ökning av priset till inemot det dubbla.

För att bereda plats för det nya utan en ännu större omfångsökning har man gjort åtskilliga strykningar, vilka framför allt träffat klassiska metoder och partier av betydelse för den grundläggande fysikundervisningen. På grund av inskränkningarna på dessa områden bör man ej avskriva tidigare upplagor; de ha i många avseenden bestående värde.

Tyngdpunkten i handboken har i och med den nya omarbetningen förskjutits mot det mer avancerade studie- och forskningsarbetet. I särskilt ökad grad har den tekniska fysikens krav tillgodosetts.

Enligt företalet motsvarar innehållet i genomsnitt forskningens ställning sommaren 1940. Vid korrekturet har man emellertid kunnat beakta även senare forskningsresultat.

C. E. Blom.

R. Tambs Lyche, *Lærebok i matematisk analyse.* III 305 s., Gyldendal, Oslo 1941 kr. 24:50 inb. kr. 26:75.

Tambs Lyches lärobok föreligger nu komplett i och med att den tredje delen utkommit. Denna innehåller vanliga differentialekvationer och ekvationssystem, partiella differentialekvationer av första och andra ordningen samt viktiga hjälpmedel, t. ex. fourierserier, som stå i samband därmed. Vidare innehåller boken ett kort kapitel om variationsräkning. Förf. behandlar icke blott de viktigaste metoderna för teoretiska lösningar av dessa ekvationer utan fäster även stort avseende vid numeriska och grafiska lösningar, ett avsnitt av boken, som synes mig särskilt förtjänstfullt och av stor vikt för behandlingen av tekniska problem. Viktiga tekniska tillämpningar äro medtagna, som naturligt är, då intet område inom matematiken står i närmare samband med tekniken än just detta. Det finnes en fruktbärande växelverkan mellan framstegen inom de båda.

Undertecknad har vid anmälan av de båda föregående delarna framhävt de utomordentliga förtjänsterna hos framställningen och den tredje delen ger endast anledning att ytterligare understryka dessa.

Arvid Uhler.

Martin Lien, *Lärobok i mekanik för tekniska läroverk.* Örebro 1943, 186 + II s., rekvireras från författaren, Rudbecksgatan 42 Örebro, kartonnerad 8 kr.

Bokens största värde ligger i de många genomräknade exemplen. Tack vare dessa är den god och användbar även för självstudier. Ämnet för en lärobok i mekanik är i de stora dragen fast och oföränderligt, men i fråga om beteckningar, enheter och användningar behöver den följa med sin tid. Författaren har beaktat detta och även dragit fördel av ändringen i matematikundervisningen. Den teoretiska framställningen har sålunda många förtjänster. Men det finns brister i disponeringen och i många detaljer, som det skulle föra för långt att räkna upp. Endast ett par exempel: Figurerna äro i allmänhet väl gjorda, men på sidan 171 saknar figuren tillräcklig förklaring. Den utnyttjas ej på de följande sidorna, men kunde med fördel ha anknutits till sidan 173 och de där använda beteckningarna. Sid. 105 står, att Vetenskapsakademien i Stockholm har en kopia av den internationella meterprototypen. Men prototypkopiorna flyttades till Mynt- och Justeringsverket 1935. De olika definitionerna på kraft, kilogram och kilopond hade inte blivit längre, om de gjorts exakta. Framställningen hade blivit klar och redig, om förf. använt kilopond som

kraftenhet, lika med 980 665 dyn, och kilogram i dess rätta betydelse som massenhet, om man i nuvarande situation vågar utbyta kraftenheten kg mot kp. För de flesta läsare spela dessa och liknande invändningar icke så stor roll, att bokens användbarhet blir nämnvärt nedsatt.

I jämförelse med andra läroböcker är denna bok abstrakt hållen. Läsaren lär sig exempelvis använda kraftekvationen, men han får ej uppleva dess experimentella härledning. Så uppnår man en viss förenkling men mister samtidigt i levande innehåll. Man lär sig *räkna* med denna bok.

O. H. Faxén.

Martin Lien, *Lärobok i grafostatik för tekniska läroverk*, 94 + II s. Örebro 1943; kartonnerad 5 kr.

Innehåll: Sammansättning av krafter i planet, uppdelning av krafter, jämviktsvillkor vid krafter i planet, krafters statiska moment, tyngdpunkt för plana linjer och ytor, 1:a och 2:a grads moment för ytor, transversalkraft- och momentdiagram, elastiska linjen, plana fackverk. Talrika belysande exempel försedda med illustrationer, som kunna tjäna som förebild för de studerande.

Framställningen är enkel och redig och i allmänhet försedd med goda bevis. Läroboken lämpar sig även för självstudier.

O. H. Faxén.

Gustav Tegengren, *Lärobok i plan trigonometri (längre kurs).* Söderström & C:o, Helsingfors 1940. 116 s.

I vissa avseenden avviker denna bok från det hos oss vanliga framställningssättet. Därvid tänker jag endast delvis på att dess omfattning är något större, i det att den exempelvis medtager de cyklometriska funktionerna, de olika koordinatsystemen på himlavalvet (med astronomiska räkneuppgifter) och slutligen exponentialfunktionen såsom periodisk funktion och dennas samband med sinus och cosinus. Viktigare äro däremot följande särdrag, vilka göra boken värd att uppmärksammas: Förf. har velat fästa på papperet en hel del av det, som vi endast (sträva efter att) innöta muntligen. Sålunda utgör ett kapitel en handledning i användandet av räknetabeller; tabellernas uppställning samt interpolation och frågan om noggrannheten därvid behandlas och belyses med exempel. Det är säkert ett värdefullt kapitel. På alla områden löser förf. typexempel; man fäster sig därvid ofta vid de praktiska råden rörande utförandet. Vidare äro additionsteoremen samt reduktionerna av uttrycken $\sin(\alpha + n \cdot 90°)$ osv. utförligt behandlade (var-

om redan bokens omslag bär vittne). Ur skolsynpunkt mera diskutabla äro förf:s definitioner vid vinklar av godtycklig storlek; användningen av vektorer synes mig mindre bekväm än den hos oss brukliga metoden med koordinaterna för punkter på enhetscirkeln. Trigonometriska ekvationer ha fått en i jämförelse med andra gebit påfallande knapp behandling. Intresseväckande äro slutligen de i noter meddelade ordförklaringarna och historiska notiserna.

Stig Comét.

T. Hagren, *Övningsexempel i matematik för realskolor, kommunala mellanskolor och motsvarande läroanstalter.* Svenska bokförlaget (Norstedt) Stockholm 1943, 80 s., kr. 2: 10.

Exempelsamlingen innehåller 720 problem på de tre sista årens kurs. Uppgifter på rena ekvationer, ekvationssystem och algebra saknas.

Då det knappast är någon brist på goda exempelsamlingar, avsedda för samma kurs, väntar man sig av en nyutkommen bok, att den åtminstone för konkurrensens skull skall vara omsorgsfullt utarbetad. Det är svårt att ge denna bok ett sådant vitsord. Av de ca 80 uppgifter, som jag räknat igenom, ha inte mindre än 14 st. felaktiga svar, nämligen ex. 128, 226, 275, 277, 339, 459, 460, 555, 569, 570, 571, 584, 608 och 705. Några av dessa fel bero väl på bristande noggrannhet vid korrekturläsningen, de övriga synas vara direkta räknefel. Även andra svar uppvisa bristande noggrannhet. Det tjänar inte mycket till att som i ex. 547 beräkna vinkelmåttet av en radian så noggrant som på 1″, då man räknar med $\pi = 3{,}14$. De ofta tidsödande och besvärliga räkningarna med π kan man ju på ett behagligt sätt undgå, om man använder räknetabellerna. För övrigt är det bäst, för att inte säga nödvändigt, att i svaret till sådana uppgifter, som leda till irrationella värden, först ange det exakta värdet och sedan ett approximativt; förf. har som regel endast det sista.

Vad problemen beträffar, finns det ju åtskilligt att välja på, både lättare och svårare. Ex. 659, som ger ett ekvationssystem av andra graden, är kanske i svåraste laget. Ex. 301 handlar om en 40 % koksaltlösning och ex. 303 om en 75 % sodalösning. Ingen av »lösningarna» går att framställa. I ex. 229 vill förf., att en person, som köper aktier, också skall betala upplupen ränta på dessa aktier. En sådan affär vill nog ingen inlåta sig på. Uttrycken konens kant (sid. 56) och sidokant (ex. 593) i st. f. generatris liksom beteckningen $2{,}8 \cdot 2{,}5 \cdot 1{,}2$ m i st. f. m^3 måste också anses vara mindre lyckade.

Verner Carlson.

C. E. Granqvist, *Ljudabsorbering, ljudisolering och akustikförbättring.* Karlholms Aktiebolag, Stockholm, 1942, 114 s., kr. 6:50.

Den svenska akustiska litteraturen är kvantitativt sett synnerligen anspråkslös. En del översiktsartiklar i olika tidskrifter, Ansgar Roths briljanta översättning av James Jeans »Science and Music» samt Kreuger och Sagers originalarbeten, publicerade i IVA:s handlingar, utgöra egentligen allt. Detta förhållande är beklagligt, ty under de båda senaste decennierna har akustiken varit föremål för en forcerad, allsidig utveckling, som avspeglat sig i betydelsefulla såväl vetenskapliga som tekniska och rent praktiska framsteg.

I sitt arbete, »Ljudabsorbering, ljudisolering och akustikförbättring», har Civ.ing. Granqvist gjort ett mycket erkännansvärt försök att beträffande en akustisk disciplin häva den nuvarande bristen på akustisk litteratur. Bokens titel framhäver tydligt, vilken disciplin det gäller. Det kan tilläggas, att arbetets huvudsyfte närmast är att klarlägga det välkända problemet »offentliga lokalers akustik». I samband härmed ger emellertid författaren en grundlig orientering över ljudets natur, över hörseln och över en del akustiska mätmetoder, instrument och apparater. Härigenom blir den del av arbetet, som behandlar lokalers akustik tillgänglig även för den, som icke har fackkunskaper, samtidigt som boken i sin helhet får ökat värde som en allmän orientering i akustiska frågor. Tyvärr företer emellertid bokens allmänna kapitel tecken på att ha tillkommit i för stor hast. En viss brist på klarhet tyder bl. a. härpå. I kapitlet »Öra och hörsel» blandas sålunda begreppen decibel och phon ihop på sätt, som tyvärr ofta sker i amerikansk litteratur, och man saknar här också en närmare orientering över sambandet mellan uppfattad och fysikalisk ljudstyrka.

De kapitel, som behandla lokalers akustik, äro i stället grundligt genomarbetade och behandlade med otvetydig sakkunskap. De anvisningar och råd, författaren här ger, äro av stort praktiskt värde.

I sin helhet är framställningen i boken starkt koncentrerad. Härtill bidraga de talrika och väl valda diagrammen.

Ing. Granqvists bok är utan tvekan värd en varm rekommendation.

Ernst Fredlund.

Daedalus, Tekniska Museets årsbok 1943. 126 sid.

Årets Daedalus innehåller några uppsatser av allmänt kulturhistoriskt intresse utöver det tekniskt-historiska. G. Collberg, som i »En svensk telefon i varje hem» redogör för telefonens tidigaste utveckling i Sverige, reproducerar ett introduktionsbrev, som

Edison egenhändigt skrivit åt en svensk telegrafinspektör 1885. Edison har skrivit med en stil, som är mycket tydlig och lättläst, en stil, som kanske kommer att bli modern igen. F. Neumeyer reproducerar C. A. Ehrensvärds ballongteckningar från 1780-talet och kommenterar dem och andra bilder i samma genre på ett intresseväckande sätt. Helmer Bäckström berättar om fotografikonstens första framträdande i Sverige. Vid de fysiska institutionerna i Lund och Uppsala finnas originalkameror, som signerats av Daguerre. L. Way-Matthiesen redogör för några historiska aluminiumföremål, som hamnat på Tekniska Museet, bl. a. en tesked och en urkedja från den tid, då priset på metallen låg någonstans mellan priset på guld och på silver. Aluminium användes i början till bijouteriarbeten liksom alltjämt platina. Bland de kortare meddelanden, som finnes i varje årgång, notera vi detta år en notis om ett läskpapper från 1752, som finnes i Slottsarkivet, och en utredning om verkmästaretitelns ursprung, som är krigiskt och går tillbaka till 1300-talet.

J. Tandberg.

Gradualavhandlingar.[1]

Nils Schrewelius, *Studier över antimonat, hydroxoantimonat och fluoantimonat.* Stockholm 1943, 144 s. Disp. vid Stockholms Högskola $^{22}/_{5}$ 1943. Opponenter: docent L. G. Sillén och fil. lic. H. Arnfelt.

Den del av den oorganiska kemien, som omfattar antimonoxider, antimonsyror och antimonat, har varit föremål för många undersökningar. Tämligen få olika kemiska föreningar ha beskrivits, men å andra sidan ha några av dessa blivit utförligt behandlade av många forskare. Söker man bilda sig en uppfattning om antimonatens kemi genom att studera resultaten av dessa föregående undersökningar, mötes man ofta av motsägelsefulla uppgifter. Det syntes förf. av denna anledning vara av intresse att taga upp antimonatens kemi till förnyad behandling, och att därvid låta röntgenkristallografiska metoder komma till användning.

Då en undersökning av alla typer av antimonat skulle varit alltför omfattande, har förf. avsett att studera endast sådana föreningar, som innehålla envärd metall, femvärd antimon samt syre, vatten eller (och) fluor. Vid den närmare undersökningen av vissa talliumantimonat visade det sig emellertid, att antimon förelåg i både trevärd och femvärd form samt tallium i både

[1] När ej annorlunda anges, är referatet av vederbörande förf:s egen hand.

envärd och trevärd form. Då ett flertal sådana föreningar undersökts, ha de beskrivits i avhandlingens del II, trots att de icke falla inom den planerade arbetsuppgiftens ram; del I omfattar föreningar med antimon i endast femvärd form.

I *avdelning 1* beskrivas de fällningar, som uppkomma, då antimonatlösningar försättas med syror. Dessa fällningars sammansättning varierar med försöksbetingelserna vid utfällningen och kan skrivas $K_{\varphi}H_{(1-\varphi)}SbO_3 \cdot \Psi H_2O$, där $0 \leqq \varphi \leqq$ ca $^2/_3$, och Ψ beror på torkningssättet. Förf. har påpekat, att fällningarna troligen äro uppbyggda så, att »jättejonen» $(SbO_3^-)\infty$ bildar ett oändligt, tredimensionellt, oktaedriskt nätverk, och att K^+- och H_3O^+-joner inlagras i vissa av detta nätverks håligheter. Ju högre kaliumantimonatkoncentration och ju lägre vätejonkoncentration (egentl. hydroniumjonkonc.) vid utfällningen, desto större del av de inlagrade katjonerna utgöras av K^+. Att φ icke kan uppnå högre värde än ca $^2/_3$ anser förf. bero på, att koncentrationsförhållandet [kaliumantimonat]/[H_3O^+] icke kan ökas över ett visst gränsvärde, som bl. a. beror av antimonatets ringa löslighet i vatten. Den produkt, där φ uppnått detta gränsvärde $^2/_3$, har beskrivits av många tidigare forskare som ett »surt trebasiskt antimonat» med formeln $K_2HSb_3O_9$.

Samtliga produkter med $\varphi > 0$ äro kolloida, medan de med $\varphi = 0$ kunna vara kristalliserade. De senares kristallbyggnad visar, att ett oktaedriskt nätverk verkligen är förhanden, vari dock en del av syreatomerna ersatts med OH. Sammansättningen av denna förening (ett antimonpentoxidhydrat) är således SbO_2OH.

I *avdelning 2* redogöres för de enda föreningar mellan envärd metall, femvärd antimon och syre, som förf. kunnat framställa. Dessa ha sammansättningen $M^{I}Sb^{V}O_3$. Framställningsmetoder och kristallbyggnad ha meddelats för α- och β-$NaSbO_3$, β-$KSbO_3$ (två faser kända förut), $AgSbO_3$, $LiSbO_3$ och $TlSbO_3$. Föreningarna β-$NaSbO_3$, β-$KSbO_3$ och $AgSbO_3$ äro byggda på samma sätt som SbO_2OH med den skillnaden, att alkalijonerna utfylla håligheterna i (SbO_3^-)-nätet, medan de senare äro tomma i pentoxidhydratet.

I *avdelning 3* beskrivas framställningsmetoder och kristallbyggnad för ett antal föreningar med sammansättningen $M^{I}Sb^{V}F_x(OH)_{6-x}$. Förträdesvis föreningar med $x = 0$ (M = Li, Na, Ag) och $x = 6$ (M = Na, K, NH_4, Rb, Cs, Tl) ha studerats, men några Na- och K-salter med $0 < x < 6$ ha även undersökts.

Förf. har sökt bestämma de sex jämviktskonstanterna för den successiva substitutionen av OH^--joner mot F^--joner i $Sb(OH)_6^-$ genom att mäta vätejonkoncentrationen potentiometriskt vid konstant jonstyrka i lösningar, innehållande kända mängder

kaliumantimonat, kaliumfluorid, salpetersyra och kaliumnitrat. De teoretiska förutsättningarna för en sådan undersökning ha dock varit mindre gynnsamma, varför försöksresultaten måste anses osäkra.

I *avdelning 4* ha potentiometriska och konduktometriska titrerförsök utförts med lösningar av antimonat i syfte att studera »antimonsyrans» natur. På grund av antimonatjonernas tendens att i sur lösning bilda »jättejoner» med kolloida egenskaper, ha mätningarna försvårats i hög grad. De vunna resultaten ha diskuterats ingående.

Del II omfattar antimonat, vari antimon föreligger i både trevärd och femvärd form. I *avdelning 5* redogöres för en grupp av sådana föreningar, som äro isomorfa med mineralet *pyroklor*. Förf. har visat, hur sammansättningen för olika föreningar varierar, genom att två grupper av likvärda lägen i kristallgittret kunna utfyllas av ett växlande antal olika atomer. Det ena punktläget kan innehålla mellan noll och 16 metalljoner med en ungefärlig jonradie av 1,0 Å (t. ex. Na^+, K^+, Tl^{3+}, Sb^{3+}). Det andra punktläget kan vara tomt, innehålla 8 anjoner (F^-, OH^-, O^{2-}) eller, vilket är mycket märkligt, innehålla upp till ca 5 Tl^+. *Pyroklor*-antimonaten innehålla dessutom 16 Sb^{5+} och 48 O^{2-} per elementarcell.

I *avdelning 6* beskrivas tre isomorfa föreningar med rombisk byggnad och sammansättningen $M^{I}_{6}Sb^{III}(Sb^{V}O_3)_9$, där M är K, Rb eller Tl. *Avdelning 7*, slutligen, omfattar beskrivningen av en enkelt kubisk substans (*perowskit*-typ) med sammansättningen $Tl^{I}_{5}Tl^{III}_{2}Sb^{III}_{2}Sb^{V}_{5}O_6(OH)_{30}$.

Bror Wideland; *Ausgleichung des astronomisch-geodätischen Dreiecknetzes Signilskär—Omberg.* Disp. i Uppsala 26 maj 1943. Opponenter: Professor I. Bonsdorff, Helsingfors, och stadsingenjör L. Rosenbaum, Stockholm.

Avhandlingen består av två delar, dels en utjämning av de svenska astronomisk-geodetiska triangelmätningarna mellan Signilskär i åländska skärgården och Omberg vid Vättern, dels en topografisk och topografisk-isostatisk reduktion av de inom detta område befintliga laplace'ska punkterna.

Baltiska-geodetiska kommissionen är f. n. sysselsatt med en stor utjämning av det astronomiskt-geodetiska materialet runt Östersjön den s. k. Östersjöringen. Denna utjämning tillgår på det sättet, att alla kring Östersjön belägna stater var för sig utföra utjämningar av sina astronomiskt-geodetiska mätningar. Varje stats triangelnät eller triangelkedjor ersättas därvidlag av en eller flera geodetiska linjer. Den stora östersjöpolygon, som på detta

sätt erhålles, skall sedermera underkastas en slutlig utjämning, varvid såsom element skola ingå dessa geodetiska linjer jämte deras anslutningsvinklar med resp. vikter. Det svenska triangule-ringsmaterialet har därvid uppdelats på två geodetiska linjer Signilskär—Omberg och Omberg—Högkull (vid Mölle). Det är den del av det svenska materialet, vilken bildar underlag för geodetiska linjen Signilskär—Omberg, som i föreliggande avhandling behandlats. Det resultat, som i avhandlingens första del avsetts och erhållits, utgöres emellertid icke av dessa för den baltiska utjämningen erforderliga data (vilka dock beräknats samtidigt och ur samma material) utan av de s. k. *lodavvikelserna*, vilka erhållas genom jämförelse emellan de astronomiska koordinaterna (B', L' och A') och de motsvarande geodetiska koordinaterna (B, L och A) vilka med utgång från Signilskärs geodetiska koordinater beräknats ur det utjämnade trianguleringsmaterialet. I utjämningen har förutom de sedvanliga geometriska villkoren även medtagits de laplace'ska villkoren. Utjämningen har utförts på den internationella referensellipsoiden och omfattar 85 villkorsekvationer nämligen 68 avseende vinkelsummorna i trianglar, 3 sidoekvationer, 4 basanslutningsekvationer, 7 laplace'ska ekvationer och 3 polygonekvationer. Beräkningen av de geodetiska koordinaterna har utförts enligt den sfäroidiska medelbreddsformeln. Som utgångskoordinater hava använts de vid den finska utjämningen erhållna koordinatvärdena för Signilskär. Lodavvikelserna äro hänförda till det s. k. andra finska lodavvikelsesystemet.

Då de astronomiska koordinaterna erhållas genom bestämningar i förhållande till geoiden, under det att de geodetiska koordinaterna beräknas i förhållande till den antagna referensellipsoiden, erbjuda lodavvikelserna, vilka uttryckas genom de bekanta formlerna

$$\xi = B' - B$$
$$\eta_L = (L' - L) \cdot \cos B$$
$$\eta_A = (A' - A) \cdot \cot B,$$

— varvid som slutgiltigt värde på η tages det (eventuellt viktade) medelvärdet av η_L och η_A — material för bestämning av den referensellipsoid, som bäst ansluter sig till geoidens form inom ett ifrågavarande trianguleringsområde.

I den form, vari lodavvikelserna på detta sätt erhållas, äro de dock ej utan vidare lämpliga som material för en dylik undersökning, enär geoidens lokala undulationer spela in vid bestämningen av de astronomiska data. Denna inverkan söker man förminska genom den topografisk-isostatiska reduktionen. Vid den

enbart topografiska reduktionen beräknar man med ledning av å kartor befintliga höjddata volymen av den avvikelse, som den fysiska jordytan företer i förhållande till geoiden. Reduktionen i avseende på ξ för en viss triangelpunkt erhålles sedan därigenom att man subtraherar den norr om det ostvästliga vertikalsnittet genom punkten befintliga volymsdelen från den söder om samma snitt befintliga. Reduktionen i avseende på η får man på liknande sätt genom att taga skillnaden emellan volymsdelarna väster och öster om det nord-sydliga vertikalsnittet genom punkten. Den enbart topografiska reduktionen har redan för länge sedan konstaterats vara missvisande. Den giver ofta värden, som äro avsevärt större än de observerade lodavvikelserna. Man har därför föranletts att antaga, att de synliga massorna mellan geoiden och den fysiska jordytan äro kompenserade genom massanomalier under jordytan, så att vid ett visst djup, det s. k. kompensationsdjupet, hydrostatisk jämvikt är rådande. Den med hänsyn tagen till dessa förhållanden härledda s. k. topografisk-isostatiska reduktionen lämnar användbara resultat. Undersökningar av detta slag hava gjorts av Bonsdorff, Helmert, Hayford, Niethammer, Heiskanen o. a. Särskilt har Hayford praktiskt utfört dylika reduktioner i stor skala beträffande U. S. A:s trianguleringar.[1]

En dylik reduktion av det föreliggande svenska materialet, utförd huvudsakligen enligt den Hayfordska metoden, innehålles i avhandlingens andra del. Som kartmaterial har därvid använts dels kartor i skala 1 : 5000 (speciellt förfärdigade för ändamålet efter i terrängen utförda mätningar) dels topografiska kartor i skalorna 1 : 50 000, 1 : 100 000, 1 : 500 000, 1 : 1 000 000, 1 : 6 000 000, 1 : 12 000 000 och 1 : 20 000 000. Volymberäkningen för varje triangelpunkt har utförts över ett område av ca 200 mils radie.

Som slutresultat av avhandlingens båda delar erhållas för de i undersökningen ingående laplace'ska punkterna de reducerade lodavvikelserna $\xi - \triangle \xi$ och $\eta - \triangle \eta$, vilka data alltså, när liknande undersökningar utförts för övriga delar av landet, komma att som del av det på så sätt utökade materialet utgöra element för beräkningen av det för landet lämpligaste lodavvikelsesystemet och därefter för undersökning av den för landet bäst avpassade geoidens form och storlek.

Avhandlingen avslutas med en undersökning rörande felen i den utförda topografisk-isostatiska reduktionen.

[1] J. Hayford: The Figure of the Earth and Isostasy from Measurements in the United States (1909),
— —: Supplementary Investigation in 1909 of the Figure of the Earth and Isostasy (1910).

Tidskrifter.

Populär astronomisk tidskrift, 1943: 2—4.

Ur innehållet: J. M. Ramberg, Nicolaus Copernicus; R. Schöldström, Kniveggsprovet och dess tillämpning vid tillverkning av teleskopspeglar; R. Schöldström, Ett amatörtillverkat spegelteleskop; J. M. Ramberg, Årets början och månadernas namn; G. Wernberg, Den selektiva rymdabsorptionen i vår närmaste omgivning; C. Schalén, Om några avlägsna stjärnor i Cygnus. Notiser: bl. a. »Hur försilvras en spegel?»

Svensk kemisk tidskrift, 1943: 8—10.

Ur innehållet: K. H. Gustavson, Donnan Equilibria and Molecular Effects in Protein Systems; K. Freudenberg, Die Grundzüge der Ligninchemie; H. Willstaedt, Über p-Sulfonamido-phenylhydrazin; L.-G. Sillén, Über die Zerfallsgesetze beim Abbau hochpolymerer Ketten och Über Berechnungen am Abbau hochpolymerer Ketten; J. Lagerqvist och G. Sandström, Isolerolja som biprodukt vid sulfatcellulosatillverkningen; L. Enebo, Om termofil cellulosajäsning; O. Lamm, On an Electrical Method of Measuring the Diffusion of Salts; S. Wideqvist, Über die Hydrolyse der Rhodanessigsäure in eigensaurer Lösung; L.-G. Sillén und K. Myrbäck, Über die Aufbau von Zweigmolekülen.

IVA, 1943: 1—5.

Ur innehållet: Skeppsteknikens forskningsproblem; Rumsklimatiska mätningar; Luftfuktighetens diffusion genom små öppningar; Enheten för kraft inom hållfasthetstekniken; Elementaranalys och värmevärde; Förutsättningarna för kvantitativ spektralanalys; Tillämpning av optisk spektralanalys inom geokemin; Spektralanalys inom metallindustrin; Röntgenspektralanalys; Det nutida tekniska forskningsarbetet i Finland; Om den tekniskt-vetenskapliga utvecklingen; Behovet av och principer för kemisk mikroanalys inom fysiologi och medicin; Litteraturforskningens hjälpmedel och metodik.

Ljuskultur, 1943: 3.

Ur innehållet: Absorptionsspektrografin och dess tillämpning på kemiska problem; Belysning av fotografiska mörkrum; Det trikromatiska färgsystemet.

ERA, 1943: 8—10.

Ur innehållet: Tryckluft, förmedlingslänk mellan elmotor och arbetsstycke; Elektroindustriföreningen 25 år; Under rubriken »Eldrift i laboratoriet» lämnas i nr 9 en utförlig skildring av IVA:s och Feras utställning av den tekniskt-vetenskapliga forskningens hjälpmedel; Eldrift ombord.

Teknik för alla, 1943: 36—47.

Ur innehållet: Polisen lär er inbrottstjuvarnas teknik; Torr-is; Höjdflygarna sovras; Fotocellen; Jonas Wenström; Tekniken gör historia; IVA:s nya försöksstation; Moderna bergbanor; Glasögon; Spektrallin-

jerna som standard för metermått; Vitamin-fiskare; Är Mars bebodd?; Om flygmotorbuller; Tål människan störtflygning?; Smalfilmning; Värmebehandling av kolstål och snabbstål. Under rubiken »Händigt folk»: Mikroprojektion; Skioptikonbilder kunna ses i dagsljus; Hur man gör ett episkop; En-rörs radiomottagare; Kortvågsradio; Enkel punktsvetsningsanordning; Handslipmaskin.

Populär radio, 1943: 8—10.

Ur innehållet: Känsligheten hos mikrofoner; Skärmgalleravkoppling; Impedansmätning; Felsökning på radioapparater; Nikola Tesla; Rörvoltmeter; Mottagarens ljudkvalitet.

Nordisk Astronomisk Tidsskrift, København 1943: 3.

Ur innehållet: B. STRÖMGREN, Nyere Undersøgelser over eruptive Solplet-Protuberanser og kromosfæriske Eruptioner; E. STRÖMGREN, Fortegnelse over Kometer, der er blevet iakttaget i mere en een Apparition; E. STRÖMGREN, Jens Olsens astronomiske Kunstur; S. KIERULFF, Privatastronomers Deltagelse i astronomisk Observationsarbejde; R. F. RASMUSSEN, Et hjemmelavet Maanekamera.

Fysisk Tidsskrift, København 1943: 4—5.

Ur innehållet: V. LAURSEN, Om løste og uløste Problemer indenfor Jordmagnetismen; M. PIHL, Termodynamikkens grundlag; E. ARNSTED, Bemærkninger til en Metode til Bestemmelse af Hudens Varmeudstraalingsevne; M. NIELSEN, Om Straalingsmaaling; K. A. WINGÅRDH och J. BERG, Ett nytt planetarium för skolbruk; R. E. H. RASMUSSEN, En Bemærkning om det fysiske Penduls Svingningstid og om Reversionspendulet.

Naturens Verden, København 1943: 6—8.

Ur innehållet: B. STRÖMGREN, Atomer, Ioner og Molekyler i det interstellare Rum; H. PETERSEN, Lufthavet og Meteorologien; E. SADOLIN, Stadier paa Kemiens Vej; E. STRÖMGREN, Observatoriet ved det finske Universitet i Åbo; P. H. JESPERSEN, Om Biologi og Filosofi.

Norsk Matematisk Tidsskrift, Oslo 1943: 3.

Ur innehållet: O. M. THALBERG, Norsk Matematisk Forening gjennom 25 år; TH. SKOLEM, En sammenhang mellom kongruensen $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 \equiv$ (mod. m) og likningen $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = m$. Eksamensoppgaver; Løste oppgaver.

Norsk populær-astronomisk tidsskrift, Oslo 1943: 3.

Ur innehållet: L. HARANG, Natthimmellyset; K. H. STORHUOG, Litt om kometer; P. M. MILLMAN, Er det vegetation på Mars?; L. OWREN, Schmidt-kameraet, framtidens instrument; J. V. GARWICK, Optikk for amatører.

Naturen, Bergen 1943: 7—10.

Ur innehållet: E. BJØRKDAL, Substratosfæren; H. TAMBS-LYCHE, Biologien i gymnasiet; C. L. GODSKE, Minimumtemperaturer i Bergens omegn; H. SÆTREN, »Levende molekyler»; V. ASCHEHOUG, Bakteorologiske problemer i hermatikkindustrien.

Problemavdelning.[1]

Matematiska uppgifter.

1302) *I triangeln ABC är H höjdernas skärningspunkt. Vid rätvinklig projiciering av figuren i ett rätvinkligt koordinatplan erhålles resp. A_1 (1; 0), B_1 (0; 5), C_1 (— 4; — 5) och H_1 (0; 0). Beräkna vinkeln mellan xy-planet och planet ABC.* X.

1303) *Kurvan $y = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$ förutsättes ha två reella inflexionspunkter A och B. Den har då en reell dubbeltangent och en med denna parallell enkel tangent. Visa, att AB delar avståndet mellan dessa tangenter i förhållandet 4 : 5.* X.

1304) *Avståndet mellan ett föremål P och ett öga Q är konstant. Var mellan P och Q skall man placera en tunn positiv lins ($f \geqq PQ$) för att se bilden av P under så stor vinkel som möjligt? Det förutsättes, att ögats ackommodationsförmåga tillåter tydlig uppfattning av bilden vid alla ifrågakommande placeringar av linsen.* X.

Enklare matematiska uppgifter.[2]

1305) Lös systemet $\left.\begin{aligned} x^2y &= 6x - y \\ xy^2 &= 3x + 2y \end{aligned}\right\}$.

Svar:

x	0	± 1	$\pm \sqrt{5}$
y	0	± 3	$\pm \sqrt{5}$

1306) En cirkel tangerar den ena kateten *AB* av en rätvinklig triangel *ABC* i dess mittpunkt och skär den andra i *D* och *E* i tre lika delar. En av cirkelns skärningspunkter med hypotenusan är *P*. Beräkna tg *DPE* : tg *ACB*.

Svar: $\frac{3}{8}$.

1307) I triangeln *ABC* är $h_a = 4r$. Beräkna $\cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} - \cot\frac{A}{2}$.

Svar: 0.

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. BÅGMAN, till vilken uppgifter och lösningar kunna insändas under adress: Högre allm. läroverket å Östermalm, Stockholm.

[2] Uppg. 1305 är insänd av *S. B.*; upp. 1306 av *Anders Larson*, 1307—1311, 1314—1315 av *X.*, 1312—1313 av *L. F.*

1308) För en triangels sidor och vinklar gäller $b - c = \frac{a}{2}$ och $B - C = \frac{A}{2}$. Visa, att $\cos 2B = 1 - \sqrt{3}$.

1309) I en geometrisk serie är $s_{n+2} - 2s_{n+1} + s_n = 2t_n$. Beräkna kvoten.

Svar: 2 eller -1.

1310) Om $\cos 2\alpha$, $\cos 2\beta$, $\cos 2\gamma$ bilda aritmetisk serie, så gäller detsamma om $\frac{\sin\alpha}{\sin(\beta+\gamma)}$, $\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\gamma)}$, $\frac{\sin\gamma}{\sin(\alpha+\beta)}$.

1311) I ett tresidigt hörn äro sidovinklarna $AOB = 90°$, $BOC = 120°$, $AOC = 144°$. Beräkna vinkeln mellan kanten OA och bissektrisen till $\angle BOC$ samt vinkeln mellan OB och bissektrisen till $\angle AOC$.

Svar: 144°.

1312) Det hyperbelsegment parametern avskär roterar kring symmetrilinjen. Den alstrade kroppen har samma volym som en sfär med transversalaxeln som diameter. Beräkna excentriciteten.

Svar: $\sqrt{3}$.

1313) En hyperbelgren och en parabel ha samma avstånd mellan vertex och fokus. De segment parametrarna avskära rotera kring segmentens symmetrilinjer. Förhållandet mellan de uppkomna volymerna är 2. Beräkna hyperbelns excentricitet.

Svar: 2.

1314) Från punkten P fällas normalerna PA, PB och PC mot koordinataxlarna och mot linjen $y = x$. Sök orten för P, om ytan av triangeln ABC är en ytenhet.

Svar: Cirkeln $x^2 + y^2 = 4$.

1315) Om det i en ellips finnes en fokalkorda, vars längd = halva storaxeln, så tillhöra kordans ändpunkter var sin av två konjugatdiametrar. För vilka värden på excentriciteten finnas sådana kordor?

Svar: $e \geqq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Lösn. till uppg. 1274—1276.

1274) *Visa, att summan av cotangenterna för en triangels vinklar alltid är positiv och beräkna det minsta värde summan kan ha i någon triangel.* *X.*

1. $\Sigma \cot A = \frac{1}{2}\Sigma(\cot A + \cot B) = \frac{1}{2}\sum \frac{\sin(A+B)}{\sin A \sin B} =$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\Sigma \sin^2 A}{\sin A \sin B \sin C} > 0.$$

2. I varje triangel är $\cot A = -\cot(B+C) = -\frac{\cot B \cot C - 1}{\cot B + \cot C}$,

d. v. s. $\Sigma \cot A \cot B = 1$. Emedan vidare $(\Sigma \cot A)^2 = \frac{1}{2}\{\Sigma(\cot A - \cot B)^2 + 6\Sigma \cot A \cot B\} = 3 + \frac{1}{2}\Sigma(\cot A - \cot B)^2$ inses, att $(\Sigma \cot A)^2_{\min} = 3$ (i liksidiga trianglar) och (enl. 1), att $(\Sigma \cot A)_{\min} = \sqrt{3}$. *X.*

Även löst av *E. Smn.*

1275) *En regelbunden polyeder har N kantlinjer med längden a. Samtliga kantlinjer projicieras ortogonalt i ett plan. Beräkna summan av projektionernas kvadrater.* *X.*

Genom en punkt O drages $OP_1 = OP_2 =$ kantlinjen $= a$ åt rakt motsatta håll parallella med kantlinjen p; på samma sätt OQ_1 och OQ_2 motsvarande kantlinjen q o. s. v. Det gäller att beräkna halva summan av kvadraterna på avstånden från P_1, P_2, Q_1, Q_2, ... till en godtycklig axel l genom O. Nu finnes alltid (mer än) två stycken axlar (s) i polyedern, så beskaffade att en vridning av 72°, 90° eller 120° kring s överför polyedern i sig själv. Då måste även punktsystemet P_1, P_2 ... kunna överföras i sig självt vid motsvarande rotation kring den med s parallella linjen genom O. Därav följer, att tröghetsellipsoiden för punktsystemet P_1, P_2 ... är en sfär. Systemet är icke med nödvändighet reguljärt. Läggas linjer genom O vinkelrätt mot l och mot varandra, blir kvadratsumman på avstånden från P_1, P_2 ... densamma för alla tre. Alltså är $\Sigma(x^2+y^2) = \Sigma(y^2+z^2) = \Sigma(z^2+x^2) = \frac{2}{3}\Sigma(x^2+y^2+z^2) = \frac{2}{3} \cdot 2Na^2$.

Den sökta summan är alltså $\frac{2Na^2}{3}$. *X.*

1276) *Vilka kurvor beskriver skuggan av spetsen på en vertikal stång (gnomon) vid olika latituder och soldeklinationer?*

Erik Nilsson.

Vi antaga, att polhöjden är p, solens deklination d, stångens lodräta höjd h och inskränka oss till norra halvklotet: $0° \leqq p \leqq 90°$. A är stångens spets och H det horisontalplan, på vilket skuggan iakttages. Den räta linjen genom A och himmelspolen skär H i B under vinkeln p, om $p \neq 0°$. För $p = 0°$ är linjen parallell med H. Normalplanet mot AB i A skär H längs linjen l, då $p \neq 90°$; för

$p = 90°$ är planet parallellt med H. Linjen genom solen och A beskriver för $d \neq 0°$ och $90°$ en rotationskon K med axeln AB och toppvinkeln $2\,(90 - |d|)$; för $d = 0$ beskrives det nyssnämnda normalplanet mot AB i A. Den sökta orten är nu (frånsett $d = 0°$, då linjen l erhålles) skärningen (ev. del därav) mellan konen K och H, alltså ett kägelsnitt. Se F. Carlson, Geometri I § 107 och Elementa, årg. 1, sid. 3. Snittets form bestämmes av excentriciteten $e = \frac{\cos p}{\sin |d|}$. Är snittet en hyperbel, genomlöper skuggspetsen naturligtvis endast den gren, som motsvarar solens dagbåge. Den andra grenens tur kommer ett halvår senare. Ortkurvans parameter (= *halva* mot axeln vinkelräta fokalkordan, Carlson sid. 274) är $h \cot |d|$. (Parametern har samma längd som krökningsradien i vertex och för denna ger Meusniers sats direkt angivet värde.)

Diskussion: 1) Om $p = 90°$, är orten en cirkel, som för $d = 0°$ jämte l försvinner till ∞. Den minsta erhålles för $d_{max} = 23°27'$.

2) $0° < p < 90°$.

a) Om $90° < p + d$ (orter mellan polen och polcirkeln), är orten en ellips.

b) Om $90° = p + d$ (» » » » polcirkeln inklusive), är orten en parabel.

c) Om $90 > p + d$ (» » ekvatorn och polcirkeln), är orten (»daggrenen» av) en hyperbel, som för $d = 0°$ urartar till linjen l.

3) Om $p = 0°$, försvinner B till ∞ och orten är en hyperbel med konjugataxeln $= 2h$ liggande på l. Vinkeln mellan asymptoterna är = konens K toppvinkel.

Anm. Normalplanet mot AB i A skär samtliga till givet p hörande koner K längs samma imaginära generatriser (tillsammans utgörande den punktcirkel, som snittet i var och en utgör). Konerna ha gemensamma tangentplan längs dessa generatriser, ty dessa plan gå av symmetriskäl genom den gemensamma axeln AB. Om nu H (d. v. s. l) skär generatriserna i P och Q, inses, att *alla ortkurvor för givet p tangera varandra samt BP och BQ i P och Q*. Nedprojicieras knippet för $p \neq 0°$ ortogonalt i planet APQ, erhållas *kägelsnitt med en brännpunkt i A och l som tillhörande styrlinje*. Omvänt kan man genom förstoring av ordinatorna mot l för ett sådant kägelsnitt i skalan $\frac{1}{\sin p} : 1$ återfå den ursprungliga ortkurvan. För $p = 0°$ fungerar icke denna projektion. Då äro BP och BQ (B i ∞) tangenterna i orthyperblernas imaginära toppar P och Q samt den imaginära axeln lika för alla, vilket redan konstaterats. *X.*

Studentexamen och fyllnadsprövning efter studentexamen.

November 1943.

Matematiska uppgifter för latinlinjen.

1. Två punkter, A och B, på 800 m avstånd skola förenas medelst en cirkelbåge med 500 m radie. För att bestämma några punkter på cirkelbågen delar man sträckan AB i fyra lika delar, varefter man uppritar normaler mot AB genom delningspunkterna och utdrager dem, tills de skära den kortare av cirkelbågarna AB. Beräkna längden av dessa normaler.
2. En sida i en triangel delas av bissektrisen till den motstående vinkeln i delar, som äro 2 cm och 3 cm. Den vid den förra delen liggande vinkeln i triangeln är 60°. Beräkna bissektrisens längd.
3. Lös ekvationssystemet
$$\begin{cases} x + y = xy, \\ x^2 - y^2 = 2xy\,(xy - 4). \end{cases}$$
4. En cirkel tangerar en cirkelsektors båge och delar var och en av radierna till bågens ändpunkter i tre lika stora delar. Beräkna cirkelsektorns medelpunktsvinkel.
5. En person får låna en viss penningsumma vid början av år 1943 mot att han betalar antingen 225 kr vid slutet av vart och ett av åren 1943, 1944, ... 1952 eller 459 kr vid slutet av vartannat år, nämligen åren 1944, 1946, ... 1952. De båda betalningssätten äro likvärdiga. Efter vilken räntefot beräknas årlig ränta på ränta?
6. I ett parallelltrapets $ABCD$ äro AD och BC parallella och AB, BC och CD lika långa. Om B och C förenas med mittpunkten E på AD, uppstår en likbent triangel, i vilken vinkeln vid spetsen E är 80°. Beräkna trapetsets vinklar.
7. I en triangel ABC är $AB = 13$ cm, $BC = 14$ cm och $AC = 15$ cm. En cirkel genom A och B skär AC i X och BC i Y. Ytan av fyrhörningen $ABYX$ är 70,56 cm². Hur långa äro de obekanta sidorna i denna fyrhörning?
8. Upprita kurvorna $y = x^2 - 2x + 4$ och $y = 2x^2 - 5x + 4$ i samma diagram, i vilket som längdenhet på vardera axeln väljes 1 cm. Kurvorna skära varandra i punkterna A och B. En rät linje L är parallell med y-axeln och skär kurvorna i punkterna P och Q. Angiv det algebraiska uttrycket för längden av sträckan PQ, och bestäm medelst grafisk metod i ett särskilt diagram sträckans största värde, då L rör sig parallellt med y-axeln och inom området mellan A och B.

Resultat: **1.** En är 200 m och de båda andra $100\sqrt{21} - 300 = 158{,}3$ m. **2.** $\sqrt{36 - \sqrt{864}} = 2{,}57$ cm. **3.** $x_1 = y_1 = 0$; $x_2 = y_2 = 2$; $x_3 = 4$ och $y_3 = 1\frac{1}{3}$. **4.** 70°,2. **5.** 4 %. **6.** $A = D = 36°{,}58$; $B = C = 143°{,}42$. **7.** $AX = 9{,}4$ cm; $XY = 5{,}2$ cm; $YB = 8$ cm. **8.** $PQ = 3x - x^2$; $PQ_{\max} = 2\frac{1}{4}$ cm.

Matematiska uppgifter för realgymnasiet.

Allmän kurs.

1. Två aritmetiska serier, 80, 78, 76, ... och 3, 7, 11, ..., äro givna. Av den senare serien skola tagas dubbelt så många termer som av den förra. Hur många termer av den förra serien kan man högst taga, om dennas summa skall vara större än den senares?
2. I en likbent triangel bildar medianen till en av de lika stora sidorna en vinkel av 80° med denna sida. Beräkna triangelns vinklar i det ena av de båda fall, som äro möjliga.
3. En rät linje, vinkelrät mot linjen $y + 3x = 0$, är normal till kurvan $y = 9x - x^3$ i en punkt P_1 och skär kurvan i ytterligare två punkter, P_2 och P_3. Beräkna längden av sträckan P_2P_3.
4. Visa, att en triangel är rätvinklig, om radien i en av de vidskrivna cirklarna är lika med summan av radien i den inskrivna cirkeln och radierna i de båda andra vidskrivna cirklarna.
5. En stipendiefond på 20 000 kr är placerad i 4 % obligationer. Räntan, som utbetalas halvårsvis den 30 april och den 31 oktober, insättes omedelbart på sparkasseräkning mot $2\,{}^1/_2$ % ränta, vilken kapitaliseras vid varje års slut. Från sparkasseräkningen uttages varje år den 15 december en summa av 600 kr till stipendier. Första obligationsräntan erhölls och insattes den 30 april 1941. Första uttagningen till stipendier gjordes den 15 december 1941. Till vilket belopp har fonden vuxit vid årsskiftet 1950—51? Den icke utfallna räntan på obligationerna för tiden ${}^1/_{11}$—${}^{31}/_{12}$ 1950 medräknas icke.
6. En regelbunden tetraeders kantlinje är 30 cm. En sfär tangerar en sidoyta och de tre kantlinjer, som icke ligga i denna sidoyta. Beräkna sfärens radie samt höjden i de sfäriska segment, som ligga utanför tetraedern.
7. Visa, att man kan bestämma sådana värden på konstanterna a, b och c, att likheten $(1 + \cos x)(1 + \sin x) = (a + b\cos x + c\sin x)^2$ gäller för alla värden på x.
8. Upprita kurvan $4y = x^4 - 4x^3$ i dess huvuddrag. Bestäm ekvationen för den tangent till kurvan, som tangerar densamma i tvenne punkter.

Resultat: **1.** 8 termer. **2.** 50°,50; 64°,75; 64°,75 eller 70°,50; 54°,75; 54°,75. **3.** $\frac{2\sqrt{510}}{9} = 5{,}02$ enh. **5.** 22 327 kr; ($^{31}/_{12}$ 1941 är behållningen på sparkasseräkningen 207,71 kr). **6.** Radien $= 5\ (\sqrt{18} - \sqrt{6}) = 8{,}97$ cm; höjden $= 10\ (\sqrt{8} - \sqrt{6}) = 3{,}79$ cm. **7.** $a = b = c = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. **8.** $2x + y + 1 = 0$. Om tangentens ekv. är $y = kx + l$, skall ekv. $4(kx + l) = x^4 - 4x^3$ eller $x^4 - 4x^3 - 4kx - 4l = 0$ vara av formen $(x - a)^2(x - b)^2 = 0$, d. v. s. vänstra ledet är en jämn kvadrat. Genom rotutdragning eller enl. metoden med obestämda koeff. erhålles $(x^2 - 2x - 2)^2 = 0$, varav $k = -2$ och $l = -1$.

Matematiska uppgifter för realgymnasiet.

Specialkurs.

1. Från en punkt P på x-axeln kan man draga tangenter antingen till ellipsen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{p^2} = 1$ eller till hyperbeln $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{q^2} = 1$. Sammanbindningslinjen mellan tangeringspunkterna skär x-axeln i punkten Q. Visa, att den för de båda kurvorna gemensamma axeln i båda fallen delas harmoniskt av P och Q.
2. Av en given sfär utskäres en sfärisk sektor, och i denna inskrives en sfär. Denna tangerar sektorns koniska yta utefter en cirkel. Hur stor del av sektorns koniska yta utgör den av densamma genom cirkeln avskurna koniska mantelytan, då denna är så stor som möjligt?
3. Mellan variablerna x och y gäller sambandet $x = \sin\frac{y}{2} + \cos\frac{y}{2}$. Härled för $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ ett uttryck, som innehåller endast variabeln x.
4. Till parabeln $y^2 = 4ax$ drages en tangent. Tangeringspunkten sammanbindes med punkten $(2a; 0)$. Sök och konstruera orten för skärningspunkten mellan denna sammanbindningslinje och normalen mot tangenten från parabelns brännpunkt.
5. En ellips och en hyperbel ha samma brännpunkter. Bevisa, att kurvorna skära varandra under räta vinklar.
6. En rät linje tangerar en ellips i en punkt A och skär axlarnas förlängningar i B och C. Från den ena brännpunkten F drages en rät linje genom A till en punkt D, så att sträckan FD blir lika med ellipsens storaxel. Bevisa, att punkterna B, D, C och F ligga på en cirkel.
7. Upprita kurvan $y = \frac{2 - x^3}{x}$ med bestämmande av eventuella asymptoter, maxima och minima samt inflexionspunkter. Genom

en punkt P på kurvan kan man, utöver tangenten i P, i vissa fall draga ytterligare tangenter till kurvan. Utred fullständigt, hur antalet tangenter varierar, då P genomlöper kurvan. Visa speciellt, att antalet tangenter är två för endast ett läge av P.

Resultat: **2.** $\sqrt{2}-1$. **3.** $\frac{4}{2-x^2}$. **4.** $y^2=2a\,(x-a)$. **5.** Drag brännpunktsradierna till skärningspunkten och använd tangenternas kända geometriska egenskap. **6.** Låt B ligga på storaxelns, C på lillaxelns förlängning; F_1 är den andra brännpunkten. Enl. ellipstangentens kända egenskap delas $\sphericalangle DAF_1$ mitt itu av BC, och emedan $AD=AF_1$ är då BC mittpunktsnormal till DF_1; $\because \sphericalangle CDB=\sphericalangle CF_1B=\sphericalangle CFF_1$, vilken är supplementvinkel till $\sphericalangle CFB$, vilket innebär, att en cirkel kan läggas genom B, D, C och F. **7.** Asymptot är $x=0$; max. i $(-1;\,-3)$ och inflex. i $(\sqrt[3]{2};\,0)$. Abskissorna för skärningspunkterna mellan en linje $y=kx+l$ genom P och kurvan erhållas ur ekv. $kx+l=\frac{2-x^3}{x}$ eller $x^3+kx^2+lx-2=0$. Är linjen tangent i T, skola två rötter vara x_T och en x_P. Ur sambandet mellan rötter och koeff. fås $x_T^2\cdot x_P=2$, varav $x_T=\pm\sqrt{\frac{2}{x_P}}$. Härav framgår, att man genom P — *utöver* tangenten i P — ej kan draga någon tangent, om $x_P<0$, men *två*, om $x_P>0$; för $x_P=\sqrt{\frac{2}{x_P}}$, dvs. $x_P=\sqrt[3]{2}$ (inflexionspunkten) erhålles endast *en* ($x_T=-x_P$). Sammanfattning: *en* tangent, om $x_P<0$ och *tre*, om $x_P>0$ samt *två* genom inflexionspunkten.

Uppgifter i fysik.

Obs. Lösningarna till uppgifterna 1, 2 och 4—7 böra åtföljas av enkla figurer. — Erforderliga konstanter, vilka ej äro uppgivna i problemens text, hämtas ur formelsamlingen.

1. En dörr är upphängd på två lodrätt över varandra placerade gångjärn och befinner sig i jämvikt. Avståndet mellan gångjärnen är 120 cm. Dörren väger 60 kg, och dess tyngdpunkt ligger 40 cm från sammanbindningslinjen mellan gångjärnen. Den kraft, som verkar på det undre gångjärnet, är horisontell och riktad från dörren mot gångjärnet. Angiv till storlek och riktning den totala kraft, som verkar på det övre gångjärnet.
2. En lutande ränna är i sin nedre del omböjd, så att den bildar en vertikal ögla med radien r cm. Om en liten vagn rullar utför rännan, kommer den mot slutet av banan in på öglans insida, och om dess hastighet är tillräckligt stor, kan den passera

öglans högsta punkt utan att falla ner (»looping the loop»). Hur högt över horisontalplanet genom öglans medelpunkt ligger den lägsta punkt, från vilken vagnen måste starta för att kunna passera öglans högsta punkt utan att falla? Starthastigheten antages vara noll. Hjulens massa kan försummas i förhållande till vagnens, likaså vagnens dimensioner i förhållande till öglans radie. Friktionen och luftmotståndet lämnas utan avseende.

3. I en kalorimeter, innehållande 200 g rent vatten, är nedsänkt en metalltrådsspiral med 3,00 Ω motstånd jämte omrörare och termometer. Rumstemperaturen är 18,5°. Man mäter den tid, som åtgår, för att en ström, vars styrka hålles vid konstant 0,800 A, skall i spiralen utveckla en värmemängd, som höjer temperaturen i kalorimetern från 17,50° till 19,50°. Denna tid är 920 sek. Försöket upprepas med 200 g toluol i stället för vatten i kalorimetern. Vid oförändrad strömstyrka åtgår 405 sek för höjning av temperaturen från 17,50° till 19,50°. Beräkna toluols spec. värme. 1 W = 0,239 cal/sek.
4. En 5,6 m lång spiralfjäder är vertikalt utspänd mellan en fast punkt i taket och en anordning nere vid golvet, bestående av en liten cylinder, som lätt glider längs en vågrät stång. Cylinderns rörelse regleras av en vevstake, vars andra ända är ansluten till en excenterskiva, anbragt på axeln till en motor. Då motorn roterar, tvingas cylindern att göra en snabb svängningsrörelse längs stången. I spiralfjädern uppstår då en transversell svängningsrörelse, som reflekteras vid den fasta övre ändpunkten. Vid ett visst varvtal hos motorn uppkommer fjäderns grundsvängning med en nod i vardera ändpunkten, och då varvtalet ökas, framkomma successivt de olika översvängningarna. Fjärde översvängningen är skarpt utbildad, när motorn gör 500 varv på 32 sek. Bestäm, med vilken hastighet vågrörelsen utbreder sig längs spiralfjädern. Inverkan av fjäderns tyngd lämnas utan avseende.
5. Två likadana flintglasprismer hava vinklarna 90°, 61,33° och 28,67°. Den största sidoytan av det ena prismat fuktas med en vätska, varefter de båda prismerna sammanfogas till en rätvinklig parallellepiped. Mot en av kortsidorna får därefter en monokromatisk stråle infalla i huvudsnittet. Om strålen träffar sidan vinkelrätt, totalreflekteras den mot vätskeskiktet, men om man vrider dubbelprismat 11,27° åt ena hållet kring en mot huvudsnittet vinkelrät axel, uppnås brytningsgränsen. Glasets brytningsexponent för den använda ljussorten är 1,761. Beräkna vätskans brytningsexponent.
6. En amatörastronom önskar använda sin kamera för att foto-

grafera månen. Omedelbart intill objektivlinsen, vars brännvidd är 8,0 cm, fastskruvar han en positiv försättslins med brännvidden 4,0 cm. Vidare anbringar han runt fattningen till objektivet ett rör, utanpå vilket ett annat något vidare rör kan förskjutas, så att det så erhållna dubbelrörets längd kan ändras. I dubbelrörets yttre ända insätter han slutligen en positiv lins. Alla tre linserna skola ha samma optiska huvudaxel, vilken vid fotograferingen skall vara riktad mot månen, och kamerans bälg skall vara utdragen, så att avståndet från objektivet till filmen uppgår till 15 cm. Hur stor brännvidd bör den tredje linsen ha, för att månbilden på filmen skall få 3,0 cm diameter? Måndiameterns synvinkel på himlavalvet är 32′. Linserna kunna betraktas som tunna.

7. Man ville bestämma ett visst motstånd *BC* med voltampèremetoden. Motståndet inkopplades för den skull i en strömbana i serie med en ampèremeter *CD*, varefter en voltmeter inkopplades parallellt, så att den mätte spänningen mellan *B* och *D*. På ampèremetern avlästes då 1,04 A och på voltmetern 7,62 V. Försöket upprepades, men denna gång kopplades voltmetern mellan *B* och *C*. På ampèremetern avlästes nu 1,06 A och på voltmetern 7,50 V. Divideras spänningen med strömstyrkan, erhålles i förra fallet 7,33 Ω och i senare fallet 7,08 Ω. Skillnaden förmodas bero på att ampèremeterns motstånd inte kan antagas vara noll och voltmeterns inte oändligt stort; man anser sig däremot kunna utesluta andra felkällor. Nu vet man, att ampèremeterns motstånd är högst 0,10 Ω och voltmeterns minst 250 Ω. Det är därigenom möjligt att innesluta det sökta ohmtalet inom rätt snäva gränser. Angiv det minsta och det största värde på moståndet, som är förenligt med de lämnade uppgifterna.
8. När en induktionsspole anslutes till ett likströmsnät, blir effektförbrukningen i spolen 338 W, om spänningen mellan dess ändpunkter är 130 V. När spolen anslutes till en 50-periodig, rent sinusformad växelspänning, blir effektförbrukningen 130 W, om effektiva spänningen mellan spolens ändpunkter är 130 V. Beräkna för sistnämnda fall spänningen mellan spolens ändpunkter i ett ögonblick, då strömstyrkan är noll.

Resultat: **1**. Den kraft, varmed dörren påverkar det övre gångjärnet, är riktad inåt dörren. Dess »depressionsvinkel» är 71°,6 och storlek = 63,2 kgf. **2**. $1{,}5\,r$ cm. **3**. 0,409. **4**. 35 m/sek. **5**. 1,442, **6**. 69,7 cm. **7**. 7,23 och 7,29 Ω resp. **8**. $130\sqrt{2}\sin\varphi = 144$ V. där $\cos\varphi = 1 : \sqrt{2{,}6}$.

Realexamen H. T. 1943.

Provräkning.

1. Lös ekvationen
$$\frac{14}{35-10x} - \frac{3+x}{7x-2x^2} - \frac{3}{4x} = 0.$$
2. En handlande köpte ett parti skjortor på 1 000 st för 7 800 kr. Han räknar med att dussinvis kunna sälja 75 dussin med 10 % rabatt, medan de övriga skulle säljas styckevis utan rabatt. Om han beräknar $16\frac{2}{3}$ % vinst på affären, vilket försäljningspris pr st bör han fastställa?
3. En firma använder för transport två lastbilar, försedda med vedaggregat. Den ena bilen förbrukar i genomsnitt 1 hl ved på 4 mil och den andra 1 hl på 5 mil. Den förra kör dagligen två turer på vardera 90 km, den senare tre turer på vardera 45 km. Utöver den för körturerna erforderliga veden åtgår det dagligen i medeltal 0,05 hl ved till vardera bilen för att starta den. Hur många dagar räcker under dessa förutsättningar ett förråd av bilved på 36,5 m^3?
4. En person tog ut 15 500 kr ur bank för att på följande sätt placera dem i obligationer. Han köpte 8 st $4\frac{1}{2}$ % obligationer à 500 kr till 110 % kurs och för återstoden av de uttagna pengarna $3\frac{1}{2}$ % obligationer till 92,5 % kurs. Efter vilken räntefot kan han beräknas få ränta på sina ur banken uttagna pengar?
5. I fyrhörningen *ABCD* äro vinklarna *A* och *B* räta. Punkten *E* delar sidan *AB*, så att $AE = 3{,}60$ dm och $EB = 1{,}44$ dm. Sidan *BC* är 1,92 dm. Om linjerna *CE* och *DE* dragas, blir vinkeln *CED* rät. Beräkna fyrhörningens övriga sidor.
6. En rät cylinder och en rät kon ha lika stor höjd, 7 cm. Kropparna ha därjämte lika stor bottenyta, och dennas radie är så vald, att cylinderns och konens mantelytor äro lika stora. Beräkna konens volym. $\pi = 3\frac{1}{7}$.
7. En romb med en vinkel på 120° är omskriven kring en cirkel med 6 cm radie. Närliggande tangeringspunkter sammanbindas medelst kordor. Visa, att den därigenom uppkomna fyrsidingen är en rektangel, och beräkna, hur stor del denna rektangel utgör av romben.
8. Förenkla så långt som möjligt skillnaden mellan bråken
$$\frac{18a^2 + 9ab - 2b^2}{18a^2 + 24ab + 8b^2} \text{ och } \frac{4{,}5b}{9a + 6b}.$$
Beräkna därefter skillnadens exakta värde och slutligen dess närmevärde, om $a = \sqrt{2}$ och $b = \sqrt{3}$.

Resultat: **1.** $x = 2{,}5$. **2.** 10 kr. per st. **3.** 50 dagar. **4.** $3\frac{87}{91}$ %. **5.** $AD = 2{,}70$ dm, $CD = 5{,}10$ dm. **6.** 1078 cm³. **7.** $\frac{3}{8}$. **8.** $\frac{3a - 2b}{3a + 2b} = 5 - \sqrt{24} = 0{,}101$.

Uppgifter i fysik för tekniska linjen.

1. En bägare, vars bottenyta är 75 cm² och höjd utvändigt 14 cm, tryckes ned i kvicksilver med bottnen före, tills bägarens övre kant kommer i jämnhöjd med kvicksilvrets fria yta. Hur stor kraft behöves för att hålla bägaren nere? Den kan anses vara cylindrisk och planbottnad, och dess tyngd lämnas ur räkningen. Kvicksilvrets specifika vikt är 13,6.
2. Ett skyddsrum skall under fredsförhållanden användas som garage och förses därför med en elektrisk hiss, med vilken bilarna skola transporteras ned och upp. Skyddsrummets golv ligger 8 m under gatans plan. Hissmaskineriets verkningsgrad är 40 %, och motvikten till hisskorgen väger 500 kg mera än hisskorgen själv. Hur mycket energi förbrukas, när en bil, som väger 1800 kg, lyftes upp från skyddsrummets golv till gatans plan?
3. En statyett står på en liten hylla, som består av en rektangulär träskiva, på vars undersida två vinkeljärn äro anbragta. Dessa äro i sin tur fastskruvade vid väggen, vartdera med en enda skruv, 17 cm ovanför vinkeljärnets nedre kant. Statyetten väger 5,1 kg, dess tyngdpunkt ligger 9,4 cm från väggen. Hyllan väger 0,9 kg (inklusive vinkeljärnen), och dess tyngdpunkt ligger 6,8 cm från väggen. Beräkna med vilken kraft en av skruvarna drages utåt. Belastningen antages jämnt fördelad på skruvarna. Väggen antages vara glatt.
4. I en massiv cementcylinder med längden 36 cm och diametern 10 cm är en gjutjärnskula med diametern 6,0 cm inbäddad, så att cementet sluter tätt till omkring kulan. Tyngdpunkten för cylindern med den inbäddade kulan ligger 17 cm från ena basytan. Huru långt från samma basyta ligger kulans tyngdpunkt? Specifika vikten för gjutjärn är 7,3 och för cement 2,0.
5. I en cykelpump har kolven en slaglängd av 26 cm, och i sitt nedersta läge går den praktiskt taget ned till bottnen, där en nippel direkt är påsatt på cykelslangens ventil. Då man börjar pumpningen av ringen, är lufttrycket både inom och utom ringen 1 atmosfär. Vid första kolvslaget öppnar sig ventilen omedelbart vid det nedåtgående kolvslagets början. Allteftersom trycket i ringen stiger, måste kolven skjutas längre in, för att

ventilen skall öppna sig. Hur många centimeter skall kolven inskjutas, för att ventilen skall öppna sig, då övertrycket i ringen stigit till 1,6 atmosfärer? Man pumpar inte så hastigt, att temperaturen nämnvärt ändras.

6. Man ville undersöka verkningsgraden hos en elektrisk destillationsapparat, som vid 220 V drar 3,6 A. För den skull fylldes apparaten till en del med vatten, vilket uppvärmdes till kokning. Sedan kokningen kommit i gång, kokade 168 g vatten bort under loppet av 10 min. Beräkna härav destillationsapparatens verkningsgrad. Vattnets ångbildningsvärme är 540. 1 wattsekund = 0,24 cal.
7. En tunn metalltråd genomflytes av en elektrisk ström, som man långsamt låter öka i styrka. Mellan trådens ändar är en voltmeter med stort motstånd inkopplad och i serie med tråden en ampèremeter. Man observerar, att tråden börjar lysa, när strömstyrkan är 0,10 A och spänningen 0,40 V. Strax innan tråden smälter av, lyser den med sin största glans; strömstyrkan är då 0,36 A och spänningen 3,0 V. Hur många gånger mer energi i form av värme och ljus avgiver tråden per tidsenhet vid den högre temperaturen än vid den lägre?
8. En skolpojke ville bestämma motståndet i en metalltråd med voltampèremetoden. Voltmeterns motstånd var 896 ohm, ampèremeterns var obekant. Han kopplade ampèremetern i serie med tråden, under det att voltmetern anslöts till trådens ändar. Utslagen blevo då 8,16 A och 4,48 V. Sedan flyttade han voltmeterns ena tilledningstråd från ampèremeterns ena klämskruv till den andra, varigenom både tråden och ampèremetern blevo kopplade parallellt med voltmetern. Utslagen blevo då 8,15 A och 5,30 V. Beräkna motståndet i tråden och i ampèremetern och angiv, vilken av de båda kopplingarna, som är att föredraga, om man vill bestämma ett litet motstånd, då man endast vet, att voltmeterns motstånd uppgår till några hundra ohm och ampèremeterns till en eller annan tiondels ohm.

Resultat: 1. 14,3 kgf. 2. 26 tonmeter. 3. 1,59 kgf. 4. 7,6 cm 5. 16 cm. 6. 79,5 %. 7. 27 ggr. 8. Trådens motstånd är 0,549 Ω och amp. meterns 0,101 Ω; den förra kopplingen är att föredraga.

Uppgifter i beskrivande maskin- och byggnadslära för tekniska linjen.

1. Hur stort är trycket mellan backarna och arbetsstycket i ett maskinskruvstycke, om kraften i spindelns vev är 15 kgf? Vev-

radien är 180 mm. Gängans stigning är 6 mm och verkningsgraden 41 %.

2. En snäckväxel med tredubbelgängad skruv har en utväxling av 1 : 30. Skruvhjulets delningsdiameter = 400 mm. Beräkna skruvens stigning.
3. En 4-cylindrig enkelverkande 4-taktsmotor med 88 mm cylinderdiameter och 92 mm slaglängd går med 1 500 varv/min. Det indikerade medeltrycket är 9,2 kgf/cm². Beräkna maskinens indikerade effekt.
4. Den ena ändan av en I-balk NP 25 överför direkt på en tegelmur ett tryck av 2 200 kgf. Hur långt bör balken instickas i muren, om tillåten tryckpåkänning på murverket är 7 kgf/cm²?
5. Ett tvåskärigt nitförband skall överföra en kraft på 18 tonf. Om nitdiametern är 20 mm och den tillåtna skjuvspänningen 600 kgf/cm², bestäm erforderligt antal nitar på vardera sidan om skarven.
6. En transmissionsaxel skall överföra 20 hk. Den drives från en elektrisk motor medelst en enkel remutväxling. Motorn går med 1 500 varv/min, och dess remskiva har en diameter av 150 mm. Transmissionsaxelns remskiva har 750 mm diameter. Tillåten vridningspåkänning = 120 kgf/cm². Beräkna transmissionsaxelns diameter.
7. I en horisontell furubjälke är en snedsträva inhuggen med en vertikal tapp av 8 cm tjocklek och 10 cm djup. Tapphålet är inhugget 30 cm från bjälkens ände. Hur stort får strävans tryck i horisontell riktning högst vara, om skjuvhållfastheten i fibrernas riktning är 50 kgf/cm²? 10-faldig säkerhet kräves!
8. En rund kranarm av trä skall beräknas för avknäckning enligt Eulers formel. Hur stor tryckbelastning i längdriktningen tål kranarmen med 6-faldig säkerhet, om dess diameter är 110 mm, längden 4 m och elasticitetsmodulen 77 000 kgf/cm²?
9. I ett större skyddsrum skall ett dieselmotoraggregat (motor och generator) för reservbelysning uppbäras av två I-balkar av St 44 (tillåten böjningspåkänning = 1 400 kgf/cm²). Balkarnas spännvidd är 6 m. Aggregatet, som väger 3 ton, placeras så att dess tyngdpunkt ligger lodrätt över en punkt 2 m från ena balkupplaget. Dimensionera balkarna. På grund av dynamiska påkänningar göres ett tillskott i belastningen på 20 %. Ingen hänsyn behöver tagas till balkarnas egen vikt.

Resultat: **1.** 1159 kgf. **2.** ca 41,9 mm. **3.** 34,3 hk. **4.** 28,6 cm. **5.** 5 st. **6.** 60 mm. **7.** 4200 kgf. **8.** 569 kgf. **9.** INP 19 eller 20.